待ち行列のバケーションモデルの確率的分解定理

山下　英明

1. はじめに

待ち行列システムにおいて，客がいてもいなくてもサーバがサービスを行わない期間をサーバのバケーション（vacation）とよび，バケーションを伴う待ち行列モデルを待ち行列のバケーションモデルという．サーバの故障や予定された保守などによるサーバの休止は，バケーションとしてモデル化できるが，道路の交差点やトークンリングLANなどのように，複数の客の集合が1つのサーバを時間分割で共有するシステムもバケーションモデルによって表現できる．

待ち行列のバケーションモデルでは，サーバは客がいれば稼働できる稼働可能期間とバケーション期間を交互に繰り返す．したがって，バケーション期間を開始する条件によって，次のような基本モデルがある．

全処理式（exhaustive service）待ち行列の客がいなくなると，すぐにサーバはバケーションをとる．

ゲート式（gated service）直前のバケーション終了時点に待機中の客をサービスし終わると，サーバはバケーションをとる（このサービス中に到着した客は，次のバケーション後にサービスする）．

制限式（limited service）待ち行列の客がいなくなるか，またはある定められた人数をサービスすると，サーバはバケーションをとる．

また，バケーション期間を終了する条件には，

多重バケーション（multiple-vacation）サーバがバケーションから帰ってきたとき，待機中の客がいなければ再度バケーションをとる．

単一バケーション（single vacation）サーバがバケーションから帰ってきたとき，待機中の客がいなくてもバケーションは終了し，サーバはいつでもサービスできる状態で待つ．

などがある．バケーションモデルについての詳細は，文献[1]を参照されたい．

客の到着がポワソン分布に従い，サービス時間が独立で同一の任意の分布に従うM/G/1待ち行列のバケーションモデルでは，ある条件の下で，平衡状態の系内人数分布がもとのモデルに対応するバケーションのないM/G/1モデルの系内人数分布と，バケーション期間にのみ依存する系内人数分布の畳み込みに分割できる．このような性質を示したものを総称して，確率的分解定理という．本稿では，M/G/1待ち行列のバケーションモデルに対して，まず系内人数分布の確率的分解定理が成り立つ理由を図を使って解説し，次に同様な考え方を用いると残余仕事量についても確率的分解定理が成り立つことを示す．

2. 系内人数分布の確率的分解定理

本節では系内人数分布の確率的分解定理について説明するが，その準備としてまずポワソン到着を仮定すると，平衡状態においては任意時点の系内人数分布が客の退去直後の系内人数分布に等しいことを示す．

（補題1）客の到着過程がポワソン分布に従うとき，客の到着直前の系内人数の定常分布は，任意時点の系内人数の定常分布に等しい．

この性質は，PASTA（Poisson Arrivals See Time Average）と呼ばれている．PASTAの証明は文献[2]などにあるが，ポワソン到着においては，それまでの到着の発生に関係なく，次の瞬間Δt時間に到着が発生する確率がいつも同じであることを考えると，直感的に理解できる．PASTAは残余仕事量などの他の評価尺度についても成り立つ．

（補題2）単一到着，単一サービスシステムにおいて，客の到着直前の系内人数の定常分布は，客の退去直後の系内人数の定常分布に等しい．

やました　ひであき
首都大学東京 経営学系
〒192-0397 八王子市南大沢1-1

この補題を説明するために，図1のような系内人数の時間的変化を考える．定常状態が存在するモデルでは，有限時間の間に系内客数が0になることに注意する．このとき，①の到着直前と①の退去直後の系内人数は共に0であり，同様にみると①の到着客と①の退去客，②の到着客と②の退去客のように，到着直前の系内人数と退去直前の系内人数が同じになるような到着客と退去客を1対1に対応付けることができる．したがって，客の到着直前の系内人数と客の退去直前の系内人数は同じ定常分布をもつことがいえる．補題1，補題2より，直ちに次の定理が成り立つ．

(定理1) 客の到着過程がポワソン分布に従う単一到着，単一サービスシステムにおいて，客の退去直後前の系内人数の定常分布は，任意時点の系内人数の定常分布に等しい．

したがって，以後この節では任意時点の系内人数の代わりに，客の退去直後の系内人数を用いて議論を進める．ここで，待ち行列のバケーションモデルにおいて，以下のような仮定を行う．

仮定1　客の到着はポワソン仮定に従う．

仮定2　サービス時間は互いに独立で同一な分布に従い，到着過程やそのサービス時間以前のバケーション時間と独立である．

仮定3　システムの定常状態を仮定し，客のサービスはすべて処理されるものとする．

仮定4　サービス順序はサービス時間に影響されない規律に従い，サービス中は他の客に割り込みを受けない（先着順サービス，後着順サービス，ランダム順サービス等はこの仮定を満たす）．

待ち行列のバケーションモデルが仮定1～仮定4を満たすとき，系内人数分布について次の確率的分解定理が成り立つ．

(定理2) [系内人数分布の確率的分解定理] バケーションモデルにおいて，X を退去客の退去直後の系内人数，V をバケーション中の任意時点における系内人数，X_1 をこのモデルに対応するバケーションのないM/G/1モデルの退去客の退去直後の系内人数とするとき，

$$X \equiv V + X_1$$

が成り立つ．ただし，≡は分布の意味で等しいことを表す．

この定理が成り立つ理由を図解するために，割り込みのない後着順サービスを仮定する．この仮定を行っても，系内人数に影響はない．また，バケーション中に到着した客を先祖と呼び，先祖の集合を I_0 とする．I_0 の客をサービス中に到着した客を第一世代の子孫と呼び，その集合を I_1 とする．同様に，I_{k-1} の客をサービス中に到着した客（第 k 世代の子孫）の集合を I_k とする．いま，任意の客 c の先祖を a（$c=a$ もありうる）とし，a の第 k 世代の子孫を $I_k(a)$，a の一族を $I(a)=\sum_{k=0}^{\infty} I_k(a)$ とする．ただし，$I_0(a)=a$ である．このとき，任意の客 c が退去時に残す系内人数を考える．図2は，系内人数の変化のサンプルパスを示し，客の番号は到着順に付している．図2からわかるように，a（客①）が到着した後同じバケーション中に他の先祖 a'（客②）が到着したとしても，割り込みのない後着順サービスのもとでは，a' の一族（客②～④）は全員 a の一族（客①と客⑤～⑧）の誰よりも早くシステムを退去し，a のサービスが開始さ

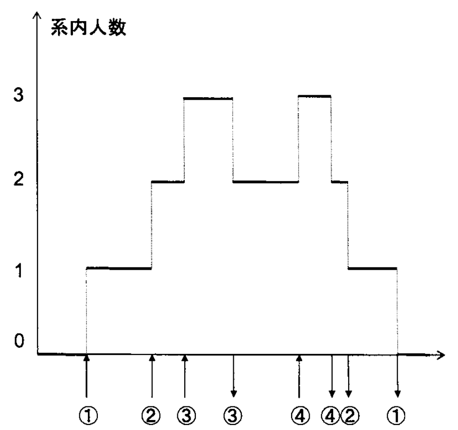

図1　系内人数が同じになる到着客と退去客の対応

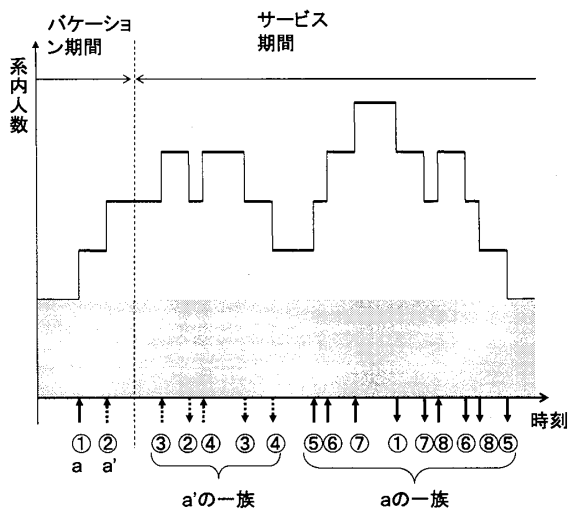

図2　a の一族の退去直後の系内人数

れた時点のシステムにいる客は，a の到着時にシステムにいた客と同じである（図2の網掛け部分）．したがって，$c \in I(a)$ の退去時に残す客は，a の到着時にシステムにいた客全員と，$I(a)$ の一部であり，前者の人数はバケーション中の任意時点における系内人数と等しく，後者の人数はバケーションのない M/G/1 の退去客の退去直後の系内人数と等しい．

バケーションの種類を限定すると，定理2はさらに具体的に表現することができる．例えば，全処理式バケーションを仮定すると，バケーション開始時における系内人数は常に0であるので，バケーション中の任意時点における系内人数は，バケーション中に到着した客より前で同じバケーション中に到着する客数と一致し，この客数を Z と定義すると，確率的分解定理は $X \equiv Z + X_1$ となる．Z の分布は，バケーション中に到着する客数 Y の分布とその平均を用いて以下のように表すことができる．

$$\Pr(Z=k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \Pr(Y=n)/\mathrm{E}[Y]$$

また，バケーション中に到着する客数とそのバケーション開始時における客数が独立であるようなバケーションを仮定すると，バケーション中の任意時点における系内人数は，バケーション開始時の客数とバケーション中に到着した客より前で同じバケーション中に到着する客数の和になるので，バケーション開始時の客数を V_0 と定義すると，$X \equiv V_0 + Z + X_1$ を得る．これらの結果および証明の詳細については，文献[3]を参照されたい．

3．残余仕事量の確率的分解定理

現在システムに滞在する客のサービス時間のうち，まだ処理されていないサービス時間の合計を残余仕事量（Remaining Workload）という．バケーションによるサービスの中断がない場合は，残余仕事量は先着順にサービスを行ったときに現在いる客がすべてシステムから退去するまでの時間と等しく，仮に現在客が到着するとその客の待ち時間に等しいので，仮待ち時間（Virtual Waiting Time）とも呼ばれる．バケーションシステムではサービスが中断するので，待ち時間とは等しくならないことに注意する．本節では，残余仕事量の確率的分解定理について，文献[4]をもとにして説明する．

まず，前節の仮定1〜仮定3を仮定する．客のサービス順序は残余仕事量に影響しないので，仮定4は必要としない．このとき，残余仕事量についても系内人数分布の場合と類似した確率的分解定理が成り立つ．

（定理3）［残余仕事量の確率的分解定理］バケーションモデルにおいて，W を任意時点の残余仕事量，U をバケーション中の任意時点における残余仕事量，W_1 をこのモデルに対応するバケーションのない M/G/1 モデルの任意時点の残余仕事量とするとき，

$$W \equiv U + W_1$$

が成り立ち，U と W_1 は独立である．ただし，$\equiv$ は分布の意味で等しいことを表す．

定理3を証明するために，バケーションモデルのサービス中の任意時点における残余仕事量を W^S と定義する．仮定3よりシステムは定常状態にあるので，単位時間あたりにシステムに課せられる仕事量（システムの稼働率）を ρ とすると，バケーションモデルがサービス中である確率は ρ，バケーション中である確率は $1-\rho$ であり，

$$W \equiv \rho W^S + (1-\rho)U \tag{1}$$

が成り立つ．また同様に，このモデルに対応するバケーションのない M/G/1 モデルのサービス中の任意時点の残余仕事量を W_1^S，アイドル中の任意時点の残余仕事量を W_1^I と定義すると，バケーションのない M/G/1 モデルがサービス中である確率は ρ，アイドル中である確率は $1-\rho$ であり，アイドル中の残余仕事量は常に0であるので，

$$W_1 \equiv \rho W_1^S + (1-\rho) W_1^I \equiv \rho W_1^S \tag{2}$$

が成り立つ．ここで，

$$W^S \equiv W_1^S + U \tag{3}$$

を示すことができれば，式(1)〜(3)より

$$\begin{aligned} W &\equiv \rho(W_1^S + U) + (1-\rho)U \\ &\equiv \rho W_1^S + U \\ &\equiv W_1 + U \end{aligned} \tag{4}$$

となり，定理3を証明することができる．そこで，式(3)が成り立つことを前節と同様に到着客を先祖とその子孫に分類する考え方を用いて説明する．

まず，割り込みのない後着順サービスを仮定する．ただし，客のサービスがバケーションによって中断され，そのバケーション中に新しい客が到着したとき，中断した客のサービスはこの新しい到着客とその子孫全員のサービスが終了してから再開されるものとする．このような仮定を行っても，残余仕事量に影響しない．いま，バケーションモデルにおいてサービス中の客を c，その先祖を a（$c=a$ もありうる）とする．先祖 a がバケーション中に到着した時点の残余仕事量の分布

は，前出のPASTAによりバケーション中の任意時点における残余仕事量 U の分布に等しく，この仕事量 U は a のサービスが開始されるまで減少することはない．また，客 a が到着した後同じバケーション中に他の先祖 a' が到着したとしても，割り込みのない後着順サービスのもとでは，a' の一族は a のサービス開始以前にシステムを退去するので，a のサービス開始時の残余仕事量は，a の到着時点の残余仕事量 U と a のサービス時間の和に等しい．

図3は，a のサービス開始時点以降の残余仕事量の変化を示したものである．a のサービス開始時の残余仕事量のうち a の到着時点の残余仕事量 U は，a およびその子孫（a の一族）のサービス中は変化しない（図3の網掛け部分）．a のサービス開始時の残余仕事量のうち U を除いた残りの残余仕事量は，a の一族のサービス中通常のM/G/1モデルの残余仕事量のように推移する．a の一族のサービスがバケーションによって中断されると，そのバケーション中は残余仕事量は減少せず，新しい客（図3の b）が到着するごとに増加するが，b の一族は a の一族のサービス再開以前にシステムから退去し，a サービス再開時点の残余仕事量は，a の一族のサービス中断時点の残余仕事量と一致するまで減少する．したがって，図3のようにバケーション期間とその期間中に到着した客の一族のサービスによって a の一族のサービスが中断された期間を無視すれば，a の一族のサービス中の U を除いた残りの残余仕事量は，常に通常のM/G/1モデルの残余仕事量と一致する．したがって，式(3)が示され，定理3が正しいことがわかる．

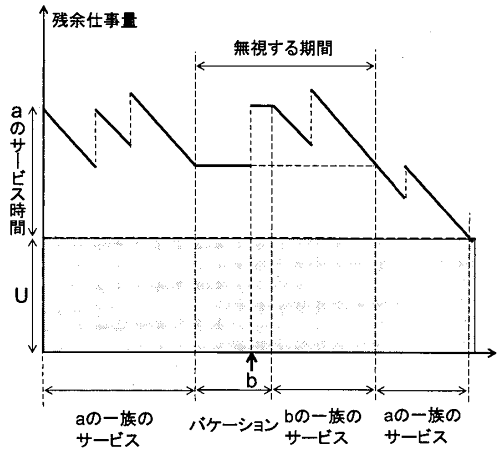

図3　a の一族のサービス中の残余仕事量

参考文献

[1] Takagi, H. (1986) : *Analysis of Polling Systems*, The MIT Press, Cambridge, Mass.

[2] 宮沢政清（2006）:『待ち行列の数理とその応用』, 牧野書店.

[3] Fuhrmann, S. W. and Cooper, R. B. (1985) : Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations, *Operations Reserach* 33, 1117-1129.

[4] Boxma, O. J. and Groenendijk, W. P. (1987) : Pseudo-conservation laws in cyclic-service systems, *J. Appl. Prob* 24, 949-964.