

フルートの運指最適化と逆最適化を用いたパラメータチューニング

澤井 賢一, 黒木 裕介, 松井 知己

本論文では「フルート演奏におけるなめらかな指使い」の探索を支援する手法を提案する。また、奏者に適応した指使いを出力するために、提案する手法のパラメータチューニングを逆最適化を用いて行う方法を提案する。

1. はじめに

フルートは、一つの音に対して複数通りの運指（指使い）があることが多い。それらは音色や音程を調節するために用いる場合と、テンポの速いパッセージで運指を楽にして、演奏を容易にするために用いる場合がある。本論文では、後者の場合（テンポの速いパッセージ）について運指の組合せを最適化する手法を提案する。本論文で対象とするパッセージは、テンポの速い曲中において、長さの短い音符が連続する箇所である（図1に例を挙げる）。テンポが速い曲でも音符の長さが長ければ運指は困難ではないため、対象とするのは高々20音程度のパッセージとなる。また本論文で想定している奏者は、基本となる運指（基本運指）をマスターした中級の奏者であり、習い始めの初心者や、高度な技術を有する職業演奏家などではない。ここで基本運指とは、フルートの各音に対して一つずつ定まっている運指のことであり、それ以外の運指は替え指という。基本運指は音程や音色が良いため、奏者は可能であれば基本運指を用いた方が良く、特に初

心者は基本運指によって演奏する習慣を身に付けるべきとされている。高度な技術を有する演奏家は、自ら運指を工夫するなど独自の演奏を目指すことも多く、本論文で提案するような支援システムは必要としないことが通常である。

以下2節において記号などを定義する。3節では、最適な運指を求める問題を最短路問題に帰着し、動的計画法に基づく解法を提案する。同様のアイデアに基づくモデルは、ギターの運指[1][2]やピアノの運指[3][4][5]に関しても提案されている。筆者らは、「良い運指」とは奏者の技術や経験に依存して異なるものと考えている。そこで4節において、奏者に適応した運指を出力するようにモデルのパラメータチューニングを行う方法を提案する。最短路問題に帰着される運指最適化モデルにおけるパラメータチューニング法は、文献[4]において簡単に議論されている他、隠れマルコフモデルに基づく方法[5]、教師データが最適となるパラメータ値を降下法で求める方法[1]などが提案されている。論文[2]では、複数の奏者による実際の演奏データからパラメータ値の抽出を行っている。本論文で提案する逆最適化問題を用いたパラメータチューニング法のモデルは、論文[1]で提案されているものと非常に良く似ている。しかしながら、

1. 線形計画の相補性条件を用いて逆最適化問題を線形不等式系で表現し、
2. 目的関数として推奨値との1-ノルム最小化を採用する、

というアイデアを用いて、最終的に簡単な線形計画問題を1回解くことでパラメータチューニングを行う方法を提案している。5節では、実例に基づいたモデルの検討を行う。

2. 準備

本論文では音名に英語表記を用いる。すなわち、いわゆる「ド」の音を“C”とし、上に向かって順に“D,

さわい けんいち

東京大学 大学院情報理工学系研究科
〒113-8656 文京区本郷7-3-1

くろき ゆうすけ

東京大学 大学院情報理工学系研究科
(現所属：(株)東芝研究開発センター)

〒212-8582 川崎市幸区小向東芝町1)

まつい ともみ

中央大学 理工学部

〒112-8551 文京区春日1-13-27

受付 06.12.14 採択 07.9.20



図1 最適化の対象とするパッセージの例

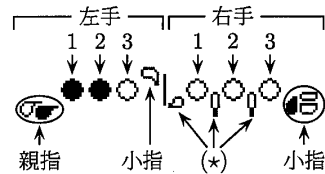


図2 運指図の例

表1 各音に対する運指の種類数

音域	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
4	1	1	1	1	1	1	2	1	1	8	8	3
5	8	15	2	1	2	1	2	2	2	4	6	3
6	6	6	4	9	8	7	9	7	7	3	8	6

E, F, G, A, B”とする。そして、必要に応じて音程を半音変化させる記号 (#またはb) を後につけて音名を表す。オクターブ (音域) の区別は、ピアノの真ん中のCから始まるオクターブを4とし、数字が大きくなるほど高い音域を表すとして、音名の後ろに数字をつけて表す。フルートが通常の演奏で用いる音域はだいたい、C₄ からその3オクターブ上のC₇ までである。

フルートを演奏する際は、楽器の管の側面に開いた穴 (トーンホール) を開け閉めして音程を変えるが、そのときに操作するものを本論文ではキーと呼ぶ。キーは15個 (またはそれ以上) あり、すなわち一つの指に対して複数のキーが対応する場合もある。

各音に対する運指の種類数を表1に示す。種類数は参考文献[6]のWeb Pageを参考にした。しかし、任意の押さえ方に対して何らかの音程の音を発音することは可能であり、また、替え指は独自に考案する人もいたりするため、Web Page[6]に載っているものがすべてではない。そのため、一般の演奏者はすべての替え指を把握しているわけではなく、必要に応じてこのWeb Page[6]のようなものを参照し、場面に合った運指を選択する。使い慣れない運指の場合は、音符を見た瞬間にその運指を押さえられるようになるまでそれなりの練習が必要となる。

本論文では、フルートの運指を図2のように表す。これはフルートのキーを模式的に表したもので、黒塗りが押さええるキー、白抜きが離すキーを示す。真ん中の縦線の左側が左手、右側が右手で操作するキーを表す。数字の1, 2, 3で示されたキーはそれぞれ人差指、中指、薬指で操作し、(*)印のキーは場合によって右手のこの3本の指のどれかでそれぞれ押さええる。他は示した通りで、左親指は二つ、右小指は三つのキー



図3 OFPグラフの例 (太線は最適解, 辺上の数字は距離)

を操作する。右親指はキー操作に用いない。この図は、左手の親指、人差指、中指、および右手の小指でそれぞれ図の黒塗りのキーを押さええる運指を表している。

3. 最適運指問題

ある運指から別の運指に変える際に動かす指は、押さええる、離す、ずらすのいずれかの動作をする。特に「ずらす」とは、あるキーを押さええた状態から、指を上げずにずらして別のキーを押さええることであるが、「押さええる」、「離す」にくらべてかなりやりづらい。また、「押さええる」と「離す」に関しては、「離す」方が若干やりやすい。そこで、「押さええる」、「離す」、「ずらす」のやりにくさをそれぞれ a_1, a_2, a_3 として数値化し、運指 u, v 間の距離を次のように定める:

$$w(u, v) = a_1 n_1(u, v) + a_2 n_2(u, v) + a_3 n_3(u, v). \quad (1)$$

ただし $n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v)$ はそれぞれ、 u から v に変える際に押さええる指、離す指、ずらす指の本数である。運指を最適化したいパッセージに対するすべての運指の組合せの中から、連続する運指間距離の総和が最小になるものを探す問題を最適運指問題と定義する。

上記の最適運指問題は、図3のような有向グラフの最短路問題に帰着され、動的計画法で解くことができ



図4 譜例1

表2 譜例1に対する基本運指, 教則本による運指とモデルの出力した運指

	基本運指	教則本による運指	出力結果
D ₅			
C# ₅			
D ₅			
パス長	1.75	0.75	0.25

る。図3のグラフは、各音に対応する運指を頂点集合とし、隣合う音符に対応する運指間に有向辺をつけたものである。運指 s, t は仮想的な運指で、それぞれパッセージの最初、最後の音符に対する各運指と距離0の辺で結ぶ。また、各辺には演奏するのと同じ方向に向きをつける。このグラフを OFP グラフ (OFP: Optimal Fingering Problem) と呼ぶこととする。図3中では、各音符に対する運指を音符の下に縦に並べて示している。最適運指問題を動的計画法を用いて解く際の計算時間は、(各音に対する運指の種類数を定数とすると) パッセージ中の音符の数 n に対し $O(n)$ である。

このモデルを図4の譜例に適用した結果を表2に示す。ただしここで、式(1)に現れるパラメータの値は $(a_1, a_2, a_3) = (0.15, 0.1, 0.75)$ とした。これは、筆者らの経験に基づいて定めたものである。また、この譜例に対しては、教則本[7]にも載るような一般的な替え指が存在する。その運指も同時に示す。

ここで注意が必要なのは、本節の手法で得られた運指を提示された奏者が、その運指が良いものであるか即座に判断できるとは限らないという点である。例えば奏者にとって未経験の運指であれば、その運指を用いて滑らかに演奏するには(幾分かの)練習が必要であり、その結果初めて運指の「良さ」を比較する(個人的な)基準を得ることができる。

4. 逆最適化を用いたパラメータチューニング

基本運指での演奏に困難を覚えるパッセージに対し、すべての奏者が一致して認める「良い運指」が存在するとは限らないと筆者らは考えている。「良い運指」

とは、奏者の技術や経験に依存して異なるものと考えるのが自然であろう。しかしながら、前節最後に述べたように、提示された運指が「奏者にとって好ましい」ものかを判断することは、奏者にとっても可能とは限らない。そこで本節では、奏者の経験などに基づいて「当該奏者にとって良い運指」を提示する手法を提案する。

前節で提案した最適運指問題で得られる運指は、式(1)のパラメータ値に依存して変化する。以下では、教則本による運指や、特定のパッセージに対してユーザーに練習経験があってやり慣れている運指などを教師運指として用いて、パラメータをチューニングする方法を提案する。具体的には、(複数の) サンプルパッセージに対して「教師運指」が出力されるように式(1)のパラメータを定める問題を逆最適化問題 (inverse optimization problem) として定式化する。逆最適化問題については、論文[8]などを参照されたい。

4.1 逆最適化問題の定式化

本節で提案する逆最適化問題は、教師運指が得られているパッセージから生成される OFP グラフと、教師運指に対応するパス P に対し、 P が最短路となるように式(1)のパラメータ (a_1, a_2, a_3) を定める問題である。まず最初に、OFP グラフ上の最短路問題を線形計画問題として定式化し、その双対問題と相補性条件についてまとめる。教師運指が得られているパッセージから生成される OFP グラフを $G=(V, A)$ とすると、 G 上の最短路問題は線形計画問題として以下のように記述できる：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{a \in A} w(a)x(a) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{a \in \text{Out}(v)} x(a) - \sum_{a \in \text{In}(v)} x(a) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 & (v=s), \\ 0 & (\forall v \in V \setminus \{s, t\}), \\ -1 & (v=t), \end{cases}$$

$$x(a) \geq 0 \quad (\forall a \in A).$$

ここで $w(a)$ は辺 a の距離であり, $v \in V$ に対して $\text{Out}(v)$, $\text{In}(v)$ は, それぞれ v を始点, 終点とする有向辺の集合である. 変数 $x(a) (a \in A)$ は, 最短パスに辺 a が含まれるなら 1, 含まれないならば 0 をとる変数であるが, 非巡回的な有向グラフの最短路問題において, 0-1 変数 $x(a)$ を上記のように非負変数で置き換えても整数最適解を持つことが知られている. この問題に対する双対問題は以下のように書ける:

$$\max_{\pi} \pi(t) - \pi(s)$$

$$\text{s.t. } \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A).$$

最短路問題とその双対問題の (任意の) 最適解のペアを x^* , π^* とすると, 相補性条件

$$\forall (u, v) \in A,$$

$$[x^*(u, v) > 0 \Rightarrow \pi^*(v) - \pi^*(u) = w(u, v)],$$

を満たすことが知られている. 最短路問題の最適解 x^* が整数解であるならば, x^* によって表される最短パスを P^* とし, 相補性条件は

$$\forall (u, v) \in P^*, \pi^*(v) - \pi^*(u) = w(u, v),$$

と書くことができる. また, 上記の相補性条件を満たす最短路問題と双対問題の許容解のペアは, 最適解であることが知られている. 以上より, 与えられたパス P が OFP グラフ上の最短路問題の最適解となる必要十分条件は, 双対問題の許容解が存在して上記の相補性条件を満たすこと, すなわち,

$$\pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A),$$

$$\pi(v) - \pi(u) = w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P),$$

を満たす π が存在することである.

本節で提案する逆最適化問題の目的関数は, 求めるパラメータ $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ があらかじめ与えた推奨値 $\bar{\alpha} := (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ と大きくずれないように, 差ベクトル $\alpha - \bar{\alpha}$ の 1-ノルムの最小化とする. 1-ノルムの最小化問題を線形目的関数最小化に帰着することにより, 本節で提案する逆最適化問題は以下のように定式化できる:

$$\min. \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\text{s.t. } \pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A),$$

$$\pi(v) - \pi(u) \leq w(u, v) \quad (\forall (u, v) \in P),$$

$$w(u, v) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i n_i(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A),$$

$$-\beta_i \leq \alpha_i - \bar{\alpha}_i \leq \beta_i \quad (i \in \{1, 2, 3\}).$$

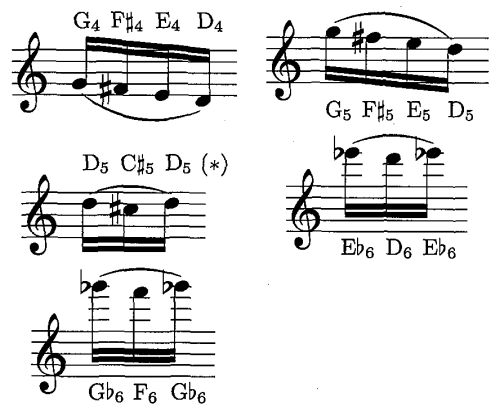


図5 教師運指が用いられるパッセージ

上記の問題の変数は $\pi(\cdot)$, $w(\cdot, \cdot)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ であり, グラフ G とパス P およびパラメータ推奨値 $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ と値 $n_i(\cdot, \cdot)$ は問題の入力として与えられるデータである.

5. 数値例とモデルの改善

本節では, 教則本[7]で教える替え指のうち, 図5に示すパッセージに対する運指を教師運指として, 前節で提案した逆最適化問題を解き, 考察を与える.

5.1 モデルの改善

図5中 (*) のパッセージに対する教師運指を, 表2の「教則本による運指」として示した. 残念ながら表2の教師運指は, 任意の正值のパラメータ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ に対して最適運指になりえない (なぜならば, OFP グラフにおけるこの教師運指のパス長は $3\alpha_1 + 3\alpha_2$ であるが, 表2にある「出力結果」のパス長は $\alpha_1 + \alpha_2$ となり, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0, 3\alpha_1 + 3\alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ が成り立つ). 表2の教則本による運指は典型的な替え指であり, これが結果として得られないのはモデルの大きな欠点と思われる. そこで本論文では, 新たなパラメータを三つ導入し, モデルの改訂版の提案を行う.

以下では, 運指間距離の式(1)を次の式

$$w(u, v) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i n_i(u, v) \quad (\forall (u, v) \in A), \quad (2)$$

で置き換える. ただし, 新たに導入した値 n_4, n_5, n_6 の意味は次の通りである:

$n_4(u, v) \in \{0, 1\}$: 運指 u, v 間がクロスフィンガリングならば 1, クロスフィンガリングでないならば 0 をとる. クロスフィンガリングとは, u から v に変える際に押さえる指, 離す指, ずらす指の三種類の動作のうち二種類以上があることをいい, 動作が一種類である方が一般にやりやすいとされ

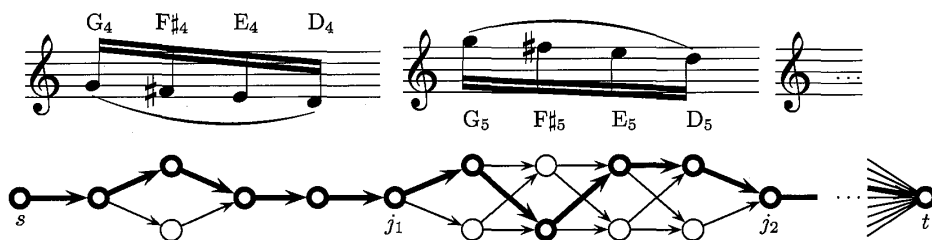


図6 図5に対するIOFPグラフ(太線は教師運指)

表3 逆最適化問題を解いて得られたパラメータ値

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
推奨値	0.15	0.1	0.75	0.8	0.3	0.1
結果	0.2	0.1	0.75	0.8	0.3	0.3

る。例えば表2にある、図4の譜例に対する基本運指はクロスフィンガリングが連続している。

$n_5(u, v) \in \{0, 1\}$: 運指 v において、歌口から見て最初に開いているトーンホールが、基本運指のそれと同じならば0、違うならば1をとる。このトーンホールが開いてるかどうかは発音する音に大きく影響するため、これが基本運指の場合と同じであれば、基本運指と同様に発音しやすいと思われる。

$n_6(u, v)$: 運指 v の、基本運指と押さえ方の違う指の数。基本運指と押さえ方が似ている方が発音しやすいと思われる。

値 $n_5(u, v)$, $n_6(u, v)$ は、正確には運指 u , v 間に定められるものではなく、運指 v によってのみ定まる。すなわち、運指間の性質ではなく、運指そのものの良し悪しを表しており、基本運指に近い運指が最適解として選ばれやすくするためのものである。

5.2. 数値例

以下では、図5の五つのパッセージに対する逆最適化問題を解いた結果を報告する。まず図6のようなグラフを構築する。これは、各パッセージに対するOFPグラフの間に仮想的な運指 j_i を配置してつなげたものである。運指 j_i は s , t と同様、任意の運指との距離が0であるとする。このグラフを、図5のパッセージに対するIOFPグラフ(IOFP: Inverse of OFP)と呼ぶ。IOFPグラフを用いることで、複数のパッセージに対して教師運指を出力する共通パラメータを求めることができる。

実際に逆最適化問題を解いた結果を表3に示す。クロスフィンガリング(α_4)とずらす指の本数(α_3)に対して大きめの推奨値を与えたが、これが妥当であったことが分かる。しかし、押さえる指の本数(α_1)と基

本運指との類似度(α_6)については、予想より強い影響を与えるパラメータ値が選ばれていることが分かる。

この結果を用いて図7から図10の譜例に対する最適運指問題を解いた結果を、表4から表7に示す。表4では、基本運指の出現回数等は変わらないが、教師運指として用いた表2の「教則本による運指」が、5節のモデルの最適運指として得られている。表5では、クロスフィンガリングが減り、基本運指の出現回数が4から7に増えている。表6の例では、基本運指の出現回数が0から2に増え、さらに基本運指でないが、最初に開くトーンホールが基本運指と同じものも一つ増えている。表7では、クロスフィンガリングが減り、基本運指の出現回数も増え、より望ましい運指が得られていることが分かる。

6. まとめと今後の課題

本論文ではフルートの運指の最適化を、二つの運指間のやりにくさを距離として定めることで最短路問題に帰着して行った。また、距離の計算に用いるパラメータを決定するために、その最短路問題の逆最適化問題を用いた。

本論文では最適運指一つを出力しているが、第 k 最短路を求める解法を用いて、第2, 第3の代替案を出力することも可能である。逆最適化問題の目的関数として、パラメータ推奨値との1-ノルム最小化を用いたが、これによって線形計画問題を1回解くだけでパラメータチューニングが可能となった。推奨値との2-ノルムの最小化を用いた場合、得られる問題は凸2次計画となり、これも多項式時間で解くことができる。逆最適化問題が線形不等式系制約として記述できることから、推奨値をゴールとした目標計画法(goal programming)の諸手法を用いることも容易と思われる。

また本論文では、運指列の評価を、連続する二つの運指間の距離の総和として捉えており、2音前や3音前の履歴を考慮しないシンプルなモデルを提案してい



図7 譜例1 (再掲)

表4 譜例1に対するモデルの比較

	基本運指	3節のモデル	5節のモデル
D ₅			
C# ₅			
D ₅			
3節のモデルでの道のり	1.75	0.25	0.75
5節のモデルでの道のり	3.7	2.4	2.1
クロスフィンガリングの回数	2	0	0
最初に開くトーンホールが基本運指と同じものの数	3	3	3
基本運指の出現回数	3	2	2



図8 譜例2 (Armenian Dances Part I/Alfred Reed より)

表5 譜例2に対するモデルの比較

	基本運指	3節のモデル	5節のモデル
D ₆			
C# ₆			
D ₆			
E ₆			
F ₆			
E ₆			
D ₆			
C# ₆			
D ₆			
3節のモデルでの道のり	3.25	1.25	2.75
5節のモデルでの道のり	7.1	7.3	4.5
クロスフィンガリングの回数	4	2	0
最初に開くトーンホールが基本運指と同じものの数	9	9	7
基本運指の出現回数	9	4*	7

* 表中の3節による運指において、D₆の運指は左親指の押さえるキーが基本運指と異なるが、この場合は左親指の二つのキーはどちらを押さえても閉じるトーンホールが変わらない。そのため、この運指も基本運指とみなされている。



図9 譜例3 (“The Firebird” 1919/I. Stravinsky (arr. R. Earls, F. Fennell) より)

表6 譜例3に対するモデルの比較

	基本運指	3節のモデル	5節のモデル
D ₆			
F# ₆			
G# ₆			
A# ₆			
3節のモデルでの道のり	1.85	0.55	1.25
5節のモデルでの道のり	4.6	3.9	3.3
クロスフィンガリングの回数	3	0	0
最初に開くトーンホールが基本運指と同じものの数	4	2	3
基本運指の出現回数	4	0	2



図10 譜例4 (“The Firebird” 1919/I. Stravinsky (arr. R. Earls, F. Fennell) より)

表7 譜例4に対するモデルの比較

	基本運指	3節のモデル	5節のモデル
D# ₆			
A ₆			
F ₆			
D ₆			
A ₆			
F ₆			
C# ₆			
3節のモデルでの道のり	2.3	1.6	2.05
5節のモデルでの道のり	5.8	6.1	4.3
クロスフィンガリングの回数	4	2	1
最初に開くトーンホールが基本運指と同じものの数	7	4	5
基本運指の出現回数	7	3*	5

* 表中の3節による運指において、A₆の運指は左親指の押さえるキーが基本運指と異なるが、この場合は左親指の二つのキーはどちらを押さえても閉じるトーンホールが変わらない。そのため、この運指も基本運指とみなされている。

参考文献

る。しかしながら、履歴を考慮したモデルは、連続する N 音の可能な運指の組を一つの頂点とするグラフを構築することで可能となる[9]。履歴として考慮すべきは、高々2音または3音程度と予想されるので、得られるグラフのサイズはさほど大きいものではなく、我々の提案する運指最適化および逆最適化の手法は、現在の計算機ならば（高々20音程度のパッセージならば）問題なく対応できる。ただしこのモデルを用いる場合、「連続する2音（3音）の運指」間の距離を新たに議論する必要がある。

今後の課題として考えられるのは、運指間の距離を定める式(2)の改善である。教則本[7]で教える替え指のうち、本論文で扱わなかったもののいくつかを教師運指としたとき、5節で述べたように、逆最適化問題が解を持たない場合がある。また、発音しやすさを考慮するために数値 n_5 , n_6 を導入したが、この妥当性については検証が必要である。さらに、より直接的に発音のしやすさを反映するために、音響インピーダンスを用いることが考えられる[10]。管楽器の正確な演奏には、運指の他に息のコントロールも重要な要素となるので、その点をより積極的にモデルに組み込む必要がある。

本論文で提案した最適化手法は、JAVA アプレットを用いて実装した。作成したアプレットは次の Web Page において利用することができる：

<http://www.sat.t.u-tokyo.ac.jp/~ken1/>
興味を持たれた方やフルート奏者に利用していただき、今回提案したモデルに対するご意見などをいただければ幸いです。

- [1] A. Radisavljevic and P. F. Driessen: Path Difference Learning for Guitar Fingering Problem, In Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC), Miami, Florida, November 1-6, 2004.
- [2] 澤山康二, 江村伯夫, 三浦雅展, 柳田益造: ギターにおけるコード列演奏の最適化に関する手法, 情報処理学会研究報告, 音楽情報科学, 2004-MUS-111, pp. 83-88, 2004.
- [3] M. Hart, R. Bosch, and E. Tsai: Finding Optimal Piano Fingerings, The UMAP Journal, Vol. 21, pp. 167-177, 2000.
- [4] A. A. Kasimi, E. Nichols, and C. Raphael: Automatic Fingering System (AFS), poster presentation at ISMIR, 2005.
- [5] 米林裕一郎, 亀岡弘和, 嵯峨山茂樹: 隠れマルコフモデルに基づくピアノ運指の自動決定, 情報処理学会研究報告, 音楽情報科学, 2006-MUS-065, pp. 7-12, 2006.
- [6] T. Reichard: The Woodwind Fingering Guide, Web Page, <http://www.wfg.woodwind.org/>, 2006.
- [7] 比田井洵 (編著): アルテ・フルート教則本 2, 日本フルートクラブ出版, 東京, 1961.
- [8] R. K. Ahuja and J. B. Orlin: Inverse Optimization, Operations Research, Vol. 49, pp. 771-783, 2001.
- [9] 澤井賢一: 管楽器の運指のモデル化とその最適化に関する研究, 東京大学工学部計数工学科卒業論文, 2006.
- [10] A. Botros, J. Smith, and J. Wolfe: The Virtual Boehm Flute—A Web Service that Predicts Multiphonics, Microtones and Alternative Fingerings, Acoustics Australia, Vol. 30, pp. 61-65, 2002.