A Unified Approach to Combinatorial Algorithms for Matchings and Matroids

髙澤　兼二郎
(東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻)
指導教員　室田一雄 教授，岩田　覚 准教授

1. はじめに

組合せ最適化の分野のコアをなす研究対象として，マッチングとマトロイド交叉が挙げられる．マッチングとマトロイド交叉の共通の一般化として，Cunningham-Geelen[3]は無向グラフにおける**独立パスマッチング**という概念を導入した．さらに，Cunningham-Geelen[4]はパスマッチングの一般化として有向グラフにおける**偶因子**の概念を，また，偶因子とマトロイド交叉の共通の一般化として**基底偶因子**の概念を導入した．

偶因子とは，互いに頂点を共有しないパスと偶数長の閉路の集まりと定義される．与えられた有向グラフに対し枝数最大の偶因子を求める問題を最大偶因子問題という．この問題はNP困難であるが，奇閉路対称グラフにおける多項式時間アルゴリズムを，Edmondsのマッチングアルゴリズム[5]の拡張としてPap[8][9]が提案した．有向グラフが奇閉路対称であるとは，任意の奇数長の閉路（奇閉路）が逆向き閉路を持つことをいう．

本研究では，偶因子に関連する三つの結果を提案した：

- 最大重み偶因子の組合せ的アルゴリズム，
- 独立偶因子の組合せ的アルゴリズム，
- 偶因子の次数列によるジャンプシステムの導出．

本稿では頂点集合 V，枝集合 A の有向グラフを (V, A) と書き，$|V|, |A|$ をそれぞれ n, m で表す．また，枝重み $w \in \mathbf{R}^A$ を付随した有向グラフ $G=(V, A)$ を (G, w) と書く．頂点 $v \in V$ に対して，v を始点，終点とする枝集合をそれぞれ $\delta^+ v, \delta^- v$ と書き，枝 $a \in A$ について，その始点，終点をそれぞれ $\partial^+ a, \partial^- a$ と書く．また，$B \subseteq A$ について，$\partial^+ B = \{v | v \in V, \exists a \in B, \partial^+ a = v\}, \partial^- B = \{v | v \in V, \exists a \in B, \partial^- a = v\}$ と定める．$X^+, X^- \subseteq V$ について，X^+ から $X^- \setminus X^+$ および $X^+ \setminus X^-$ から X^- への枝が存在しないとき，(X^+, X^-) は安定対であるという．また，$X \subseteq V$ に対して，X の誘導部分グラフを $G[X]=(X, A[X])$ と書き，$G[X]$ の強連結成分で頂点数が奇数で他の成分から入る枝のない成分の個数を $\mathrm{odd}(X)$ と書く．

2. 最大重み偶因子アルゴリズム

最大重み偶因子問題とは，重みつきグラフ (G, w) において枝重みの和を最大にする偶因子を求める問題である．重みつき奇閉路対称グラフにおいては，Cunningham-Geelen[4]の主双対法にPapのアルゴリズムを組み込むことによって計算時間 $O(n^7)$ の組合せ的アルゴリズムが得られる．重みつき有向グラフが奇閉路対称であるとは，重みなしの意味で奇閉路対称であり，任意の奇閉路とその逆向き閉路で枝重みの和が等しいことである．

一方，Király-Makai[6]は最大重み偶因子問題を以下の線形計画問題で表現した：

$$
\begin{aligned}
&\text{(P)} \quad \max.\ wx \\
&\quad \text{s.t.} \quad x(\delta^- v) \le 1 \quad (\forall v \in V), \\
&\qquad\qquad x(\delta^+ v) \le 1 \quad (\forall v \in V), \\
&\qquad\qquad x(A[U]) \le |U| - 1 \ (\forall U \subseteq V, |U|: \mathrm{odd}), \\
&\qquad\qquad x \ge 0.
\end{aligned}
$$

双対問題は以下のようになる：

$$
\begin{aligned}
&\text{(D)} \quad \min.\ \sum_{v \in V} (\pi_v^- + \pi_v^+) + \sum_{U \subseteq V, |U|:\mathrm{odd}} y_U (|U| - 1) \\
&\quad \text{s.t.} \quad \pi_{\partial^- a}^- + \pi_{\partial^+ a}^+ + \sum_{\substack{U \subseteq V, |U|:\mathrm{odd} \\ a \in A[U]}} y_U \ge w_a (\forall a \in A), \\
&\qquad\qquad \pi_v^-, \pi_v^+, y_U \ge 0.
\end{aligned}
$$

これらの線形計画問題に対し，以下の定理が成り立つ．

定理1　([6])．(G, w) が奇閉路対称であり，かつ，w が整数ならば，(P) と (D) はともに整数最適解を持つ．

本研究では，この線形計画表現に基づき最大重み偶因子を求める組合せ的なアルゴリズムを提案した．本アルゴリズムは最大重みマッチングアルゴリズムとPapの偶因子アルゴリズムの枠組に基づいた主双対

アルゴリズムであり，計算時間は$O(n^3m)$である．また，双対最適解も同時に求まり，特にwが整数の場合には整数最適解が求まり，定理1の構成的な証明を与える．

3. 独立偶因子アルゴリズム

有向グラフ$G=(V,A)$とVを台集合とする二つのマトロイド$\mathbf{M}^+$，$\mathbf{M}^-$があるとする．$\mathbf{M}^+$，$\mathbf{M}^-$の独立集合族をそれぞれ$\mathcal{I}^+$，$\mathcal{I}^-$，階数関数をρ^+，ρ^-と書く．このとき，$F\subseteq A$が以下の(i)-(iii)を満たすとき，Fは$(G,\mathbf{M}^+\mathbf{M}^-)$における**独立偶因子**であるという：(i)$F$は$G$における偶因子；(ii)$\partial^+F\in\mathcal{I}^+$；(iii)$\partial^-F\in\mathcal{I}^-$．$(G,\mathbf{M}^+,\mathbf{M}^-)$における最大独立偶因子（枝数最大の独立偶因子）の大きさを$\nu(G,\mathbf{M}^+,\mathbf{M}^-)$と書く．独立偶因子はマッチングとマトロイド交叉を共通に一般化する概念であり，基底偶因子[4]と本質的に等価である．

独立偶因子に対し，以下の最大最小定理が成り立つ．

定理2．Gが奇閉路対称グラフであるとき，

$$\nu(G,\mathbf{M}^+,\mathbf{M}^-)=\min_{(X^+,X^-)}\{\rho^+(V\backslash X^+)+\rho^-(V\backslash X^-)+|X^+\cap X^-|-\mathrm{odd}(X^+\cap X^-)\}. \quad (1)$$

ただし，(X^+,X^-)の範囲はすべての安定対である．

この定理は，マッチングの最大最小定理やマトロイド交叉の最大最小定理を特殊ケースとして含む．

さらに，本研究では奇閉路対称グラフにおける最大独立偶因子を求めるアルゴリズムを提案した．本アルゴリズムはマトロイド交叉アルゴリズムとPapの偶因子アルゴリズムとを共通に拡張するものである．アルゴリズムの終了時点で式(1)を等号で満たす独立偶因子と安定対が得られることからその正当性は保証される．

本アルゴリズムから，マッチングのEdmonds-Gallai分解とマトロイド交叉の基本分割を共通に拡張する分割定理が得られる．また，アルゴリズムの計算量は$O(n^4Q)$（Qはマトロイドの独立判定の時間）である．

4. 偶因子とジャンプシステム

Bouchet-Cunningham[1]はマトロイドの一般化として，**定パリティジャンプシステム**を導入した．また，室田[7]による定パリティジャンプシステム上のM凸関数（あるいはM凹関数）はその定量的一般化である．

有向グラフ$G=(V,A)$に対し，V^+，V^-をそれぞれVのコピーとする．$F\subseteq A$に対し，Fの有向次数列$d_F\in\mathbf{Z}^{V^+}\times\mathbf{Z}^{V^-}$を以下で定義する：

$$d_F(v)=\begin{cases}|\{a|a\in F,\partial^+a=v\}|(v\in V^+),\\ |\{a|a\in F,\partial^-a=v\}|(v\in V^-).\end{cases}$$

また，Fの無向次数列$\bar{d}_F\in\mathbf{Z}^V$を，頂点$v\in V$に入る枝数と出る枝数の合計を$\bar{d}_F(v)$とすることで定義する．このとき，$J_{\mathrm{EF}}(G)=\{d_F|F$は$G$の偶因子$\}\subseteq\{0,1\}^{V^+\cup V^-}$および$\bar{J}_{\mathrm{EF}}(G)=\{\bar{d}_F|F$は$G$の偶因子$\}\subseteq\{0,1,2\}^V$について以下の定理が成り立つ．

定理3．奇閉路対称グラフGにおいて$J_{\mathrm{EF}}(G)$および$\bar{J}_{\mathrm{EF}}(G)$は定パリティジャンプシステムを成す．

この事実はCunningham[2]の中で示唆されているが，我々はこの定理の構成的な別証明を与えた．

さらに，重みつき有向グラフ(G,w)に対し，

$$f(x)=\max\{\textstyle\sum_{a\in F}w(a)|d_F=x,F\text{は偶因子}\},$$
$$\bar{f}(x)=\max\{\textstyle\sum_{a\in F}w(a)|\bar{d}_F=x,F\text{は偶因子}\}$$

で定義される$f:J_{\mathrm{EF}}(G)\to\mathbf{R}$，$\bar{f}:\bar{J}_{\mathrm{EF}}(G)\to\mathbf{R}$について，以下の定理を示した．

定理4．重みつき奇閉路対称グラフ(G,w)において，fや$\bar{f}$はM凹関数である．

参考文献

[1] A. Bouchet and W. H. Cunningham: Delta-matroids, jump systems, and bisubmodular polyhedra, *SIAM J. Discrete Math.*, 8 (1995), 17-32.

[2] W. H. Cunningham: Matching, matroids, and extensions, *Math. Program.*, 91 (2002), 515-542.

[3] W. H. Cunningham and J. F. Geelen: The optimal path-matching problem, *Combinatorica*, 17 (1997), 315-337.

[4] W. H. Cunningham and J. F. Geelen, Vertex-disjoint dipaths and even dicircuits, manuscript, 2001.

[5] J. Edmonds: Paths, trees, and flowers, *Canad. J. Math.*, 17 (1965), 449-467.

[6] T. Király and M. Makai: On polyhedra related to even factors, *Proc. 10th IPCO*, LNCS 3064, Springer-Verlag, 2004, 416-430.

[7] K. Murota: M-convex functions on jump systems: a general framework for minsquare graph factor problem, *SIAM J. Discrete Math.*, 20 (2006), 213-226.

[8] G. Pap: A combinatorial algorithm to find a maximum even factor, *Proc. 11th IPCO*, LNCS 3509, Springer-Verlag, 2005, 66-80.

[9] G. Pap: Combinatorial algorithms for matchings, even factors and square-free 2-factors, *Math. Program.*, 110 (2007), 57-69.