離散最適化における未解決問題

藤重　悟

離散最適化における公開未解決問題の中から9つを選んで，コメントを加えて紹介する．

キーワード：離散最適化，Hirsch予想，線形計画問題，マトロイド，数え上げ，列挙

1. はじめに

グラフやマトロイドに関係する組合せ論および組合せ最適化の研究において偉大な業績を残したW. T. Tutte（タット）が，4色問題（定理）のエレガントな証明を求めて，マトロイドの研究をしていたことはよく知られている．チャレンジングな問題の解決に向けた地道な努力の結果が，原問題からは予想もしない他の重要な問題の解決に寄与したり，新たな有用な理論の構成に結び付いたりするのである．そのためにも，若い世代の研究者や学生が，世界の一流の研究者達を悩ませてきている未解決問題に触れるのは，研究や勉学の意欲を高めるためにもとても良いことである．

しかしながら，公開されている未解決問題は，すでに周知の問題で，多くの優秀な研究者の挑戦を跳ね返してきた難問であるのが通常である．したがって，若い研究者達に，以下に挙げる未解決問題に直ちに挑戦することを勧めるものではないが，それらの問題を理解して，機会あらば解決するぞ，との気概を持ってもらえればそれで良いのである．

2. 公開未解決問題

それでは，数理計画の分野で，特に離散最適化の関係で，重要であると認識されているいくつかの未解決問題を挙げよう．

問題1：Hirsch（ハーシュ）予想

A：$m\times n$実数（あるいは有理数）行列，b：m次元縦ベクトル，$P=\{x\in\mathbf{R}^n|Ax\leq b\}$とし，$P$が有界な$n$次元凸多面体であるとする．このとき，$P$の任意の2つの端点は，高々$m-n$個の$P$の辺をたどって結ばれる．

［コメント］ Pを決める線形不等式系から冗長な不等式を削除して，mがPのファセットの数に等しいと仮定してもよい．この予想は，線形計画のバイブルであるG. B. Dantzig（ダンツィク）の著書[5]の中（pp. 160, 168）で，1957年にW. M. Hirschによって提示されたと記されている．$n=3$次元以下の場合，$m-n\leq 5$の場合，あるいは，一般のn次元で0-1多面体（すべての端点が0-1ベクトルである凸多面体）の場合などに，Hirsch予想が正しいことが示されている．一般のnでは何も分かっていないといってよいくらいで，予想の上界を$m-n$の代りにm，nの多項式とするようなどんな結果も得られていない（文献[30, Sec. 3.3]参照）．線形計画や多面体組合せ論が華々しい研究の展開を見せている中で，凸多面体の最も基本的な組合せ構造（多面体グラフの直径）に関わるHirsch予想が半世紀を経た今も未解決なままである（文献[15]も参照）．なお，同値な命題として，「ファセット数が$m=2d$で，次元$n=d$の場合にその多面体グラフの直径が$d(=m-n)$に等しい」という**d-ステップ予想**というものもある．なお，多面体Pが有界でない場合には一般にHirsch予想が成り立たないことが知られている．

問題2：シンプレクス法（単体法）は多項式時間アルゴリズムになるか？

Dantzigによる線形計画問題の解法であるシンプレクス法の標準的なピボット選択ルールによると，シンプレクス法は最悪指数時間を要することが知られている[18]．しかしながら，このことは，あらゆるピボット選択ルールに対して最悪指数時間を要することを示してはおらず，多項式時間となるピボット選択ルールの存在を否定するものではない．多項式時間シンプレク

ふじしげ　さとる
京都大学 数理解析研究所
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

ス法の構成（あるいはその存在の否定）が未解決である．

[コメント] 最小費用フロー問題に対する多項式時間シンプレクス法は知られている．一般の線形計画問題に対しては，多項式時間と指数時間の間の手間のランダム化シンプレックス法[15][23]が構成されている（最近の文献[16]も参照）．Hirsch 予想（問題1）が，多項式時間シンプレクス法の存在に希望を持たせている．線形計画問題全般に関しては，文献[27]も参照されたい．

問題3：線形計画問題の強多項式時間アルゴリズムはあるか？

線形計画問題に対するいわゆる楕円体法や内点法は問題の記述に現れる係数行列，右辺ベクトル，目的関数の係数ベクトルの数値の長さに依存する多項式時間（弱多項式時間）のアルゴリズムである．これに対して，係数行列が $m\times n$ の大きさであるとき，データの数値の長さに依存しない m と n の多項式の時間（強多項式時間）のアルゴリズムが存在するか否か，が未解決である（文献[2, pp. 280-281]でも S. Smale（スメイル）が未解決問題として取り上げている）．

[コメント] 右辺ベクトルと目的関数の係数ベクトルのデータ長には依存しないで，係数行列のデータ長に依存する多項式時間アルゴリズムは知られている（[26][29]）．

線形計画問題の特殊な場合である**一般化フロー問題**は，係数行列の各列が1個の+1と1個の負の数の二つの非零要素のみをもつ問題であるが，一般の線形目的関数の場合はもちろんのこと，目的関数の係数ベクトルが単位ベクトルであるような最大一般化フロー問題に対しても，強多項式時間アルゴリズムが見つかっていない．

問題4：重みつきマトロイド・マッチング問題に対する多項式時間アルゴリズムの構成

マトロイド・マッチング問題は，台集合 V が2元の対 $\{u_i, v_i\}(i\in I)$ に分割され，V 上のマトロイド $\mathbf{M}=(V, \mathcal{I})$（$\mathcal{I}$ は独立集合族）が与えられたとき，$J\subseteq I$ で $\cup_{i\in J}\{u_i, v_i\}$ が独立集合（$\mathcal{I}$ の元）であるようなものを，**マトロイド・マッチング**という（マトロイドについては文献[13]を参照）．最大サイズのマトロイド・マッチングを見出す問題を**最大マトロイド・マッチング問題**という．さらに，重み $w: I\to\mathbf{R}$ が与えられたとき，$w(J)=\sum_{j\in J}w(j)$ を最大にするマトロイド・マッチング J を見出す問題を**重みつきマトロイド・マッチング問題**という．線形表現されたマトロイドに対する重みつきマトロイド・マッチング問題は多項式時間で解くことができるか？

[コメント] 上記の最大マトロイド・マッチング問題は，E. L. Lawler（ローラ）によって1971年に定式化され，マトロイド・パリティ問題と呼ばれた（[19, Chapter 9]）．それは，一般のグラフの最大マッチングの問題と二つのマトロイドの最大共通独立集合の問題を共に一般化した問題である（Lawler[19]は，マトロイド・パリティ問題とは別にマトロイド・マッチング問題を定義しているが，両者は同等である）．その後，1978年に L. Lovász（ロヴァース）が，最大マトロイド・マッチング問題は一般には指数時間を要することを示し，線形マトロイド（行列表現されたマトロイド）に対して初めて多項式時間アルゴリズムを提示した（[20]）．さらに，マトロイドをデルタ・マトロイドに一般化した研究[11]も展開されている．線形マトロイドおよび線形デルタ・マトロイド上の重み付きの場合が未解決なままである．

線形（デルタ）マトロイドの場合の最大マトロイド・マッチング問題（最大デルタ・マトロイド・マッチング問題）に対して最大・最小定理が示されているが，線形計画の双対定理に対応する多面体的な特徴付けは得られていない．組合せ最適化問題で，‘うまく’解ける問題はほとんど多面体的な特徴付けを持っているが，線形マトロイドに対するマトロイド・マッチング問題はそうではない組合せ最適化問題の典型的な例の一つである．そのことが，重み付き問題の解決が難しくなっている理由でもある．

以下の問題5，6は，松井知己氏（中央大学）の紹介による来嶋秀治氏（京都大学）の挙げた未解決問題である．

数え上げ問題は，積分計算，ランダム生成と密接に関連する話題である．近年，高次元凸体の体積計算やパーマネントの計算に対して，マルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法に基づく全多項式時間乱択近似計算法（FPRAS）が提案され，注目されている．以下に挙げる問題以外にも，多くの重要な数え上げ問題に対する FPRAS の設計が未解決である．

問題5：2元分割表数え上げ問題

与えられた行和および列和を満たす $m\times n$ 分割表の総数を計算するFPRASは存在するか？

[コメント] 2元分割表数え上げ問題は，行数を2に固定しても#P完全である．行数2の場合にはM. DyerとC. Greenhill[6]が，3以上の定数行に対してはM. Cryanら[4]が，MCMC法に基づくFPRASを提案している．行数 m および列数 n に関するFPRASの設計が未解決である．

問題6：マトロイドの基の数え上げ問題

独立性判定オラクルが与えられたマトロイド $\mathbf{M}=(E, \mathcal{I})$ の基の総数を計算するFPRASは存在するか？

[コメント] マトロイドの基の数え上げ問題は，一般のマトロイドに対して#P完全である．グラフ的マトロイドに対しては，多項式時間の決定的計算法が存在する．T. FederとM. Mihail [9] は平衡マトロイド (balanced matroid) のクラスを提案し，これに対してMCMC法に基づくFPRASを設計している．一般のマトロイドに対するFPRASの設計が未解決である．

以下の問題7，8，9は，牧野和久氏（東京大学）によって挙げられた未解決問題である．これらは基本的な離散問題であり，人工知能，データベース論，データマイニング，学習理論，計算幾何など幅広い応用をもつことが知られている．これらの問題はすべて，YES，あるいは，NOで答える判定問題であるが，実は，あとで述べるように，3大未解決列挙問題に対応している．

問題7：単調論理関数の双対性判定問題

与えられた単調な論理和形（DNF）と論理積形（CNF）が等価であるかどうかを判定する問題を単調論理関数の双対性判定問題とよぶ．例えば，$\varphi=x_1x_2\vee x_2x_3$ と $\phi=x_2(x_1\vee x_3)$ が等価であるかを判定する問題であり，この例では，YESとなる．この単調論理関数の双対性判定問題を多項式時間で解くことができるか？

[コメント] これは，文献[7][8][14][21][22][24]にあるように幅広い応用をもつが，いまだに多項式時間アルゴリズムが見つかっていない．現在，M. L. Fredman（フレドマン）とL. Khachiyan（ハチヤン）[10]により（多項式時間と指数時間の間の）準多項式時間で計算可能であることは分かっている．

問題8：有界多面体の等価性判定問題

p 個の有理ベクトル $v_1,\cdots,v_p\in\mathbf{Q}^n$ と m 個の線形不等式 $a_1x\leq b_1,\cdots,a_mx\leq b_m$（ただし，$a_i\in\mathbf{Q}^n, b_i\in\mathbf{Q}, i=1,\cdots,m$）が与えられたとき，$p$ 個の点 $v_1,\cdots,v_p$ の凸包と m 個の線形不等式で表される多面体が同じであるかを問う問題を有界多面体の等価性判定問題という．この有界多面体の等価性判定問題を多項式時間で解くことができるか？

[コメント] これは，離散幾何の重要な問題であり，例えば文献[21]に取り上げられているが，いまだに多項式時間アルゴリズムが見つかっていない．

なお，線形不等式系が表現する多面体 P が非有界な場合に，与えられた点集合が（非有界な）多面体 P の端点集合と一致するかを判定する問題は，co-NP完全であることが知られている（[17]）．

問題9：ホーン論理関数の等価性判定問題

各節が高々1個の正リテラルをもつホーンCNFとホーン論理関数の特性ベクトル集合が与えられたとき，それらが同じホーン論理関数を表現しているかどうかを判定する問題をホーン論理関数の等価性判定問題という．このホーン論理関数の等価性判定問題を多項式時間で解くことができるか？

[コメント] この問題は，データベース論におけるアームストロング関係と関数従属性の等価性を判定する問題と等価であり[3]，人工知能，学習理論，データベース論などに応用をもつ．この問題は，上記の単調論理関数の双対性判定問題以上に難しい問題ということは分かっている[8]が，それ以上のことは何も知られていない．

上記の3つの問題は，3大未解決列挙問題に対応している．問題7は，単調なCNFからそれと等価な主DNFを求める（すなわち，主項を列挙する）問題，問題8は，線形不等式系からそれが表す多面体の頂点を列挙する問題，問題9は，ホーンCNFから特性ベクトル集合を列挙する問題と，それぞれ，以下の関係にある．

列挙問題が出力多項式時間で解ける

$\Longleftrightarrow$ 対応する判定問題が多項式時間で解ける

したがって，問題7，8，9を解くことが，3大未解決列挙問題を解くことになるのである．

その他の問題

公開問題については，関係分野のサーベイ論文を読むと良いが，最適化の関係で最近見かけたものに文献[12]がある．離散最適化に関する比較的最近の情報を得るには，文献[1][25]が参考になるだろう．A. Schrijver（スクライファ）の本[25]の巻末にも未解決問題の一覧がある．

精度保証付き近似アルゴリズムに関しては，V. V. Vazirani（ヴァジラーニ）の本[28]を参照されたい．

数理計画（最適化）全般については，2006年の国際数理計画法シンポジウムの招待講演を特集した論文誌 Mathematical Programming (Ser. B) の Vol. 112, No. 1 (2008) を参照するとよい．

また，グラフやマトロイドなどに関係する組合せ最適化の未解決問題のリストが，A. Frank（フランク）が率いるハンガリーの研究グループのページ

http://www.cs.elte.hu/egres/

に公開され，常に更新されているので参考にされたい．手を延ばせば届きそうなきれいな花（研究テーマ）を見つけたり，あそこに行けば美しい花がありそうだという知見は，それ自身が独創性の種になるもので，通常は公開されないのであるが，上記ホームページでの未解決問題の公開はハンガリーのグループの研究に対する自信の現れでもあろう．

3. おわりに

初夢：P＝NPが証明されて，複雑度の階層が一挙につぶされた夢（悪夢）を見る．

世の中ではP≠NPが常識であるが，P＝NPも想定する必要があるのではないか，と心の隅っこで思ってしまう．P≠NP？ 問題は，今や，純粋数学者を巻き込んでの大きな未解決問題となっている．

雲の遥か上にあって皆目見当がつかない公開未解決問題という山の頂上に向かって登っていく途中で，あちこちに咲いた美しい花を見つけては喜びを感じる，そういった研究を地道に続けたいものである．「山」は必ずしも特定の定式化された明確な問題ではなくて，散在するいろいろな成果を見通し良く説明できる統一的な理論であったり，高速なアルゴリズムの構成のようなものであったりする．そのような目標も，ここでいう目指すべき「山」である．

最後に，言うまでもないことであるが，外的に与えられた公開未解決問題だけが研究テーマではなくて，自らが探し求めて重要だと考える独自の研究テーマを見出すことが大切である．そのような研究テーマ探求の旅の先に公開未解決問題に行き着くこともあるであろう．

また，そのような理論研究だけではなくて，いわゆるNP困難と呼ばれるような，厳密最適解を見つけるのが難しい現実の問題に対して実用的に十分に最適解に近いものを高速に見出すアルゴリズムの開発が活発になされており，いわゆるメタヒューリスティクな解法の研究や，整数計画（IP）・混合整数計画（MIP）問題の実用的な解法を目指した研究が進んでいることも指摘しておきたい．

（数理計画法研究部会（RAMP）の主査として原稿の執筆をお引き受けしたのであるが，本原稿が数理計画（離散最適化）全体をバランスよくカバーしたものになっていないのは筆者の責任である．ご容赦願いたい．原稿の執筆にあたって，公開問題を挙げていただいた来嶋秀治氏ならびに牧野和久氏，さらに，原稿の仕上げに際して貴重なコメントを頂戴した岩田覚氏と平井広志氏に感謝する次第である．）

参考文献

[1] K. Aardal, G. Nemhauser, and R. Weismantel (eds.): *Discrete Optimization* (Handbooks in Operations Research and Management Science 12) (Elsevier, 2006).

[2] V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur (eds.): *Mathematics : Frontiers and Perspectives* (IMU, AMS, 2000).

[3] C. Beeri, M. Dowd, R. Fagin, and R. Statman: On the structure of Armstrong relations for functional dependencies. *Journal of the ACM*, 31 (1984) 30-46.

[4] M. Cryan, M. Dyer, L. A. Goldberg, M. Jerrum, and R. Martin: Rapidly mixing Markov chains for sampling contingency tables with a constant number of rows. *SIAM Journal on Computing* 36 (2006) 247-278.

[5] G. B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions* (Princeton University Press, 1963).

[6] M. Dyer and C. Greenhill: Polynomial-time counting and sampling of two-rowed contingency tables. *Theoretical Computer Science* 246 (2000) 265-278.

[7] T. Eiter and G. Gottlob: Hypergraph transversal computation and related problems in logic and AI. *Proc. 8th European Conference on Logics in Artificial Intelligence*, LNCS 2424 (2002) 549-564.

[8] T. Eiter, K. Makino, and G. Gottlob: Computational aspects of monotone dualization: A

brief survey. KBS Research Report INFSYS RR-1843-06-01, Institute of Information Systems, Vienna University of Technology Favoritenstraße 9-11, A-1040 Vienna, Austria, 2006. To appear in *Discrete Applied Mathematics*.

[9] T. Feder and M. Mihail: Balanced matroids. *Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (STOC 1992), pp. 26-38.

[10] M. Fredman and L. Khachiyan: On the complexity of dualization of monotone disjunctive normal forms. *Journal of Algorithms* **21** (1996) 618-628.

[11] J. F. Geelen, S. Iwata, and K. Murota: The linear delta-matroid parity problem. *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. B **88** (2003) 377-398.

[12] J.-B. Hiriart-Urruty: Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization. *SIAM Review* **49** (2007) 255-273.

[13] 伊理・藤重・大山:「グラフ・ネットワーク・マトロイド」講座: 数理計画法 7 (産業図書, 1986; 復刊, 2005).

[14] D. S. Johnson: Open and closed problems in NP-completeness. Lecture given at *the International School of Mathematics "G. Stampacchia": Summer School "NP-Completeness: The First 20 Years,"* Erice (Sicily), Italy, 20-27 June 1991.

[15] G. Kalai: Linear programming, the simplex algorithm and simple polytopes. *Mathematical Programming* **79** (1997) 217-233.

[16] J. A. Kelner and D. A. Spielman: A randomized polynomial-time simplex algorithm for linear programming. *Proceedings of the 38th ACM Symposium on Theory of Computing* (STOC 2006), pp. 51-60.

[17] L. Khachiyan, E. Boros, K. Borys, K. Elbassioni, and V. Gurvich: Generating all vertices of a polyhedron is hard. *Proceedings of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA 2006), pp. 758-765.

[18] V. Klee and G. J. Minty: How good is the simplex algorithm? *Inequalities, III* (O. Shisha, ed.) (Academic Press, 1972), pp. 159-175.

[19] E. L. Lawler: *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids* (Holt, Rinehart and Winston, 1976).

[20] L. Lovász: Matroid matching and some applications. *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. B **28** (1980) 208-236.

[21] L. Lovász: Combinatorial optimization: Some problems and trends, *Technical Report DIMACS* 92-53, Rutgers University, 1990.

[22] H. Mannila: Local and global methods in data mining: Basic techniques and open problems. *Proc. 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (ICALP 02), LNCS **2380** (2002) 57-68.

[23] J. Matoušek, M. Sharir, and E. Welzl: A subexponential bound for linear programming. *Algorithmica* **16** (1996) 498-516.

[24] C. Papadimitriou: NP-completeness: A retrospective. *Proceedings of the 24th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming* (ICALP '97), LNCS **1256** (1997) 2-6.

[25] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization—Polyhedra and Efficiency* (Algorithms and Combinatorics **24**) (Springer, 2003).

[26] É. Tardos: A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs. *Operations Research* **34** (1986) 250-256.

[27] M. J. Todd: The many facets of linear programming. *Mathematical Programming*, Ser. B **91** (2002) 417-436.

[28] V. V. Vazirani: *Approximation Algorithms* (Springer, 2001); 浅野孝夫 (訳):「近似アルゴリズム」(シュプリンガーフェアラーク東京).

[29] S. A. Vavasis and Y. Ye: A primal-dual interior point method whose running time depends only on the constraint matrix. *Mathematical Programming* **74** (1996) 79-120.

[30] G. M. Ziegler: *Lectures on Polytopes* (Graduate Texts in Mathematics **152**) (Springer, 1995); 岡本・八森 (訳):「凸多面体の数学」(シュプリンガーフェアラーク東京).