資産価格の基本定理

田中　敬一

金融取引とは，現在と将来のキャッシュフローを交換する異時点間取引である．その取引によって，将来時点においてあるルールにしたがって生じるキャッシュフロー（例えば配当）を受取ることが可能になるので，その取引を資産と呼び，その価格を考えることは経済学的にも意義深い．本稿では，2時点 $t=0,1$ から成る1期間モデルにおいて，無裁定価格を視覚的に捉え，資産価格の基本定理を解説する．

1.　価格ベクトルとポートフォリオ

時点 $t=1$ における不確実性は N 種類の状態 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\cdots, \omega_N\}$ によって表現されているとする．市場には時点 $t=1$ に満期を迎える M 種類の証券が取引されている．証券 $i(i=1,\cdots,M)$ の時点 t，状態 $\omega_j(i=1,\cdots,N)$ における価格を $p_i(t, \omega_j)$ と表すが，混同のおそれがない場合には，状態を明記しない場合もある．これら M 種類の証券価格を成分とする価格ベクトルを $\mathbf{p}(t, \omega_j)=((p_1(t, \omega_j),\cdots, p_M(t, \omega_j))^\top$ とする．図1には $N=M=2$ の場合の価格ベクトルが描かれている．

どの状態 ω_j が生じても時点 $t=1$ におけるキャッシュフローが一定であるような証券が存在すればそれを無リスク証券と呼ぶ．図2は証券1が無リスク証券の場合の価格ベクトルである．

投資家は時点 $t=0$ に証券 i を w_i 単位購入し時点 $t=1$ まで保有する．価格ベクトルを示す図1の単位を適当に変換することでポートフォリオ $\mathbf{w}=(w_1,\cdots, w_M)^\top$ を図1に載せ，価格と数量を同一グラフ上で考えることができる（この同一視は，有限次元線形空間の双対空間が元の線形空間と同型であるので可能である）．ただし，ポートフォリオを表す数量ベクトルは，加算およびスカラー倍しても新たなポートフォリオを表すことになるが，価格ベクトルについては，スカラー倍には意味があるとしても，異なる時点または異なる状態の価格ベクトル同士を加算することに経済的意味は一般的にはない．しかしながら例外として，同一時点の価格ベクトルの線形結合において，ウエイトの合計が1であるものは期待値としての意味をもたせることが可能である．この点は後で同値マルチンゲール確率の構成に利用されるので注意しよう．

ポートフォリオ $\mathbf{w}=(w_1,\cdots, w_M)^\top$ の時点 t における価値 $V(t\,;\,\mathbf{w})$ は，価格ベクトルとポートフォリオの内積

$$V(t\,;\,\mathbf{w})=w_1p_1(t)+\cdots+w_Mp_M(t)=\mathbf{w}^\top\mathbf{p}(t)$$

で表現される．図3における直線 AOB は価格ベクトル $\mathbf{p}(0)$ に直交する直線 $\mathbf{w}^\top\mathbf{p}(0)=0$ なので，価格ベクトル $\mathbf{p}(0)$ に関して価値がゼロであるポートフォリオ全体を表す．直線 AOB より右上に位置するポートフォリオは現在価値が正であり，左下のポートフォリオの現在価値は負である．

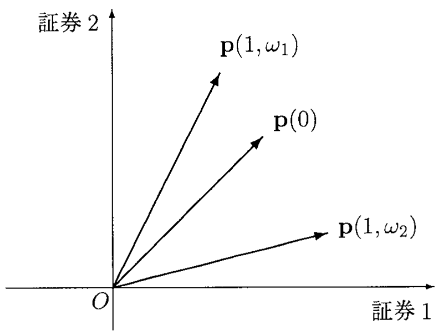

図1　価格ベクトル

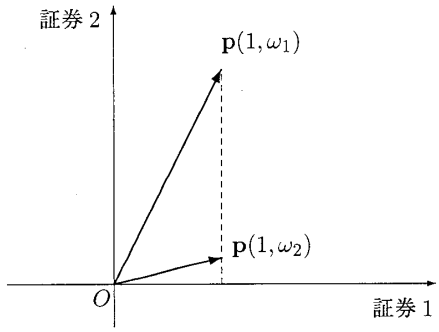

図2　証券1が無リスク証券の場合の価格ベクトル

たなか　けいいち
首都大学東京 大学院社会科学研究科
〒192-0397 八王子市南大沢 1-1

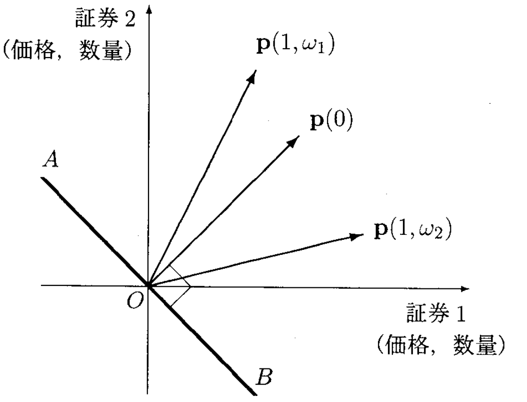

図 3　現在価値ゼロのポートフォリオ全体 AOB

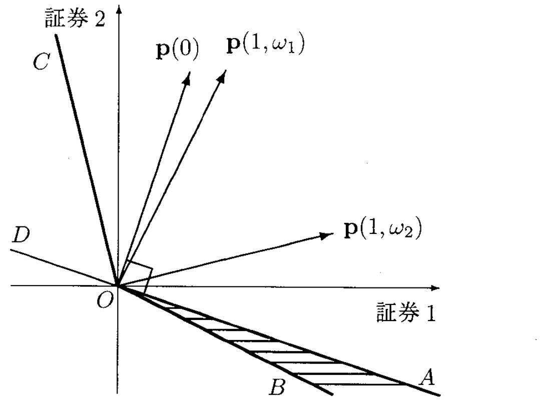

図 4　裁定機会の全体 AOB：$\mathbf{p}(0)\perp OA$，$\mathbf{p}(1,\omega_1)\perp OB$，$\mathbf{p}(1,\omega_2)\perp OC$

2.　裁定機会

ポートフォリオ価値の符号を用いることで裁定機会を定義できる．**裁定機会**とは，無から有を生み出すポートフォリオのことで，次のいずれかの条件を満たすポートフォリオ $\mathbf{w}$ である．

a) $V(0;\mathbf{w})\le 0$，かつ，すべての $j=1,\cdots,N$ に対して $V(1,\omega_j;\mathbf{w})\ge 0$ であり，少なくとも 1 つの j に対して $V(1,\omega_j;\mathbf{w})>0$

b) $V(0;\mathbf{w})<0$，かつ，すべての $j=1,\cdots,N$ に対して $V(1,\omega_j;\mathbf{w})\ge 0$

特に，条件 b) を満たすポートフォリオ $\mathbf{w}$ では，時点 $t=0$ でポートフォリオを構成すると同時に，必ずいくらかの金額を受領すること ($V(0;\mathbf{w})<0$) になるので，このようなポートフォリオを強い意味の裁定機会という．

裁定機会の条件を行列を用いて表そう．時点 $t=1$ における状態ごとの価格ベクトルを並べた $M\times N$ 行列を $\mathbf{P}(1)=(\mathbf{p}(1,\omega_1),\cdots,\mathbf{p}(1,\omega_N))$ とする．裁定機会の条件は

$$\mathbf{w}^\top\mathbf{p}(0)\le 0,\ \mathbf{w}^\top\mathbf{P}(1)\gneq\mathbf{0}\ \text{または}$$
$$\mathbf{w}^\top\mathbf{p}(0)<,\ \mathbf{w}^\top\mathbf{P}(1)\ge\mathbf{0} \tag{1}$$

と書ける．裁定機会が存在するかどうかという問題は，ポートフォリオ価値というベクトルの内積の符号に関する問題に帰着される．

この問題を図を用いて考察するために，価格ベクトル $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^M$ に関する“向き”をつけた3つの錐 (cone) を

$$K_+(\mathbf{p})=\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^M:\ \mathbf{w}^\top\mathbf{p}>0\}$$
$$K_0(\mathbf{p})=\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^M:\ \mathbf{w}^\top\mathbf{p}=0\}$$
$$K_-(\mathbf{p})=\{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^M:\ \mathbf{w}^\top\mathbf{p}<0\}$$

と定義しよう．$K_+(\mathbf{p})$ は価格ベクトル $\mathbf{p}$ に関して価値が正であるポートフォリオ全体であり，$K_0(\mathbf{p})$，$K_-(\mathbf{p})$ はそれぞれ，価値がゼロおよび負になるポートフォリオ全体を表す．錐 $K_+(\mathbf{p})$，$K_0(\mathbf{p})$，$K_-(\mathbf{p})$ を用いれば，裁定機会 $\mathbf{w}$ の条件(1)は以下のようになる．

$$\begin{cases}\mathbf{w}\in K_{-0}(\mathbf{p}(0)),\ \mathbf{w}\in\bigcap_{j=1}^{N}K_{+0}(\mathbf{p}(1,\omega_j)),\\ \text{ある } j \text{ については } \mathbf{w}\in K_+(\mathbf{p}(1,\omega_j))\end{cases}$$

または　　(2)

$$\mathbf{w}\in K_-(\mathbf{p}(0)),\ \mathbf{w}\in\bigcap_{j=1}^{N}K_{+0}(\mathbf{p}(1,\omega_j))$$

ただし，$K_{-0}(\mathbf{p})=K_-(\mathbf{p})\cup K_0(\mathbf{p})$，$K_{+0}(\mathbf{p})=K_+(\mathbf{p})\cup K_0(\mathbf{p})$ である．したがって，各時点および各状態の価格ベクトル $\mathbf{p}$ に対して，錐 $K_+(\mathbf{p})$，$K_0(\mathbf{p})$，$K_-(\mathbf{p})$ の位置関係を考えてみると，裁定機会を視覚的に理解できる．図 4 では，証券 2 の現在価格が証券 1 に比して相対的に高く，$t=0$ の価格ベクトルが $t=1$ の価格ベクトルの中間に位置しない．そのため，証券 1 を買い証券 2 を空売りすることにより裁定機会を構成できる．図 4 の横線が入った領域 AOB 内部（および境界上）にあるポートフォリオが裁定機会であり，特に，境界 OA 以外の裁定機会は強い意味の裁定機会である．

3.　資産価格の第一基本定理

図 4 において裁定機会が生じた理由は，$t=0$ の価格ベクトルが $t=1$ の価格ベクトルから生成される錐の内側にないことである．図 3 の位置関係にあれば裁定機会は存在しない．このように市場に裁定機会が存在しない場合の証券価格を**無裁定価格**という．資産価格の第一基本定理は，無裁定とマルチンゲール確率の存在の同値性を述べている．

定理 1（資産価格の第一基本定理）． 市場に裁定機会が存在しないことと，同値マルチンゲール確率が存在することは同値である．

ここではこの定理の内容を説明しよう．確率 $Q=\{q_j, j=1,2,\cdots,N\}$ が証券1を**基準財**（numéraire）とする**同値マルチンゲール確率**（equivalent martingale probability）であるとは，すべての証券について，基準財に関する相対価格が確率 Q の下でマルチンゲールになることである．すなわち，すべての $i=1,\cdots,M$ に対して

$$\frac{p_i(0)}{p_1(0)}=E^Q\left[\frac{p_i(1)}{p_1(1)}\right]=\sum_{j=1}^{N}q_j\frac{p_i(1,\omega_j)}{p_1(1,\omega_j)} \tag{3}$$

が成立する．ここで E^Q は確率 Q に関する期待値を表す．特に，基準財が無リスク証券であるとき，その同値マルチンゲール確率をリスク中立確率という．

まず，基準財に関する相対価格の役割を考えよう．証券1を基準財とする相対価格 $p_i^*(t)=p_i(t)/p_1(t)$ から成る相対価格ベクトル $\mathbf{p}^*(t)$ は，定義から，図5のとおりに，どの時点でも，どの状態でも，証券1の相対価格は1である．相対価格ベクトルは，元の価格ベクトルの長さを適当に変換しただけで，方向を変えていないので，裁定機会となるポートフォリオは不変である．すなわち，裁定機会が存在するかどうかは，基準財に依存せず，元の貨幣単位の価格で考えても，あるいは相対価格で考えても同じである．この性質を基準財に関する不変性（numéraire invariance）という．

(3)式で表される同値マルチンゲール確率 $Q=\{q_j\}$ は，その行列表現

$$\mathbf{P}^*(1)\mathbf{q}=\mathbf{p}^*(\mathbf{0}),\ \mathbf{q}>\mathbf{0} \tag{4}$$

を満たすベクトル $\mathbf{q}=(q_1,\cdots,q_N)\in\mathbb{R}^N$ と同じである．ここで，

$$\mathbf{P}^*(1)=(\mathbf{p}^*(1,\omega_1),\cdots,\mathbf{p}^*(1,\omega_N))$$

とした．一方，裁定機会は相対価格で考えても同じなので，(1)式から，裁定機会の存在は

$$\begin{aligned}&\mathbf{w}^\top\mathbf{p}^*(0)\le 0,\ \mathbf{w}^\top\mathbf{P}^*(1)\gneq\mathbf{0}\ \text{または}\\ &\mathbf{w}^\top\mathbf{p}^*(0)<0,\ \mathbf{w}^\top\mathbf{P}^*(1)\ge\mathbf{0}\end{aligned} \tag{5}$$

を満たすベクトル $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^M$ の存在と同値である．以上の準備と次のStiemkeの補題により，資産価格の第一基本定理が証明される．

補題1（Stiemkeの補題）． $m\times n$ 行列 $\mathbf{A}$ と m 次元ベクトル $\mathbf{b}$ が与えられたとき，以下のいずれかが成立し，かつ同時に成立することはない．

a) ($\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ かつ $\mathbf{x}>\mathbf{0}$)
　を満たす n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ が存在する．

b) ($\mathbf{y}^\top\mathbf{b}\le 0$ かつ $\mathbf{y}^\top\mathbf{A}\gneq\mathbf{0}$) または
　($\mathbf{y}^\top\mathbf{b}<0$ かつ $\mathbf{y}^\top\mathbf{A}\ge\mathbf{0}$)

を満たす m 次元ベクトル $\mathbf{y}$ が存在する．

さて，(4)式は

$$\mathbf{p}^*(0)=\sum_{j=1}^{N}q_j\mathbf{p}^*(1,\omega_j),\ q_j>0,\ j=1,\cdots,N$$

と書き換えれば，図5のとおり，$t=0$ の相対価格ベクトル $\mathbf{p}^*(0)$ が $t=1$ の $\mathbf{p}^*(1,\omega_1),\cdots,\mathbf{p}^*(1,\omega_N)$ によって生成される錐の内点であることを示している．さらに，同値マルチンゲール確率は，図5における線分 EF と FG の比率，すなわち相対価格ベクトルの按分比率として理解できる．図4および図5から，無裁定と，$\mathbf{p}^*(0)$ がこの錐の内点であることが同値であることは，Stiemkeの補題によらずとも納得できるであろう．

ところで，価格が正であれば，金利が負になっても裁定機会が存在するわけではない．金利が負になると，時点 $t=0$ の価格ベクトルの長さが時点 $t=1$ の価格ベクトルより相対的に長くなる．しかしながら，これまでの議論からわかるとおり，価格ベクトルの長さは裁定機会に関係ない（図6）．

4．基準財ごとに定まる同値マルチンゲール確率

基準財が異なれば同値マルチンゲール確率も異なる

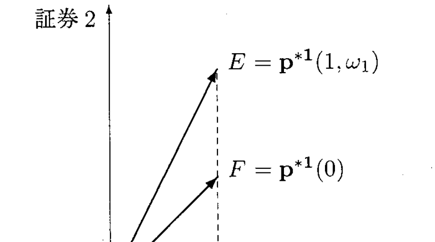

図5　証券1を基準財とする相対価格ベクトル

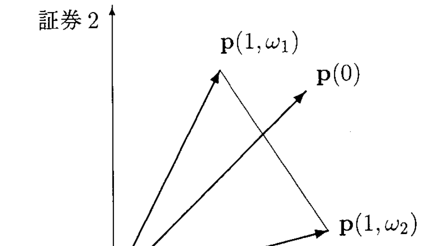

図6　金利が負の場合の価格ベクトル

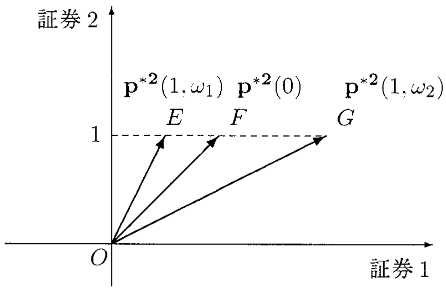

図 7　証券 2 を基準財とする相対価格ベクトル

ことを，図 5 および図 7 で確認しよう．それぞれの図における点 E，F，G は，各基準財に関する相対価格ベクトルを表す．ここで横軸との角度（向き）はどちらの図においても等しいことに注意しよう．図 5 における線分 EF と FG の比率が，証券 1 を基準財にした場合の同値マルチンゲール確率であり，図 7 の同比率が，証券 2 を基準財にした場合の同値マルチンゲール確率である．したがって，図 5 における相対価格ベクトルの角を

$$\theta_1=\angle EOH,\ \theta_0=\angle FOH,\ \theta_2=\angle GOH$$

と定めれば，証券 1 を基準財とする同値マルチンゲール確率 $Q^{(1)}=\{q_j^{(1)}\}$ は

$$q_1^{(1)}=\frac{\tan\theta_0-\tan\theta_2}{\tan\theta_1-\tan\theta_2},\ q_2^{(1)}=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_0}{\tan\theta_1-\tan\theta_2}$$

である．証券 2 を基準財にすれば，図 7 からその同値マルチンゲール確率 $Q^{(2)}=\{q_j^{(2)}\}$ は

$$q_1^{(2)}=\frac{\cot\theta_0-\cot\theta_2}{\cot\theta_1-\cot\theta_2},\ q_2^{(2)}=\frac{\cot\theta_1-\cot\theta_0}{\cot\theta_1-\cot\theta_2}$$

となり，証券 1 の場合と異なることは明らかである．もし証券が無リスク証券（預金）とリスク証券（株式）の 2 種類であれば，無リスク証券を基準財とするリスク中立確率と，リスク証券を基準財とする同値マルチンゲール確率は異なるのである．

5.　資産価格の第二基本定理と不完備市場

市場が完備であるとは，次のような状態である．

a) 任意の証券（条件付き請求権）の無裁定価格が一意に定まる．

b) 任意の証券は基本的な証券 $1,2,\cdots,M$ により複製（ヘッジ）できる．

市場が完備であれば，すべての証券の価格について市場参加者の評価が一致し，また，投資家が要求するキャッシュフローを新たな証券として自在に提供できる，という理想的な状態である．価格 $\mathbf{p}(0)$ が一意に定まることと，(4)式の $\mathbf{q}$ が一意に定まることは同値なの

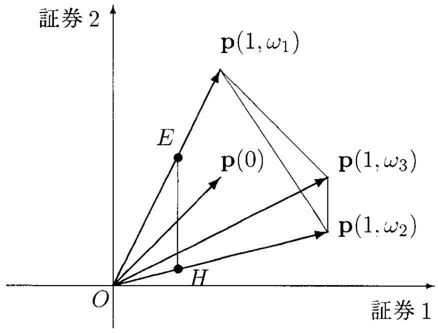

図 8　3 状態の場合の価格ベクトルと同値マルチンゲール確率

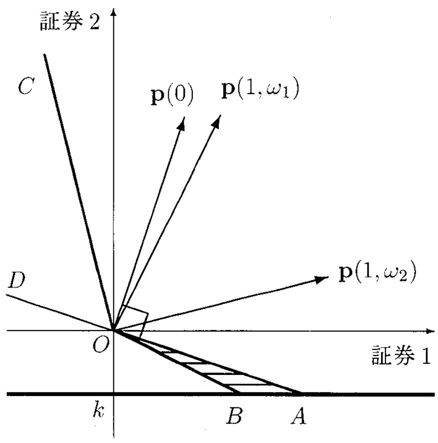

図 9　証券 2 に空売り制約がある場合の裁定機会の全体 AOB

で，次の市場が完備であるための必要十分条件は次のようになる．

定理 2（資産価格の第二基本定理）．裁定機会が存在しないという仮定のもとでは，市場が完備であることと，行列 $\mathbf{P}(1)$ の階数が状態数 N と一致することは同値である．

したがって市場が完備であるためには，状態の数より証券の数が多いこと $N\leq M$ が必要である．仮に市場が完備でなければ，証券が不足しているか，何らかの制約やコストが生じている．図 8 では $M=2<N=3$ の場合の価格ベクトルを示している．線分 EH は価格ベクトル $\mathbf{p}(0)$ 以外にも，状態 3 の価格ベクトル $\mathbf{p}(1,\omega_3)$ と交わっているので，価格ベクトルの確率ウエイトは一意に定まらず，同値マルチンゲール確率は一つではない．すなわち，価格付けの点では，すべての証券価格が一意に定まるわけではない．複製の可能性という点では，2 証券では 3 状態から生成される任意のキャッシュフローを複製できない．また，図 9 のように，証券 2 の空売りが制約されている（ある k

について $w_2 \geq k$ でなければならない）場合には裁定機会の領域が縮小する，あるいは証券２の価格が上昇するので，実際に2002年に実施されたような株式の空売り規制強化による PKO (Price Keeping Operation) が可能となる．

金融商品の価格付けや，基準財と同値マルチンゲール測度の関係に関するより詳細な議論については，文献[1]を参照されたい．

参考文献

[1] 木島正明, 田中敬一 : 資産の価格付けと測度変換, 朝倉書店, 2007.