保険のリザーブと待ち行列モデルの双対性

牧本　直樹

本稿では，保険会社の準備金（reserve）の変動を表すCramér-Lundbergモデルと，待ち時間モデルの間に成り立つ双対性を図解し，その応用について解説する．

《保険の準備金の過程》　保険会社は所定の保険料を徴収し，保険金の支払い請求があった場合には請求額を支払う．初期時点の準備金をx，単位時間あたり一定額αの保険料収入があるものとしてこれを準備金に加えていく．一方，初期時点以降の支払い請求の発生時点を順に$T_1, T_2, \ldots$とし，k番目の支払い請求額をS_kとする．時点tでの準備金を$R(t)$で表すと，支払い請求がない間は一定の傾きαで増加し，支払い請求があるとS_kだけ減少する（図1）．このようなモデルをCramér-Lundbergモデルとよぶ[1]～[3]．

《残余仕事量の過程》　初期時点で空の待ち行列がある．初期時点以降の客の到着時点を$T_1, T_2, \ldots$とし，k番目の客のサービス時間をS_kで表す．客がいる間は，一定のサービス率αで処理が行われる．時点tでまだ処理されていないサービスの合計（残余仕事量とよぶ）を$V(t)$で表すと，$V(t)$は一定の率αで減少し，時点T_kで客が到着するとS_kだけ増加するジャンプ過程となる（図2）．ただし，システムが空（$V(t)=0$）の場合は，次の客が到着するまでそのまま変化しない．

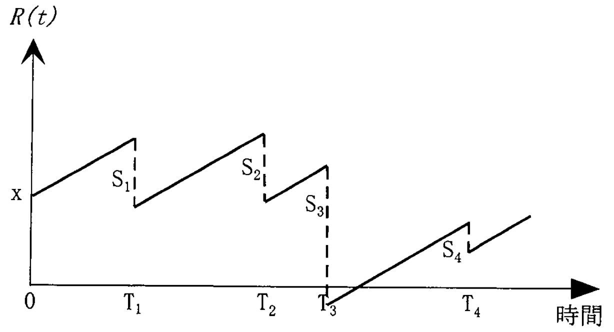

図1　準備金$R(t)$の変化

まきもと　なおき
筑波大学 大学院ビジネス科学研究科
〒112-0012 文京区大塚3-29-1

図1と図2を見比べると，図2を左右反転したグラフが図1に似ていることに気づく．ただし，図1の準備金は負になる可能性があるのに対し，図2の残余仕事量は決して負にならないという違いがある（準備金が負になると保険会社は破産するが，ここではそのまま継続した場合の準備金の変動を考える）．実は残余仕事量が負にならないという性質は，待ち行列モデルの解析を困難にする要因だが，その点はひとまず置いておいて，とりあえず図2の待ち行列モデルの時間を反転させてみよう．N番目の客の到着時点を$T=T_N$とし，時間区間$[0, T]$を反転させる．反転した待ち行列は初め空で，k番目の客が時点$\hat{T}_k \equiv T-T_{N-k+1}$に到着し，そのサービス時間は$S_{N-k+1}$となる．

図3は，図1の準備金Rと，$[0, T_4]$で時間を反転した待ち行列モデルの残余仕事量$\hat{V}$を示している．

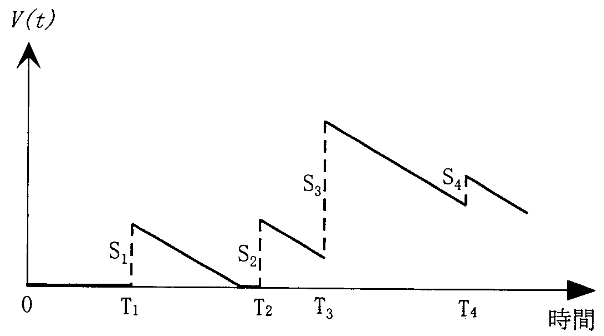

図2　残余仕事量$V(t)$の変化

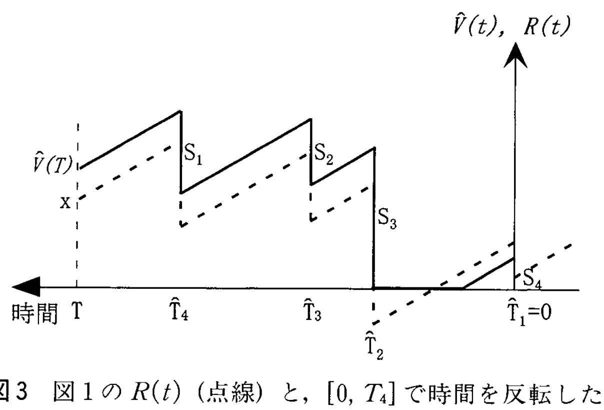

図3　図1の$R(t)$（点線）と，$[0, T_4]$で時間を反転した$\hat{V}(t)$（実線）の変化

R と $\hat{V}$ で時間の向きは逆だが，図3のグラフの形状から以下のことがわかる．

性質1 R と $\hat{V}$ は同じ時点で同じ高さだけジャンプする．

性質2 R は常に傾き α で変化するのに対し，$\hat{V}$ は $\hat{V}(t)>0$ のとき傾き α で変化し，$\hat{V}(t)=0$ のときは変化しない．

これらの性質を利用して，R と $\hat{V}$ の関係を調べてみよう．最初に，時間区間 $[0, T]$ で保険会社が破産する，すなわち $\min_{0\leq s\leq T}R(s)<0$ の場合を考える．図3がこのケースの例を示しているが，時間を右から左へ追っていくと，R（点線）が負になった時点でも $\hat{V}$（実線）は非負である．したがって，性質1，2からその時点より左側の部分では $R<\hat{V}$ となる．$R(0)=x$ より時点 T の位置では $R=x$ なので，保険会社が破産する場合は $x<\hat{V}(T)$ という関係が成立する．

次に保険会社が $[0, T]$ で破産しない場合，すなわち $\min_{0\leq s\leq T}R(s)\geq 0$ の場合を考える（図4）．破産していないことから，時点 $\hat{T}_1=0$ の位置では $R\geq\hat{V}$ である．さらに常に $R\geq 0$ であることと性質1，2から，このケースではどの時点でも $R\geq\hat{V}$ が成り立つ．よって，時点 T の位置での比較から $x\geq\hat{V}(T)$ が得られる．

以上の議論をまとめると，R と $\hat{V}$ の間には

$$\hat{V}(T)>x \Longleftrightarrow \min_{0\leq s\leq T} R(s)<0 \tag{1}$$

という関係が成り立つ．すなわち，$\hat{V}(T)>x$ は，初期の準備金が x の保険会社が $[0, T]$ で破産する事象と等価になる．なお，(1)は図3と図4のグラフから導いた関係だから，どのような R のサンプルとその時間を反転して構成した $\hat{V}$ のサンプルに対しても成立することに注意しよう．

初期の準備金が x の保険会社が $[0, T]$ で倒産する確率を $\bar{B}(x, T)=\mathrm{P}(\min_{0\leq s\leq T}R(s)<0|R(0)=x)$，時間を反転した待ち行列で時点 T での残余仕事量が x を超える確率を $\bar{C}(x, T)=\mathrm{P}(\hat{V}(T)>x|\hat{V}(0)=0)$ で表すと，(1)から

$$\bar{B}(x, T)=\bar{C}(x, T) \tag{2}$$

という関係が成り立つ．$T\to\infty$（あるいは $N\to\infty$）としたときに $\bar{B}(x, T)$ が適当な分布に収束するためには，単位時間あたりの収入 α が単位時間あたりの平均支出 $\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\mathrm{E}(S_i)/\mathrm{E}(T_k)$ を上回る必要がある．待ち行列モデルの言葉で表現すれば，処理率が単位時間あたりに到着する仕事量を上回っていることに該当する．この条件が成り立つ場合，$\lim_{T\to\infty}R(T)=\infty$ となるので(2)の左辺は適当な分布 $\bar{B}(x)$ に収束する．また，右辺は $\hat{V}(T)$ の定常分布 $\bar{C}(x)$ に収束し，

$$\bar{B}(x)=\bar{C}(x) \tag{3}$$

が成り立つ．

先に残余仕事量の過程は0に壁があるため解析しにくいと述べたが，(2)や(3)は，残余仕事量の補分布 $\bar{C}$ が壁をもたない準備金 R に関する補分布 $\bar{B}$ で表せることを示している．そのため，$\bar{C}$ の代わりに $\bar{B}$ を利用して分布の性質を調べる場合が少なくない．

なお，$\hat{V}$ は時間を反転しているため，(2)や(3)を利用して待ち行列モデルを分析するには，到着過程を反転する必要がある．通常の待ち行列モデルでは到着間隔が独立で同一分布にしたがうと仮定することが多く，その場合は反転しても確率的な性質は変わらないので問題は生じない．また到着間隔が依存性をもつ場合でも，よく利用されるマルコフ到着過程[2]などでは，時間を反転した到着過程を容易に構成することができる．

本稿では，準備金と残余仕事量のグラフから，(2)や(3)の双対的な関係式が導けることを示した．これらの式をもとにした具体的な分析や，関連する話題については参考文献を参照されたい．

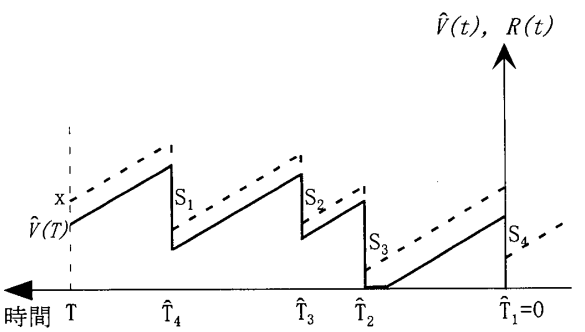

図4　保険会社が破産しない場合

参考文献

[1] Asumussen, S.: "Ruin Probabilities," World Scientific, Singapore, (2000).

[2] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J.: "Stochastic Processes for Insurance and Finance," Wiley, Chichester, (1999).

[3] 牧本直樹：リスク評価と待ち行列モデル，オペレーションズ・リサーチ，49巻，7号，418-421，(2004).