Algorithmic Computation of the Transient Queue Length Distribution in the BMAP/D/c Queue

大黒　健太朗
（京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻　現所属・同大学院情報学研究科システム科学専攻）
指導教員　高橋　豊 教授

1. 序論

スーパーのレジ，銀行の窓口，駅の券売機など，我々の身の回りにある「待ち行列システム」では複数サーバモデルが基本である．しかしながら，複数サーバモデルは，一般に解析が難しいとされており，特に数値計算に重きを置いた「過渡解析」は十分に行われていない．そうした現状を踏まえ，本論文では，任意の到着過程を任意の精度で近似可能な Batch Markovian Arrival Process (BMAP) を入力とする BMAP/D/c 待ち行列の過渡系内客数分布の数値計算アルゴリズムを提案する．また，提案アルゴリズムによって計算した過負荷の場合の数値例は過去の研究にはほとんど見られないものである．

以下では，バッファ容量は無限，サーバはすべて同質であるとし，その個数を c 個 ($c\geq 1$) とする．そして，サービス時間はすべてある定数 $h(h>0)$ に等しく，各サーバはシステムに客が存在する限り間断なくサービスを行う．また，サービス規律は非割り込み型であるとする．

到着過程 BMAP はその背後過程として，有限状態空間 $\mathcal{M}=\{1,2,\cdots,M\}$ 上の斉時なマルコフ連鎖を有し，通常，$M\times M$ 行列 $\boldsymbol{C}$ および $\boldsymbol{D}_n(n=1,2,\cdots)$ によって特徴付けられる．すなわち，行列 $\boldsymbol{C}$ が引き起こす状態遷移は到着を伴わないが，行列 $\boldsymbol{D}_n$ による状態遷移はサイズ n の集団到着を伴う．また，$\boldsymbol{C}+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_n$ は背後過程の無限小作用素を表す．ここで，背後過程は唯一の連結クラスを持つと仮定する．このとき，$\boldsymbol{\pi}$ を $\boldsymbol{C}+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{D}_n$ の定常確率ベクトルとすると，$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\pi}\geq\boldsymbol{0})$ は一意に定まり，到着率 λ およびトラヒック強度 ρ はそれぞれ次式で与えられる．

$$\lambda=\boldsymbol{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{e},\quad \rho=\lambda h$$

ただし，$\boldsymbol{e}$ はすべての要素が1に等しい列ベクトルであり，その次元は文脈に応じて適当に定められるものとする．

2. 系内客数分布の時間発展方程式

まず，$\boldsymbol{\pi}_n(t)(t\geq 0;\ n=0,1,\cdots)$ を $1\times M$ ベクトルとし，その第 j 成分を $[\boldsymbol{\pi}_n(t)]_j=\Pr[L(t)=n, S(t)=j]$ と定義する．ただし，$L(t)$ および $S(t)$ は，それぞれ時刻 t における系内客数および背後過程の状態を表す．

以下では Crommelin の手法[1][3]を応用し，系内客数分布 $\boldsymbol{\pi}_n(t)$ の時間発展方程式を導出する．すべての客は中断されることなく一定時間 h のサービスを受けることから，時間間隔 $(t-h,t]$ にシステムを退去する客は時刻 $t-h$ においてサービス中の客だけであり，それ以外の客は時刻 t までシステムに滞在し続けることがわかる．このことから，時刻 t にシステム内に滞在している客は，(i)時刻 $t-h$ までに到着した客と，(ii)時間間隔 $(t-h,t]$ に到着した客からなる．よって，下記命題を得る．

命題1　任意の $t(\geq h)$ に対して，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{\pi}_n(t)=\sum_{l=0}^{c-1}\boldsymbol{\pi}_l(t-h)\boldsymbol{N}_n(h)+\sum_{l=c}^{n+c}\boldsymbol{\pi}_l(t-h)\boldsymbol{N}_{n+c-l}(h),\ n=0,1,\cdots$$

ただし，$\boldsymbol{N}_n(x)(x\geq 0;\ n=0,1,\cdots)$ は $M\times M$ 行列であり，その (i,j) 成分 $(i,j\in\mathcal{M})$ は，$S(\tau)=i$ という条件の下で，$S(\tau+x)=j$ かつ，時間間隔 $(\tau,\tau+x]$ の到着客数が n であるという条件付き結合確率を表す．

命題1によれば，$\boldsymbol{\pi}_\nu(t)(\nu=0,1,\cdots,n)$ を計算するためには $\boldsymbol{\pi}_\nu(t-h)(\nu=0,1,\cdots,n+c)$ が必要であり，その $\boldsymbol{\pi}_\nu(t-h)(\nu=0,1,\cdots,n+c)$ は $\boldsymbol{\pi}_\nu(t-2h)(\nu=0,1,\cdots,n+2c)$ を必要とする．この議論を繰り返すと，結局，$\boldsymbol{\pi}_\nu(t)(\nu=0,1,\cdots,n)$ の計算には，$\boldsymbol{\pi}_\nu(t_0)(\nu=0,1,\cdots,n+\lfloor t/h\rfloor c;\ t_0=t-\lfloor t/h\rfloor h)$ が必要であることがわかる．

命題2　$\boldsymbol{\pi}_n(t_0)$ は以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{\pi}_n(t_0)=\begin{cases}\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{init}}\boldsymbol{N}_{n-l_0+d(t_0)}(t_0), & \text{if } n\geq l_0-d(t_0)\\ \boldsymbol{0}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

ただし，$\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{init}}$ は $1\times M$ ベクトルであり，その第 j 成分 $(j\in\mathcal{M})$ は $\Pr[S(0)=j]$ を表すものとする．また，l_0

は時刻0における系内客数の数であり，$d(t_0)$ は時刻0でサービス中であり，かつ時刻 t_0 までにシステムを退去する客の数である．

最後に，$\boldsymbol{N}_n(x)(n=0,1,\cdots)$ について述べる．$\boldsymbol{N}_n(x)(n=0,1,\cdots)$ は以下の補題を用いて計算される．

命題3

$$\boldsymbol{N}_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\theta x}\frac{(\theta x)^k}{k!}\boldsymbol{F}_{k,n},\quad n=0,1,\cdots$$

ただし，

$$\boldsymbol{F}_{0,n}=\begin{cases}\boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{O},\end{cases}\quad \boldsymbol{F}_{1,n}=\begin{cases}\boldsymbol{I}+\theta^{-1}\boldsymbol{C}, & n=0\\ \theta^{-1}\boldsymbol{D}_n, & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

であり，さらに，$\boldsymbol{F}_{k,n}(k=2,3,\cdots)$ に対しては次式で与えられる．

$$\boldsymbol{F}_{k,n}=\sum_{l=0}^{n}\boldsymbol{F}_{1,l}\boldsymbol{F}_{k-1,n-l},\quad n=0,1,\cdots$$

3. 提案アルゴリズムの概要

本節では提案アルゴリズムのアイデアを概説する．まず，提案アルゴリズムは系内客数分布ベクトル $\{\boldsymbol{\pi}_n(t)\}$ の近似として，以下の性質をみたすベクトル列 $\{\hat{\boldsymbol{\pi}}_n(t)\}$ を計算するものである．

性質1 任意に与えられた目標精度 $\varepsilon(0<\varepsilon\ll 1)$ に対し，$m=0,1,\cdots,\lfloor t/h\rfloor$ において

$$\boldsymbol{0}\le\hat{\boldsymbol{\pi}}_n(t_m)\le\boldsymbol{\pi}_n(t_m),\quad n=0,1,\cdots$$

$$\sum_{n=\underline{n}_m}^{\overline{n}_m}\hat{\boldsymbol{\pi}}_n(t_m)\boldsymbol{e}\ge 1-\frac{m+1}{\lfloor t/h\rfloor+1}\varepsilon$$

となる．ただし，$\underline{n}_m$ および $\overline{n}_m$ はアルゴリズム実行中に m,t,h および ε を用いて逐次決定される値である．

前節の命題1-3からわかるように，系内客数分布ベクトル $\{\boldsymbol{\pi}_n(t)\}$ は2重無限列 $\{\boldsymbol{F}_{k,n};\ k,n=0,1,\cdots\}$ を用いて与えられる．したがって，上記の性質1の実現を担保しつつ，適当な基準で $\{\boldsymbol{F}_{k,n}\}$ を切断する必要がある．そこで，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\theta h}\frac{(\theta h)^k}{k!}\boldsymbol{F}_{k,n}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$$

が成り立つことに着目し，$\{\boldsymbol{F}_{k,n}\}$ に対する有限近似列として，以下の不等式を満たす列 $\{\hat{\boldsymbol{F}}_{k,n}\}$ を導入する．

$$\boldsymbol{O}\le\hat{\boldsymbol{F}}_{k,n}\le\boldsymbol{F}_{k,n},\quad n=0,1,\cdots$$

$$\sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}}\sum_{n=\underline{\nu}_k}^{\overline{\nu}_k}e^{-\theta h}\frac{(\theta h)^k}{k!}\hat{\boldsymbol{F}}_{k,n}\boldsymbol{e}\ge\left(1-\frac{\varepsilon}{\lfloor t/h\rfloor+1}\right)\boldsymbol{e}$$

ただし，$\underline{k},\overline{k},\underline{\nu}_k$ および $\overline{\nu}_k$ はアルゴリズムの実行過程で ε および h を用いて逐次決定される．近似列 $\{\hat{\boldsymbol{F}}_{k,n}\}$ の構築手順の詳細は割愛（文献[2]参照）．

また，本研究では系内客数分布だけでなく，そのモーメントの計算手順も与えている（文献[2]参照）．

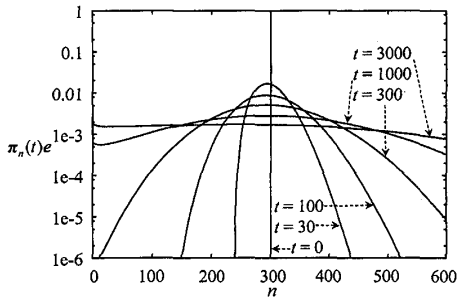

図1 過渡系内客数分布（$\rho/c=1$；$l_0=300$）

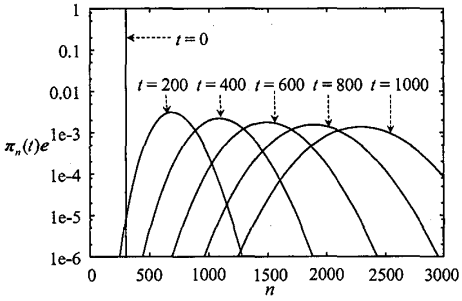

図2 過渡系内客数分布（$\rho/c=2$；$l_0=300$）

4. 数値計算例

以下のような2状態のBMAPを考える．

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-0.4 & 0.1\\ 0.1 & -0.8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}_n=\frac{1}{4r}\left(1-\frac{1}{4r}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.7\end{pmatrix}$$

また，サーバ数 $c=2$，サービス時間 $h=1$ とし，1サーバあたりの利用率は $\rho/c=r$ である．

図1および2はそれぞれ，系内客数過程が零再帰的（$\rho/c=1$），および過渡的（$\rho/c=2$）となる場合の計算結果を示している．図1から，分布の最頻値が初期系内客数からほとんど変化せずに，分布の形状が平らに変化していくことがわかる．一方，図2からは，時刻が進むに従って，系内客数の平均値および最頻値が一定の速度 $\rho-c=2$ で右へ進んでいく様子が観察される．

参考文献

[1] C. D. Crommelin: Delay probability formulae when the holding times are constant. *Post Office Electrical Engineer's Journal*, 25, pp. 41-50, 1932.

[2] K. Daikoku, H. Masuyama, T. Takine and Y. Takahashi: Algorithmic computation of the transient queue length distribution in the BMAP/D/c queue. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 50, pp. 55-72, 2007.

[3] M. F. Neuts: The c-server queue with constant service times and a versatile Markovian arrival process. R. L. Disney, T. J. Ott, eds.: *Proceedings of the Conference on Applied Probability-Computer Science: The Interface*, Vol. I, Boca Raton, FL, pp. 31-70, 1982.