

# 連続最適化における未解決問題

村松 正和

連続最適化の理論的研究における未解決問題を、特に、線形計画、錐線形計画、多項式計画、2次計画の各テーマに絞って紹介する。

キーワード：連続最適化、線形計画、錐線形計画、多項式計画、2次計画、未解決問題

## 1. はじめに

「連続最適化における未解決問題」について書くよう頼まれたとき、それは難しい、と正直思った。連続最適化は（私のイメージでは）一つの分野でなく、多岐にわたる分野の集合体（寄せ集め）である。内点法のように「基本的に解ける問題」を扱っている人たちと大域的最適化のように「容易に解けない問題」を扱っている人たちとではずいぶん感覚が異なる。また、アルゴリズムや理論を考える人、実装や数値計算上の問題を考える人、応用で具体的な問題を解く人など、それぞれに興味も研究の方向性も異なる。誰もが認める「未解決問題」など、教科書にも載っているようなLPに関する基本的な未解決問題を除けば、ほとんどないのが実情と思われる。

オペレーションズ・リサーチ学会の研究部会「計算と最適化」<sup>1</sup>の主査をやっている関係上、引き受けざるを得なくなってしまったが、そういう事情があるので、あらかじめ注意しておきたい。それは、ここで紹介する未解決問題は分野が偏っている、ということである。つまり、私自身の専門である線形計画(LP)、半正定値計画(SDP)、内点法、多項式計画に関連する問題がほとんどである。いくつか[5]から、凸解析に関する未解決問題も取っているが、これも上記の分野に絡んでいて面白いと思ったもののみであり、古典的な非線形計画の分野の未解決問題は紹介していないし、具体的な応用に関する話題も皆無である。けしからん話であるが、ひとえに私のこの分野への全体的な知識や理解が不足していることが原因である。了解の

上、読まれたい。

なお、研究部会「計算と最適化」は上記分野に限らず、広く離散最適化や連続最適化の、理論や応用に関して講演をお願いしているものである。誤解されないでいただきたい。

この文章の構成は以下のようになっている。

まず2節で線形計画(LP)に関する未解決問題を取り上げる。最初の稿では、実はHirsch予想も取り上げていたのだが、これは離散最適化に関する未解決問題として、藤重先生[4]が既に取り上げられているので省略した。Hirsch予想が重要な未解決問題であることは間違いない。LPの強多項式性などは、連続最適化の問題であるという意識が強いので、再掲となるが提示させていただいた。また、ここでSDPやその他の錐線形計画に関する未解決問題も提示している。

3節は多項式最適化問題に関する話題である。多項式最適化問題は、近年SDPによる解法が注目を集めている。数学的に非常に難しいところがあるが、それだけに証明できればすばらしい、ということも多い。腕に自信のある方はチャレンジされてはいかがだろうか。

4節は非凸2次計画に関する話題である。このテーマは、やはり近年の内点法やSDPの発展と切り離しては考えられないもので、現在ではなぜか凸解析の主要な問題と考えられている。なお、前節の未解決問題9と、この節の未解決問題は最近出た論文[5]に記されていた公開未解決問題である。この論文はほかにもたくさん連続最適化に関する未解決問題が提示されており、興味のある方には一読を勧める。

## 2. LP に関する未解決問題

### 2.1 LP の強多項式性

線形計画問題 (LP) は線形制約のもとで線形関数を最大化・最小化するという最も基本的な連続最適化問題である。等式標準形の LP は  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  を用いて

$$\text{最小化 } c^T x \text{ 条件 } Ax = b, x \geq 0$$

と表される。1979 年に Khachiyan[7] が LP が橿円体法を用いて多項式時間で解けることを証明した。その後、Karmarkar[6] が多項式時間で解ける内点法を提案し、その改良版が現在の LP の解法の主流を占めている。

ここでいう多項式時間とは、変数の数  $n$ 、制約の数  $m$  および入力データ ( $A, b, c$ ) を表現するために必要なビット長

$$L = \sum_{i,j} \log_2(1+|A_{ij}|) + \sum_i \log_2(1+|b_i|) + \sum_j \log_2(1+|c_j|) + nm + n + m.$$

の多項式となることを指している。これにくらべ、 $n, m$  のみに依存するアルゴリズムを強多項式時間アルゴリズムという。

未解決問題 1：LP の最適解を強多項式時間で求めるアルゴリズムは存在するか。

### 2.2 単体法に関する未解決問題

LP の実行可能集合は凸多面体になる。単体法([3]) は、この凸多面体の端点を巡って最適解へ至るアルゴリズムである。ある端点から次の端点に移ることをピボット操作と呼ぶ。次の端点の選び方をピボット選択ルールと呼ぶ。ピボット選択ルールが変わると、一般に単体法の挙動は変わる。

現在知られているピボット選択ルールの中で、多項式時間で収束することが証明されているものはない。逆に、ほとんどのピボット選択ルールに対し、アルゴリズムが停止するまでに指数時間かかる例が報告されている。

未解決問題 2：多項式時間で収束する単体法のピボット選択ルールを構成する。

もし  $n-m$  以下のピボット操作で単体法が収束することがいえれば、自然に Hirsch 予想が証明されることになる。逆に Hirsch 予想が正しければ、 $n-m$  以下の反復回数で収束するピボット選択ルールが存在してもおかしくない。そうすれば、1 回のピボット操作は強多項式時間で終了するので、(ピボット選択ル

ールが強多項式時間アルゴリズムならば) LP の強多項式性がいえる。

### 2.3 内点法に関する未解決問題

Karmarkar[6] によって提案された LP に対する多項式時間アルゴリズムである内点法は、当初反復回数のバウンドが  $O(nL)$  であった。現在ではアルゴリズムも改良され、バウンドは (主双対内点法も主内点法も)  $O(\sqrt{n}L)$  まで改善されている。これを減らす努力はいろいろ行われているが、本質的にこのバウンドを超えるものは出ていない。

未解決問題 3：LP に対する内点法の反復回数のバウンドを  $O(\sqrt{n}L)$  よりも良くすることはできるか？

また、少し別の角度からの議論として、 $L$  の代わりに「係数行列のみに依存する定数」によって押さえられる方法が提案されている。すなわち、目的関数  $c$  や右辺値  $b$  よらないことである。これが言えると、例えば最小費用流問題などが内点法により強多項式時間で解けることになる。

実は、そのような「内点法」は既に知られている。Vavasys-Ye による層別最小 2 乗法による内点法アルゴリズムがそれである。しかし、このアルゴリズムはたいへん複雑なもので、提案以来 10 年以上を経過するがいまだに実装されたという話は聞かない。また、アルゴリズムが問題のスケーリングに影響を受けるので、「きれいな」内点法とはいえない。(美意識の問題かもしれないが、内点法の研究者は一般にアルゴリズムのスケーリングに対する不变性を重要視する。この性質がないと、例えば長さを cm で測るか m で測るかによって、アルゴリズムの挙動が変わるわけで、そのようなアルゴリズムは「きれいではない」ということになっている。) そこで次の問題を考えられる。

未解決問題 4：通常の（スケーリング不变な）内点法で実行時間が係数行列のみに依存する多項式で押さえられることははあるか。

現在までのところ、LP の実行可能領域に関する緩やかな仮定のもとで、 $A$  と  $b$  のみ、または  $A$  と  $c$  のみに依存する内点法アルゴリズムが存在することが知られている。 $b$  と  $c$  両方の影響を同時に排除することはまだできていない。

### 2.4 SDP に対する内点法の反復回数

半正定値計画 (SDP) とは、ベクトル変数に関する最適化問題である LP を、対称行列の空間へ拡張した次のような最適化問題である：

$$\begin{cases} \text{最小化} & C \bullet X \\ \text{条件} & A_i \bullet X = b_i (i=1, \dots, m) \\ & X \text{は半正定値.} \end{cases}$$

ここで  $C, X, A_i (i=1, \dots, m)$  はすべて  $n \times n$  対称行列であり、対称行列  $U, V$  に対する演算  $\bullet$  は次で定義される：

$$U \bullet V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} V_{ij}.$$

これは錐線形計画（文献[9]参照）の一例となっている。

SDP の場合、データが整数であっても解が無理数になる問題があるので、計算機で厳密に解くことを考えてあまり意味がない。普通は誤差  $\epsilon$  以内の解を求めるのにかかる計算時間が多項式時間で求まるこをもって、多項式時間アルゴリズムと呼んでいる。

SDP に対する内点法の反復回数は、 $O(\sqrt{n} \log(1/\epsilon))$  であることが知られている（[10]）。

**未解決問題5：** SDP に対する内点法の反復回数のバウンドを  $O(\sqrt{n} \log(1/\epsilon))$  より改善することはできるか？

## 2.5 Copositive Programming に関する未解決問題

対称行列  $X$  が copositive であるとは、次が成り立つことをいう：

$$\forall x \geq 0, x^T X x \geq 0.$$

$x$  の非負性を除けば、この定義は半正定値性そのものである。よって、半正定値行列は copositive であるが、その逆は一般に正しくない。 $n \times n$  copositive 行列の集合を  $COP(n)$  と書けば、 $COP(n)$  は閉凸錐となるから、錐線形計画問題

$$\begin{cases} \text{最小化} & C \bullet X \\ \text{条件} & A_i \bullet X = b_i (i=1, \dots, m) \\ & X \in COP(n) \end{cases}$$

を考えることができる。双対問題は

$$\begin{cases} \text{最大化} & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{条件} & S + \sum_{i=1}^m y_i A_i = C \\ & S \in COP(n)^* \end{cases}$$

である。ここで  $COP(n)^*$  は  $COP(n)$  の双対錐で、completely positive と呼ばれる行列の集合である（[2]）。対称行列  $S$  が completely positive とは、要素がすべて非負の（必ずしも正方ではない）行列  $V$  を用いて  $S = VV^T$  と分解できることである。これらの問題は、非凸 2 次計画に重要な応用を持つ。

$COP(n)$  が自己双対ではないので、（LP や SDP を

含む）対称錐線形計画に対して成り立っていたような主双対内点法に関する解析が、そのままではうまく働かない。Nesterov と Nemirovski による主内点法[10]ならば、self-concordant バリア関数がわかれば、理論的にはバリアパラメータの多項式時間で動くはずである。しかし、そのような内点法が開発されたという話は聞かない。

**未解決問題6：** Copositive programming に対する主内点法または主双対内点法を構築する。

実は、与えられた対称行列が copositive でないことを示す問題は NP 完全問題であることが知られており、この問題に対する効率的な算法は存在しない可能性が強い。しかしながら、この問題や、対応する内点法は興味深い研究対象と思われる。

また、completely positive 行列については、それがどのくらいの大きさの  $V$  で展開できるか、が基本的な興味となっている。具体的には  $n \times n$  completely positive 行列  $X$  が与えられたとき、それを非負行列  $V \in \mathbb{R}^{n \times k}$  を用いて  $X = VV^T$  と分解するとき、 $k$  の最小値を  $X$  の cp-rank と呼ぶ。次の予想は Drew, Johnson, Loewy らによって提案されたもので、DJL 予想と呼ばれる（[2]）。

**未解決問題7：** (DJL 予想)  $n \geq 4$  のとき  $X$  の cp-rank は  $n^2/4$  以下になる。

現在までに知られている結果としては cp-rank は  $n(n+1)/2 - 1$  以下であること、および  $n=3$  および  $n=4$  のときには cp-rank は  $n$  以下であること、である。

## 3. 多項式最適化問題に関する未解決問題

多項式  $g_1, \dots, g_m$  によって定義される領域

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0\}$$

を考える。S 上での多項式  $f$  の最適化問題

$$\text{最小化 } f(x) \text{ 条件 } x \in S$$

を多項式最適化問題 (Polynomial Optimization Problem; POP) という。今、S がコンパクトと仮定し、POP の最適値を

$$\xi^* = \min\{f(x) | x \in S\}$$

とする。このとき、ある緩やかな条件のもとで、次の性質を持つ SDP の列  $\{P_r\}$  ( $r$  は正整数) を構成できることが知られている： $P_r$  の最適値を  $\zeta_r$  とすれば

$$\zeta_r \leq \zeta_{r+1} \leq \xi^* (\forall r) \text{かつ } \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta_r = \xi^*$$

が成り立つ。このような SDP を次々と解いていき、

POP の最適解を求めることが近年行われるようになってきている。多くの計算機実験では、 $r$  がきわめて小さい場合に最適解が得られることが示唆されている。当然、次の疑問がわく。

**未解決問題 8 :**  $\xi^* - \xi_r < \epsilon$  となる  $r$  の上界を  $n, m$  (および他の定数) の多項式として記述せよ。

多項式最適化問題の実行可能領域  $S$  は、せいぜい  $\frac{n(n+1)}{2}$  個の多項式  $h_1, \dots, h_{n(n+1)/2}$  を用いて

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \dots, h_{n(n+1)/2}(x) \geq 0\}$$

と表現することができることが知られている。これは、 $m$  が多く  $n$  が小さいときには、有効に多項式の数を減らす方法となる。残念ながら上記の証明は、存在証明であり、 $g_1, \dots, g_m$  から  $h_1, \dots, h_{n(n+1)/2}$  を構成する方法は知られていない。

**未解決問題 9 :**  $g_1, \dots, g_m$  から  $h_1, \dots, h_{n(n+1)/2}$  を作る構成的な方法を見出せ。

なお、 $g_1, \dots, g_m$  が線形関数の場合 ( $S$  が多面体の場合) に関しては、文献[1]が、構成すべき関数の数が  $2n$  でよいことを示し、またその構成的な方法を提案している。

また、 $n(n+1)/2$  という数字は、SDP の行列に含まれる変数の数であり、何らかの関係があるかもしれない。これを明らかにすることはきわめて興味深い問題である。

さて、次に SDP の表現能力に関する命題を考えよう。 $S$  が閉凸かつ有界であり、内点  $(g_i(\tilde{x}) > 0 \ (i=1, \dots, m))$  なる点) が存在すると仮定する。このとき、 $S$  自体は半正定値制約で表すことができない場合があることが知られている。しかし、 $S$  をより高い次元に埋め込んだ場合に SDP 制約で表すことができるか否かについてはよくわかっていない。すなわち、次の未解決問題である。

**未解決問題 10 :**  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  が与えられたとき、SDP で表現される。 $\tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^{n+N}$  で、 $\mathbb{R}^n$  への射影が  $S$  となるものがあるか。

## 4. 凸解析に関する未解決問題

### 4.1 有界凸集合の体積とその極の体積の積に関する問題

原点に関して対称で、原点を内部に含む有界閉凸集合の族を  $C_0$  とする。 $K \in C_0$  に対し、 $K$  の極

$$K^o = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq 1 \ (\forall x \in K)\}$$

も  $C_0$  に属している。1939 年に Mahler は、次の予想

を提出した：

$$V_n^2 \geq \text{Vol}(K) \text{Vol}(K^o) \geq 4^n / n!,$$

ただし、 $V_n$  は  $n$  次元単位球の体積  $\pi^{n/2} / \Gamma(d/2 + 1)$  である。この予想のうち、左の不等式は既に証明されている。

**未解決問題 11 :** Mahler 予想の右辺を証明せよ。

今までに、次のことはわかっている[2]：ある  $c > 0$  が存在して

$$\text{Vol}(K) \text{Vol}(K^o) \geq c^n / n!.$$

すなわち、 $c = 4$  であることを示せば良いのであるが…

### 4.2 二つの凸 2 次関数の積の Fenchel-Legendre 変換

$n \times n$  対称正定値行列  $A$  に対し、その 2 次形式  $q_A(x) = \frac{1}{2} x^T A x$  を考える。 $q_A$  は狭義凸 2 次関数であり、その Fenchel-Legendre 変換は  $q_A^*(s) = \frac{1}{2} s^T A^{-1} s$  となる。

さて、2 つの対称正定値行列  $A, B$  に対し、 $f(x) = q_A(x) q_B(x)$  とし、その Fenchel-Legendre 変換  $f^*$  を考える。特に  $B = A^{-1}$  の場合は、 $f$  の Fenchel-Legendre 変換は次の Kantorovich の不等式を導くことが知られている：

$$\|x\|^4 \leq x^T A x x^T A^{-1} x \leq \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \right)^2 \|x\|^4.$$

ここで  $\lambda_1$  は  $A$  の最大固有値、 $\lambda_n$  は  $A$  の最小固有値である。

**未解決問題 12 :**  $f(x) = q_A(x) q_B(x)$  の Fenchel-Legendre 変換の「使える」表現を求め、それが導く不等式を求めよ。

ここで「使える」というのは、要するに Fenchel-Legendre 変換の定義のようなものではダメだということである。「使える」表現ならば、有用な不等式を導きだすものと期待されている。

### 4.3 合同変換による対称行列の同時対角化

$n \times n$  対称行列  $A_1, \dots, A_m$  が与えられたとき、ある正則行列  $P$  が存在して  $PA_i P^T (i=1, \dots, m)$  が対角行列となるとき、これらの対称行列は合同変換により同時対角化可能である、と呼ばれる。この同時対角化が可能なとき、2 次形式は変数変換によりある変数の自乗の形に分解できることになる。

例えば、 $m=2, n \geq 3$  の場合には、もし

$$x^T A_1 x = 0 \text{かつ } x^T A_2 x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (1)$$

が成り立つならば、 $A_1$  と  $A_2$  は合同変換により同時

対角化可能であることが知られている。(1)は次と同値であることが知られている:

$$\exists \mu_1, \mu_2 \text{ s.t. } \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 > O. \quad (2)$$

未解決問題 13:  $m \geq 3$  の場合に合同変換により同時対角化可能であるための「使える」表現を求めよ。

ここで(2)を  $m \geq 3$  に拡張したもの

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_m \text{ s.t. } \mu_1 A_1 + \dots + \mu_m A_m > O$$

は

$$x^T A_i x = 0 (\forall i=1, \dots, m) \Rightarrow x = 0 \quad (3)$$

の十分条件であるが、必要条件ではない。

未解決問題 14: (3)のより適切な十分条件、できれば計算可能な必要十分条件を見出せ。

## 5. おわりに

締め切りを 2 週間も過ぎ、編集者に迷惑をかけながらなんとか書くには書いたが、今回の原稿にはなんとなく後味の悪さを感じる。その主な理由の一つは、こういう問題を書くときには、「自分には未解決だけれども、既に誰かが解いている」という可能性を否定しきれないことがあると思う。もしみなさんの中に、これらの問題は既に解かれていることを知っている、あるいは有力な研究が行われていることを知っている、という方がおられたら、是非とも私までお伝え願いたい。

## 参考文献

- [1] H. Bosse, M. Grötschel, and M. Henk: *Polynomial*

*inequalities representing polyhedra*, Mathematical Programming Series A, 103, 35-44 (2005).

- [2] A. Berman, and N. Shaked-Monderer: *Completely Positive Matrices*, World Scientific, 2007.
- [3] G. B. Dantzig: Linear programming and Extensions, Princeton University Press (1963).
- [4] 藤重悟: 離散最適化における未解決問題、オペレーションズ・リサーチ, 53, 5-9 (2008).
- [5] J.-B. Hiriart-Urruty: *Potpourri of Conjectures and Open Questions in Nonlinear Analysis and Optimization*, SIAM Review, 49, 255-273 (2007).
- [6] N. Karmarkar: A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica, 4, 373-395 (1984).
- [7] L. Khachian: A polynomial time algorithm for linear programming, Doklady Akademii Nauk SSSR 244, 1093-1096 (1979).
- [8] 村松正和: 半正定値計画と内点法, オペレーションズ・リサーチ, 52, 513-518 (2007).
- [9] 田村明久, 村松正和: 最適化法, 共立出版 (2002).
- [10] Y. Nesterov, and A. Nemirovski: *Interior-point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [11] J. Renegar: A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming, Mathematical Programming, 40, 59-93 (1988).