相関を比較する確率順序

豊泉　洋

相関のある確率変数ペア (X, Y) を考えよう．同時確率分布 $F(x, y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}$ に対して，周辺分布を，$F(x)=P\{X\leq x\}$，$G(y)=P\{Y\leq y\}$ とする．この二つの確率変数ペア (X, Y) の相関関係は，同じ周辺分布をもつ他の確率変数ペアとどのように比較できるであろうか？

任意の $x<x'$，$y<y'$ に対して，関数 ϕ が不等式

$$\phi(x', y)+\phi(x, y')\leq\phi(x, y)+\phi(x', y'), \tag{1}$$

を満たすとき，この関数を supermodular と呼ぶ．直感的にいえば，supermodular な関数は，同じレベルを足した方が，クロスした場合よりも高くなるような関数である（図1）．任意の supermodular な関数に対する期待値 $E[\phi(X, Y)]$ を使って，確率変数のペアの比較ができるかを調べる．このような評価が有用な例（ポートフォリオ，待ち行列）は後述するので，もう少々我慢していただき，Tchen[4] に従って話を進める．

まず，不等式(1)を三次元に拡張しよう．任意の三次元ベクトルのペア (x_1, x_2, x_3) と (y_1, y_2, y_3) に対して，$\sum_{i=1}^{3}\phi(x_i, y_i)$ を考える．ここで，(x_1, x_2, x_3) は昇順になっていると仮定しても一般性は失わない．図2の左上のような対応関係のあるケースを考える．(1)を使って，同じレベルが対応するように，対応関係を付け替えれば，

$$\sum_{i=1}^{3}\phi(x_i, y_i)\leq\phi(x_1, y_2)+\phi(x_2, y_3)+\phi(x_3, y_1),$$

が得られる．同様に，なるべくクロスするように対応関係を付け替えると，

$$\sum_{i=1}^{3}\phi(x_i, y_i)\geq\phi(x_1, y_1)+\phi(x_2, y_3)+\phi(x_3, y_2),$$

となることもわかる．

一般に，n 次元の任意のベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ で，各要素を昇順に並べ直したものを $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ と $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)$ とする．また，降順に並べ直したものを $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \cdots, \underline{y}_n)$ とすると，任意の supermodular な関数 ϕ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\phi(\bar{x}_i, \underline{y}_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i, y_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\phi(\bar{x}_i, \bar{y}_i), \tag{2}$$

が成り立つ．

ベクトルの話を確率変数に拡張する．手始めに，離散点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ 上に一様に分布する確率変数のペア (X, Y) を考える（図3）．すなわち，$i=1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$P\{(X, Y)=(x_i, y_i)\}=1/n \tag{3}$$

とする．さらに，離散点 $\{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\}$ と $\{(\bar{x}_i, \underline{y}_i)\}$ 上にそれぞれ一様に分布する新たな確率変数のペア $(\bar{X}, \bar{Y})$ と $\bar{X}, \underline{Y})$ を構成すると，(2)より

$$E[\phi(\bar{X}, \underline{Y})]\leq E[\phi(X, Y)]\leq E[\phi(\bar{X}, \bar{Y})], \tag{4}$$

が成り立つ．

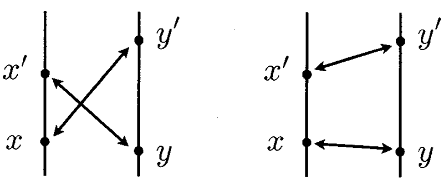

図1　supermodular な関数のイメージ．矢印は対応関係を表す．左側のケースが ϕ の値が低く，右側のケースが高い

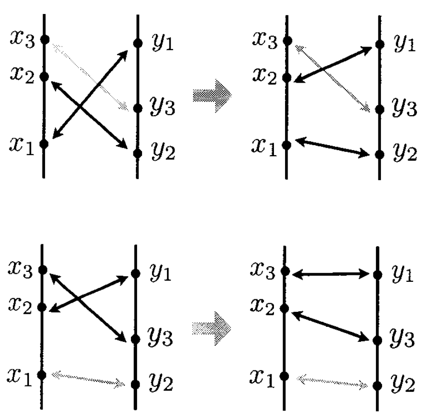

図2　対応関係の付け替え．はじめに，(x_1, x_2) と (y_1, y_2) に対して，次に (x_2, x_3) と (y_1, y_3) に対して(1)を使う．矢印の向きに，$\sum_{i=1}^{3}\phi(x_i, y_i)$ は増加する

とよいずみ　ひろし
早稲田大学 会計研究科
〒169-8050 新宿区西早稲田 1-6-1

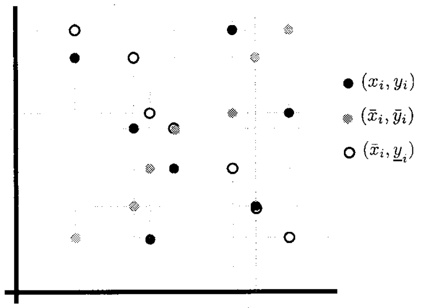

図 3　二次元上の特定の離散点上に一様に分布する確率変数のペア (X, Y) と $(\bar{X}, \bar{Y})$ と $(\bar{X}, \underline{Y})$ の例

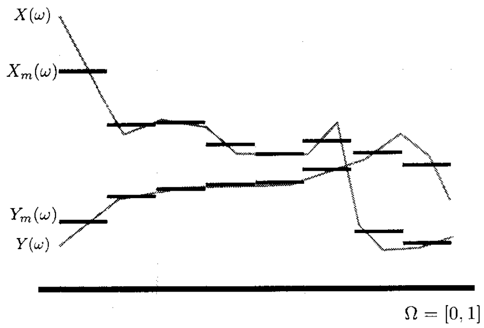

図 4　相関のある確率変数の一様な単関数近似．元の確率変数は，必ずしも [0, 1] 上で連続である必要はないが，わかりやすさのために連続としている

いよいよ，一般の確率変数のペアについて考える．以下では，ϕ を連続，確率変数ペア $(X(\omega), Y(\omega))$ を $\Omega=[0,1]$ 上の有界な関数とし，確率測度を通常の Lebesgue 測度とする[1]．$(X(\omega), Y(\omega))$ を次のように単関数で近似する（図 4）．区間 [0, 1] を 2^m に等分割し，分割区間 $I_{m,i}=[i2^{-m}, (i+1)2^{-m}]$ 上での条件付き期待値 $x_{m,i}=E[X|I_{m,i}]$, $y_{m,i}=E[Y|I_{m,i}]$ を考える．近似確率変数 $(X_m(\omega), Y_m(\omega))$ を，$I_{m,i}$ 上で，

$$(X_m(\omega), Y_m(\omega))=(x_{m,i}, y_{m,i}), \tag{5}$$

と定義する．すると，$E[X_m|X_{m-1}]=X_{m-1}$ となり，この近似列に，martingale の有界収束定理（例えば，[2, p. 316]）を使って，

$$(X_m, Y_m)\to(X, Y) \quad \text{a.s. as } m\to\infty, \tag{6}$$

が証明できる．一方，$I_{m,i}$ 上で，

$$(\bar{X}_m, \bar{Y}_m)=(\bar{x}_{m,i}, \bar{y}_{m,i}),$$
$$(\bar{X}_m, \underline{Y}_m)=(\bar{x}_{m,i}, \underline{y}_{m,i}), \tag{7}$$

とする（図 5）．これらの近似確率変数は，離散点上に一様に分布するので，(4)より，

$$E[\phi(\bar{X}_m, \underline{Y}_m)]\le E[\phi(X_m, Y_m)]\le E[\phi(\bar{X}_m, \bar{Y}_m)], \tag{8}$$

が得られる．

さて，$(\bar{X}_m, \bar{Y}_m)$ の極限とはいかなるものであろうか？　X_m と $\bar{X}_m$ は同じ周辺分布を $F_m(x)$ をもつ（図 5 を横に眺める）．$F_m(x)$ の逆関数を $F_m^{-1}(\omega)=\inf\{x: F_m(x)>\omega\}$ で定義し，同様に Y_m の分布関数 $G_m(y)$ とその逆関数を定義すると，$\omega\in I_{m,i}$ に対して，$F_m^{-1}(\omega)=\bar{x}_{m,i}$, $G_m^{-1}(\omega)=\bar{y}_{m,i}$, $G_m^{-1}(1-\omega)=\underline{y}_{m,i}$ なので，

$$(\bar{X}_m(\omega), \bar{Y}_m(\omega))=(F_m^{-1}(\omega), G_m^{-1}(\omega))$$
$$(\bar{X}_m(\omega), \underline{Y}_m(\omega))=(F_m^{-1}(\omega), G_m^{-1}(1-\omega)), \tag{9}$$

が成立する．ここで，(6)より，(9)の右辺は，それぞれ $(F^{-1}(\omega), G^{-1}(\omega))$ と $(F^{-1}(\omega), G^{-1}(1-\omega))$ に収束することがわかる．したがって，(8)で極限をとれば，一般の確率変数ペアに対して，Lorentz の不等式[1][4]

$$E[\phi(\bar{X}, \underline{Y})]\le E[\phi(X, Y)]\le E[\phi(\bar{X}, \bar{Y})], \tag{10}$$

が任意の連続で supermodular な関数 ϕ について成立することがわかる．ここで，

$$(\bar{X}(\omega), \bar{Y}(\omega))=(F^{-1}(\omega), G^{-1}(\omega))$$
$$(\bar{X}(\omega), \underline{Y}(\omega))=(F^{-1}(\omega), G^{-1}(1-\omega)), \tag{11}$$

は，それぞれ，強相関状態と逆相関状態を表し，さまざまな相関関係をもつ確率変数ペアの中で，supermodular な関数の期待値を最大，最小にすることがわかる．

(10)が，確率順序の評価に応用できる．任意の下に凸な増加関数 f で $E[f[Z_1]]\le E[f[Z_2]]$ が成立するとき，

$$Z_1\le_{icx}Z_2 \tag{12}$$

と書く（増加凸確率順序[2, p. 434]）．直感的には，Z_2 は Z_1 より値が大きく，変動も大きいことを表す．また，下に凸な増加関数 f に対して，$f\circ\phi$ も supermodular であることに注意する．

金融資産のポートフォリオの問題を考えよう．ポー

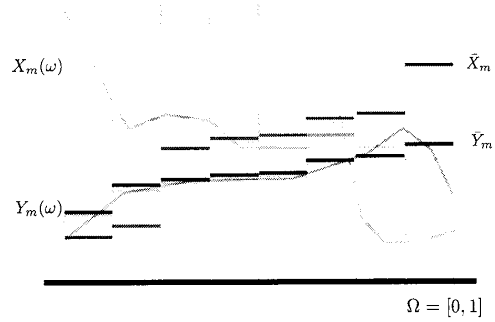

図 5　昇順に整列された確率変数のペア $(\bar{X}_m, \bar{Y}_m)$

[1] ϕ の連続性や X, Y の有界性は本質的ではない．適当な正則条件の下で，近似を行うことで，より一般の場合に拡張できる[4]．

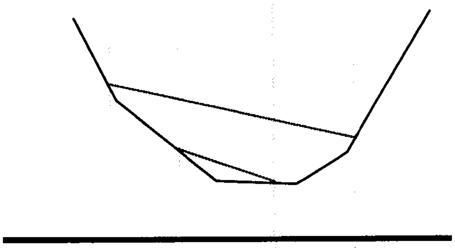

図6 リスク回避的な資産運用者の効用関数 $\phi(x,y)=-u(x+y)$

トフォリオの価値が Z のときに，$u(Z)$ を資産運用者の効用とする．効用関数 u が上に凸なとき，リスク回避的であるという[3]．実際，Jensen の不等式より，この資産運用者は，確定的で変動リスクの少ない資産運用を好むことがわかる．今，二つの金融資産 X, Y で構成されたポートフォリオを考える．$\phi(x,y)=-u(x+y)$ とすると，この ϕ は supermodular である（図6）．さらに，任意の下に凸な増加関数 f を作用させた $f\circ\phi$ も supermodular なので，(10)より，

$$-u(\bar{X}+\underline{Y})\leq_{icx}-u(X+Y)\leq_{icx}-u(\bar{X}+\bar{Y}) \quad (13)$$

が成立する．したがって，リスク回避的な資産運用者は，$(\bar{X},\bar{Y})$ や $(\bar{X},\underline{Y})$ の効用と比較することで，自分のポートフォリオを評価できる．

次に，相関のある到着間隔 T_n をもつ単一窓口の待ち行列を考えよう．Lindley の方程式より，2番目の客の待ち時間 W_2 は

$$W_2=((w_0+s_0-T_1)^+ + s_1 - T_2)^+, \quad (14)$$

となる．ここで，w_0 は0番目の客の待ち時間，s_i は i 番目の客サービス時間を表し，任意の値に「凍結」しておく．W_2 を T_1，T_2 の関数と考え，$W_2=w(T_1, T_2)$ とすると，この関数 $w(x,y)$ は supermodular であることがわかる．したがって，(10)を使うことで，ポートフォリオの問題と同様に，待ち時間に対しても

$$w(\bar{T}_1,\underline{T_2})\leq_{icx}W_2\leq_{icx}w(\bar{T}_1,\bar{T}_2), \quad (15)$$

という上・下限が成立することがわかる（より一般的な場合は，文献[5]参照）．

参考文献

[1] G. G. Lorentz: An inequality for rearrangements. *The American Mathematical Monthly*, 60(3): 176-179, 1953.

[2] S. M. Ross: *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, 1996.

[3] S. M. Ross: *An Elementary Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics*. Cambridge Univ. Pr., 2002.

[4] A. H. Tchen: Inequalities for distributions with given marginals. *The Annals of Probability*, 8(4): 814-827, 1980.

[5] H. Toyoizumi, J. G. Shanthikumar and R. W. Wolff: Two extremal autocorrelated arrival processes. *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, 11(4): 441-450, 1997.