例解 ANP

関谷　和之

1. はじめに

様々な要因が互いに影響し複雑に絡み合っている難問に日常生活で出くわすことがある．そのような難問に対する問題解決のアプローチに，視覚化の工夫は必要である．視覚化は問題の骨格を明確にし，問題に関与するメンバ間の合意形成に寄与する．Analytic Hierarchy Process（AHP）[2]では対象とする問題全体を階層構造モデルとして図示することで，この視覚化の効果を巧みに取り込む．

AHP の特徴である階層構造をネットワーク構造に拡張したものが Analytic Network Process（ANP）[2]である．つまり，意思決定，評価の問題に対して階層構造を含むネットワーク構造により問題の骨格を与え，問題の構成要素の重要度を分析する手法が ANP である．本稿では ANP に関して，簡単な事例で図解する．

2. 2層間の相互評価の例：野球チームの攻守別強さの評価

3チーム対抗野球リーグ戦での各チームの攻守別強さの評価を考える．野球における攻撃は打撃陣，守備は投手陣が主に担当する．攻撃の強さは打撃陣がライバルの投手陣をどれだけ打ち込むかであり，一方，守備の強さは投手陣がライバルの打撃陣をどれだけ打ち取るかである．そして，同一チームの打撃陣と投手陣が直接対決することはなく，打撃陣同士，投手陣同士が対決することもない．投手陣と打撃陣との対決は各打席で実現する．したがって，野球の攻守別の強さの評価構造は3チームの打撃陣の層と3チームの投手陣の層との2層からなり，各打席の対決結果の積み重ねが投手陣（打撃陣）から打撃陣（投手陣）への評価になる．そこで，対決の集計結果から，投手陣（打撃陣）からライバルチームの打撃陣（投手陣）への定量評価を算定することとする．

この打撃陣と投手陣の2層間の相互評価の構造を図1で示す．3チームを u，v，w とし，それぞれの打撃陣を u_b，v_b，w_b，投手陣を u_p，v_p，w_p とする．図1では各チームの投手陣，打撃陣を□で囲んで示し，投手陣は上層に，打撃陣は下層に配置する．6個の□それぞれを項目と呼び，項目間に矢線（→）がある．図1の全6本の線それぞれには双方向の矢印（↔）が付く．双方向矢線1本（↔）を矢線2本分（→，←）として見てほしい．矢線は矢線の元の項目が矢線先の項目を評価することを示す．例えば，u_p から v_b への矢線はチーム u の投手陣 u_p がチーム v の打撃陣 v_b を評価することを示す．一方，チーム内での対決がないので，u_p から u_b への矢線はない．

投手陣 j から打撃陣 i への定量評価を評価値 b_{ij} とし，打撃陣 j から投手陣 i への定量評価を評価値 c_{ij} とする．行列 $[b_{ij}]$ を B，行列 $[c_{ij}]$ を C とする．評価値 $b_{ij}(c_{ij})$ は投手陣（打撃陣）j から打撃陣（投手陣）i への矢線の値として図2のように対応付ける．各評価値は矢線に対応する．

評価値 B, C 算定の基礎データである対抗戦におけ

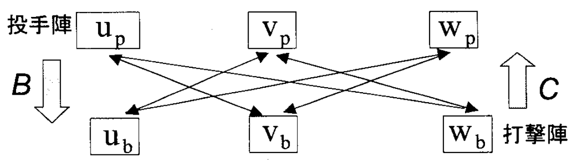

図1　投手陣と打撃陣の対決による攻守の強さの評価

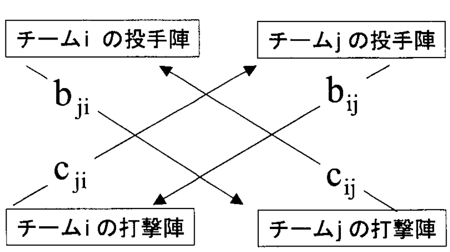

図2　投手陣と打撃陣の相互評価と評価値

せきたに　かずゆき
静岡大学 工学部
〒432-8561 浜松市城北 3-5-1

る打席での対決結果を表1に与える．表1左の数値30は投手陣 w_p が打撃陣 u_b の30打席で打れたことを示す．つまり，打撃陣 u_b が投手陣 w_p に対して30打席で打ち勝った．表1の右側はすべてのチームの打撃陣がどの投手陣に対しても120打席で抑え込まれたことを示す．－は対決結果がないことを示す．

表1の対決結果が与えられると，あえてANPといわずに，各チームの攻守別強さを打率などの勝率で見積もることが思いつくであろう．そこで，各チーム $t=u, v, w$ の打撃陣の勝率，投手陣の勝率の計算式を以下で与え，その計算結果を表2，3に示す．

$$\text{チーム } t \text{ の打撃陣の勝率} = \frac{\text{チーム } t \text{ の打撃陣が打ち勝った総打席数}}{\text{チーム } t \text{ の打撃陣の総打席数}}$$

$$\text{チーム } t \text{ の投手陣の勝率} = \frac{\text{チーム } t \text{ の投手陣が打ち取った総打席数}}{\text{チーム } t \text{ の投手陣が対決した総打席数}}$$

表1　打撃陣と投手陣との対決成績

打撃陣が打ち勝った打席数					投手陣が打ち取った打席数				
打撃陣	対決投手陣			計 [0]	投手陣	対決打撃陣			計 [2]
	u_p	v_p	w_p			u_b	v_b	w_b	
u_b	－	60	30	90	u_p	－	120	120	240
v_b	50	－	40	90	v_p	120	－	120	240
w_b	40	60	－	100	w_p	120	120	－	240
計 [1]	90	120	70		計 [3]	240	240	240	

[0]:打撃陣が勝った打席総数　[2]:投手陣が勝った打席総数
[1]:投手陣が負けた打席総数　[3]:打撃陣が負けた打席総数

表2　打撃陣の勝率計算

打撃陣	総打席数 (勝数, 負数)	勝率	内訳 u_p	内訳 v_p	内訳 w_p
u_b	330(90, 240)	$\frac{90}{330}$	0	$\frac{60}{330}$	$\frac{30}{330}$
v_b	330(90, 240)	$\frac{90}{330}$	$\frac{50}{330}$	0	$\frac{40}{330}$
w_b	340(100, 240)	$\frac{100}{340}$	$\frac{40}{340}$	$\frac{60}{340}$	0

表3　投手陣の勝率計算

投手陣	総打席数 (勝数, 負数)	勝率	内訳 u_b	内訳 v_b	内訳 w_b
u_p	330(240, 90)	$\frac{240}{330}$	0	$\frac{120}{330}$	$\frac{120}{330}$
v_p	360(240, 120)	$\frac{240}{360}$	$\frac{120}{360}$	0	$\frac{120}{360}$
w_p	310(240, 70)	$\frac{240}{310}$	$\frac{120}{310}$	$\frac{120}{310}$	0

各チームの投手陣の強さを u_p^*，v_p^*，w_p^* とする．表3の勝率を強さとすると，$w_p^*>u_p^*>v_p^*$ である．各チームの打撃陣の強さを u_b^*，v_b^*，w_b^* とする．90/330≈0.27，100/340≈0.29と表2から，勝率を打撃陣の強さとすると，$w_b^*>u_b^*=v_b^*$ である．チーム w は攻守共に1番強いことになる．ここで，表2の内訳の u_p 列の3つの数値をベクトル B_u，同様に v_p 列，w_p 列をベクトル B_v，B_w とし，打撃陣の勝率の計算を書き下す．

$$\begin{bmatrix} u_b^* \\ v_b^* \\ w_b^* \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{90}{330} \\ \frac{90}{330} \\ \frac{100}{340} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{50}{330} \\ \frac{40}{340} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{60}{330} \\ 0 \\ \frac{60}{340} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{30}{330} \\ \frac{40}{330} \\ 0 \end{bmatrix} = B_u+B_v+B_w \tag{1}$$

B_u はチーム u の投手陣から各チームの打撃陣への評価値であり，同様に，B_v，B_w はチーム v，w の投手陣から各チームの打撃陣への評価値である．各チームの投手陣からの評価値の単純合計が打撃陣の強さを与えることを(1)は意味する．一方，表2の内訳の u_b 列の3つの数値をベクトル C_u，v_b 列，w_b 列をベクトル C_v，C_w とすると，投手陣の勝率の式(2)は，(1)と同様に，各チームの打撃陣からの評価値の単純合計が投手陣の強さを与えることがわかる．

$$\begin{bmatrix} u_p^* \\ v_p^* \\ w_p^* \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{240}{330} \\ \frac{240}{360} \\ \frac{240}{310} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{120}{360} \\ \frac{120}{310} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{330} \\ 0 \\ \frac{120}{310} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{330} \\ \frac{120}{360} \\ 0 \end{bmatrix} = C_u+C_v+C_w \tag{2}$$

勝率によるチームの攻守別強さの評価は図1の評価値 $B=[B_u, B_v, B_w]$，評価値 $C=[C_u, C_v, C_w]$ とした単純合計(1)，(2)である．この評価では，各チームの攻守の強さを考慮してない．実際，打撃陣 u_b と v_b を比較すると，勝ち打席総数が同じなので $u_b^*=v_b^*$ である．しかし，v_b は最強投手陣 w_p から40打席打ち勝ったが，u_b は10打席少ない30打席しか打ち勝っていない．さらに，u_b は最弱投手陣 v_p と対決したが，v_b は対決しない．

ANPでの代表的な重要度算出法である固有ベクトル法は各チームの攻守の強さを考慮する．すなわち，対決したチームの強さを重みとして加重合計で評価する．具体的には u_p^*，v_p^*，w_p^* を(1)に，u_b^*，v_b^*，w_b^* を(2)に重みとして導入し，それぞれの加重合計が強さ

を与えるという関係式(3)，(4)を満たす攻守別のチーム

$$\lambda\begin{bmatrix} u_b^* \\ v_b^* \\ w_b^* \end{bmatrix}=B_u u_p^*+B_v v_p^*+B_w w_p^*, \tag{3}$$

$$\lambda\begin{bmatrix} u_p^* \\ v_p^* \\ w_p^* \end{bmatrix}=C_u u_b^*+C_v v_b^*+C_w w_b^* \tag{4}$$

の強さを求めることが固有ベクトル法である．実際，$B=[B_u, B_v, B_w]$, $C=[C_u, C_v, C_w]$ とした行列

$$S=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & C \\ B & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5}$$

の固有方程式と(3)，(4)は一致する．

ANPでは，行列(5)のような，矢線の値を成分の値としてもつ接続行列を超行列と呼ぶ．固有ベクトル法では超行列の主固有ベクトル（絶対値最大固有値に対応する固有ベクトル）を重要度とする．この例題では重要度は攻守別チームの強さである．

ANPの手順は以下の2ステップからなる．

1. 超行列の作成．
2. 超行列の主固有ベクトルを求め，必要に応じて適当な正規化を行い，重要度とする．

行列(5)を超行列とし，超行列(5)の主固有ベクトルを求めることは攻守別チームの強さに対するANP分析である．その分析結果は次の通りである．

$$\begin{bmatrix} u_b^* \\ v_b^* \\ w_b^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_p^* \\ v_p^* \\ w_p^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 49 \\ 43 \\ 50 \end{bmatrix} \tag{6}$$

投手陣の強さの順序は単純合計の結果と一致する．最強投手陣 w_p からの評価では打撃陣 v_b は打撃陣 u_b より勝るので，チーム打率の評価では同等であった u_b と v_b に対して，u_b は最弱打撃陣として，v_b は最強打撃陣 w_b に匹敵する強さとして固有ベクトル法では評価された．このように対戦相手の強さを考慮した評価が固有ベクトル法によるANPでは可能である．

式(3)，(4)を展開することで，(6)で与えた打撃陣の強さは行列 BC の主固有ベクトルであり，投手陣の強さは行列 CB の主固有ベクトルであることがわかる．つまり，打撃陣，投手陣いずれの強さも B，C を考慮した値である．

3. 来シーズンの戦力分析

来シーズン開幕に向けて，3チームは新人選手を補強し，各地で合宿を開いた．あるスポーツ紙のデスクY氏はM記者を3チームの各合宿地に派遣し，取材させた．取材から戻ったM記者は3チームの攻守別戦力の増減率（昨シーズン対比）を合宿取材に基づいて予想した．M記者の予想を表4に与える．Y氏は予測値（表4）と昨シーズンの実績値（表2，3）から来シーズンの攻守別チーム戦力をANPにより分析する．このY氏によるANP分析の枠組みを図3で示す．図1に項目「戦力分析」を追加し，この「戦力分析」からの評価を加えたものが図3である．新たに加えた矢線は，「戦力分析」から各チームの攻守別強さの評価（点線）と項目「戦力分析」の自己ループである．点線の評価値はM記者の予測値

$$\boldsymbol{a}^p=\begin{bmatrix} a_u^p \\ a_v^p \\ a_w^p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}^b=\begin{bmatrix} a_u^b \\ a_v^b \\ a_w^b \end{bmatrix}$$

で与えられ，自己ループの評価値は α である．

図3から，Y氏による戦力分析は昨シーズンの実績値 B, C と来シーズンの予測値 $\boldsymbol{a}^p, \boldsymbol{a}^b$ により行われることがわかる．例えば，図3から点線の矢線を取り除くと図1になり，このときの戦力分析は昨シーズンの実績値だけの情報で実施されることがわかる．一方，図3から実線の矢線を取り除くとM記者の予測値だけで戦力分析をすることになる．実績値と予測値両方を取り込んでANPで戦力分析するために，「戦力分

表4　M記者の打撃陣，投手陣の戦力予想

	打撃陣			投手陣		
チーム	u_b	v_b	w_b	u_p	v_p	w_p
増減率 (%)	120	80	100	140	200	150
(6)	28	30	30	49	43	50
予測値	34 (a_u^b)	24 (a_v^b)	30 (a_w^b)	69 (a_u^p)	86 (a_v^p)	75 (a_w^p)

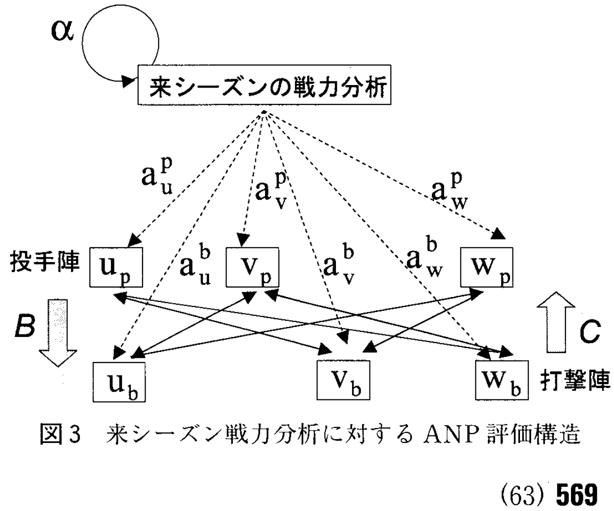

図3　来シーズン戦力分析に対するANP評価構造

析」の自己ループとその評価値 α を与える．つまり，α は戦力分析に実績値と予測値を取り込む配分比のパラメータである．α が実績値と予測値の配分パラメータであることは後ほど説明する．

来シーズンの戦力の ANP 分析をその手順に沿って説明する．図 3 に対応する超行列を $S(\alpha)$ とすると，

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{分析} & \text{投} & \text{打} \end{array} \\ S(\alpha)= & \left[\begin{array}{ccc} \alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}^p & \mathbf{0} & C \\ \boldsymbol{a}^b & B & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{分析} \\ \text{投手} \\ \text{打撃} \end{array} \end{array} \tag{7}$$

である．Y 氏の ANP 戦力分析では，(7)を超行列とする．超行列 $S(\alpha)$ は対角ブロックの 1 つとして(5)の行列 S を含む．(6)で与えた投手陣（打撃陣）の強さを $\boldsymbol{y}^{CB}(\boldsymbol{z}^{BC})$ とし，(5)の行列 S の主固有値を λ_s とする．I は単位行列とする．パラメータ α に対する超行列 $S(\alpha)$ の主固有値と主固有ベクトルを表 5 に与える．（固有値 $\lambda_s(\alpha)$ の最大性と主固有ベクトルの一意性は文献[4]を参照のこと）表 5 は α と λ_s との大小関係により主固有値と主固有ベクトルは 2 種類に分かれる．

表 5 の $\boldsymbol{y}$ に対応する主固有ベクトルの成分は投手陣の強さを与え，$\boldsymbol{z}$ に対応する主固有ベクトルの成分は打撃陣の強さを与える．パラメータ α を λ_s 以下とすると，M 記者の予測 $\boldsymbol{a}^p$，$\boldsymbol{a}^b$ が投手陣（打撃陣）の強さ $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})$ に反映されない．一方，$\alpha>\lambda_s$ では α に応じて投手陣（打撃陣）の強さに $\boldsymbol{a}^p$，$\boldsymbol{a}^b$ が加味される．表 2，3，4 の数値を用いて，α と打撃陣の強さ $\boldsymbol{z}$（すべての α に対して $w_b^*=30$ として正規化）の関係を具体的に図 4 で示す．行列(5)の主固有値は $\lambda_s=0.446$ である．パラメータ $\alpha<0.446=\lambda_s$ であれば，打撃陣の強さは実績値である行列(5)の主固有ベクトルで与えられた強さ $\boldsymbol{z}^{BC}$ と一致する．$\alpha(>\lambda_s)$ を大きくすると，打撃陣の強さは M 記者の予測 $\boldsymbol{a}^b$（表 4）に漸近することがわかる．つまり，α を小さくすると昨シーズンの実績重視の戦力分析，α を大きくすると M 記者による予測を重視した戦力分析になる．α の値は最終意思決定者である Y 氏が図 4 を参考に決定すればよい．

表 5　$S(\alpha)$ の主固有値，主固有ベクトル

	$0\le\alpha\le\lambda_s$	$\lambda_s<\alpha$
主固有値	λ_s	α
主固有ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{y}^{CB} \\ \boldsymbol{z}^{BC} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ \left(\alpha I-\frac{1}{\alpha}CB\right)^{-1}\left(\boldsymbol{a}^p+\frac{1}{\alpha}C\boldsymbol{a}^b\right) \\ \left(\alpha I-\frac{1}{\alpha}BC\right)^{-1}\left(\boldsymbol{a}^b+\frac{1}{\alpha}B\boldsymbol{a}^p\right) \end{bmatrix}$

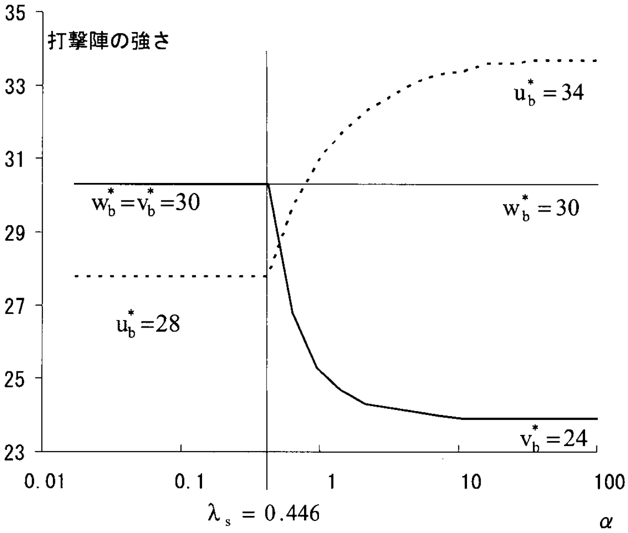

図 4　α による打撃陣の強さ $\boldsymbol{z}$ の変化

最後に，超行列 $S(\alpha)$ の固有方程式を解く根拠を紹介する．来シーズンの投手陣（打撃陣）の強さを $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})$ とする．来シーズンの投打の対決結果は昨シーズンから不変とすれば，$C\boldsymbol{z}(B\boldsymbol{y})$ は投手陣（打撃陣）の強さである．一方，最新情報による M 記者の予測 $\boldsymbol{a}^p$，$\boldsymbol{a}^b$ だけを信じれば，$\boldsymbol{a}^p(\boldsymbol{a}^b)$ が投手陣（打撃陣）の強さである．そこで，以下の(8)で示すように，昨シーズン実績値による推定 $C\boldsymbol{z}, B\boldsymbol{y}$ に最新情報による予測 $\boldsymbol{a}^p$，$\boldsymbol{a}^b$ を織り交ぜた結果を投手陣（打撃陣）の強さとする．

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}^p+\alpha^{-1}C\boldsymbol{z},\quad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{a}^b+\alpha^{-1}B\boldsymbol{y} \tag{8}$$

ここで，パラメータ α を大きくとると最新情報の予測を重視し，α を 0 に近くすると昨シーズンの実績による推定を重視して，来シーズンの攻守別強さを戦力分析することになる．戦力分析では，強さ $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z})$ の各成分値の大きさが重要でなく，成分間の相対比に意味がある．そこで，$\bar{\boldsymbol{y}}=\alpha^{-1}\boldsymbol{y}$，$\bar{\boldsymbol{z}}=\alpha^{-1}\boldsymbol{z}$ とし，(8)に恒等式 $\alpha=\alpha$ を加えると，連立非線形方程式(9)を得る．

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\boldsymbol{y}} \\ \bar{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}^p & \mathbf{0} & C \\ \boldsymbol{a}^b & B & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\boldsymbol{y}} \\ \bar{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

式(9)は式(7)の超行列 $S(\alpha)$ の固有方程式である．

4．おわりに

AHP では扱えなかった双方向の評価を ANP では許すので，その適用範囲は広い．実際，近年，ANP の興味ある事例報告，QC での品質機能展開[1]や SCM での戦略的意思決定[3]がある．節 3 で示した超行列の (1,1) 成分に α をもつ ANP 分析法は文献[4]で提案したものであり，Saaty 独自の分析法（べき乗

法）を含む．来シーズン戦力分析の例ではべき乗法は $\alpha=0$ に対応する．$\alpha=0$ では上層からの評価を無視した当該項目の重要度を与えるので注意されたい．

参考文献

[1] Partovi, F. Y. and Corredoria, A. R.: "Quality function deployment for the good soccer, " European Journal of Operational Research, 137 (2002) 642-656.

[2] Saaty, T. L. (2001) *Analytic Network Process*, RWS, Pittsburgh.

[3] Sarkis, J. and Talluri, S.: "A model for strategic supply selection," The Journal of Supply Chain Management: A Global Review of Purchasing and Supply, 38 (2002) 18-28.

[4] 関谷和之：AHP, ANPの固有ベクトル法における数理構造，オペレーションズ・リサーチ，48 (2003) 294-299.