総当りリーグ戦とグラフ理論

宮代　隆平

とある高専の放課後…．将棋部の部長であるＳ君が，来月の部内対抗戦のスケジュールについて頭を悩ませています．そこへ，将棋部の顧問であるＴ先生がやってきました．

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

T先生：おーい，もうすぐ下校時刻だぞ．

S君：先生，相談したいことがあるのですが…．

T：あれ，今日は部活は休みじゃなかったのか．どうしたんだ．

S：実は，来月の部内対抗戦のことなのですが，スケジュールがなかなか決まらなくて困っているんです．

T：ああ，スケジュール作成はどこでももめるよな．聞いてくれよ，今日の職員会議でも…．

S：はいはい，生徒に愚痴らないでください．このスケジュールなんですが（図1），5日目から後ろがどうしても埋められないんです．部員10人で，

- 1日に各人が1回対局を行う
- 各人がすべての人と1回対局を行う
- 9日で総当りリーグ戦を終了する

という普通の総当りリーグ戦を作ろうと思っているのですが…．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	D	F	H	J				
B	A	C	E	G	I				
C	D	B	J	F	H				
D	C	A	G	I	E				
E	F	H	B	J	D				
F	E	I	A	C	G				
G	H	J	D	B	F				
H	G	E	I	A	C				
I	J	F	H	D	B				
J	I	G	C	E	A				

図1　作成途中のリーグ戦

みやしろ　りゅうへい
東京農工大学 大学院共生科学技術研究院
〒184-8588 小金井市中町 2-24-16

T：どれどれ…．うん，結論から言うとこれは無理だね．

S：えっ，どうしてですか．

T：グラフを使って説明しよう．先学期のグラフ理論の単位は取っていたよね？

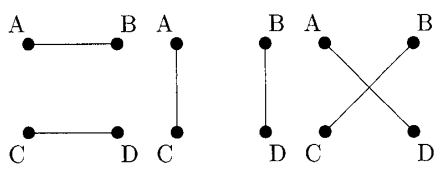
S：なんとか可をいただいております．

T：まあよし．まず，図2の4人のリーグ戦を考えよう．このリーグ戦のスケジュールを，図3の3つのグラフで表すことにする．各頂点をそれぞれの人と考えて，各日について対局がある人どうしを線で結ぶんだ．そうすると，どの人も1日に1回対局があるので，それぞれの日について完全マッチングができることになる．また，すべての人と1回対戦が行われるので，3つのグラフを重ね合わせると，4頂点の完全グラフ K_4 ができあがるね（図4）．

S：はい，ここまではわかります．

	1	2	3
A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

図2　4人によるリーグ戦



1日目　　2日目　　3日目

図3　図2のスケジュールのグラフ表現

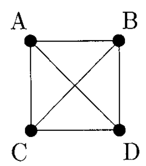


図4　完全グラフ K_4

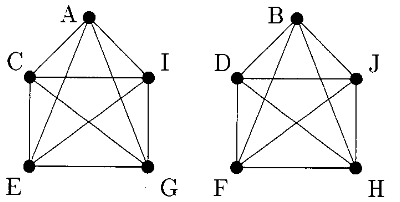


図 5　図 1 のスケジュールの残り部分

T：逆に言えば，総当りリーグ戦のスケジュール作成は，完全マッチングによってグラフを分解する問題，と考えることができる．図 1 のスケジュールについて，既に埋めた部分を取り除いたグラフを考えてみると，図 5 のようになる．こうすると，もう完全マッチングを作れないことは明らかだ．

S：なるほど，どんなふうに線を結んでも，必ずあぶれてしまう人が出てきますね．僕の作ったスケジュールは，なにがまずかったんですか？

T：そうだね．実は，リーグ戦の人数が 8 人以上なら，1～3 日目まではどのように固定しても，スケジュールを完成できることが知られている[4]．だが一方で，リーグ戦のラスト 3 日間以外をすべて矛盾なく埋めても，そこから残りがきちんと作れるかどうかを判断する問題は NP 完全問題だ[1]．もちろん，図 5 みたいに明らかにわかるケースもあるけどね．

S：ふうん．いろいろと難しい問題なんですね．

T：さて，さっきのスケジュールだけど，どうしようか．1 日目から 5 日目は，どうしても図 1 の通りに作らなくてはいけないの？

S：いえ，あのスケジュールはとりあえず僕が適当に作ってみただけで，制約条件などは特にないんです．

T：なら簡単だ．いい方法を教えてあげよう．リーグ戦に参加する人数を n 人，n を偶数としようか．図 6 に示すように，プレイヤー $1, 2, \ldots, n-1$ に対応する頂点を円周上に等間隔に並べ，プレイヤー n を円の中心に配置する．次に，プレイヤー 2 と $n-1$，プレイヤー 3 と $n-2, \ldots$，プレイヤー $n/2$ と $n/2+1$ というように平行な線分でプレイヤーどうしを結ぶ．最後に，プレイヤー 1 と n を結んで，これをスケジュールの 1 日目とする．

S：口で言うと長いですが，図にすると簡単ですね．

T：うん，まさにそれが図の威力だ．残りの日は，直線を固定したまま，プレイヤー n 以外の頂点を円周上で一つずつ（左に）回転させれば OK だ

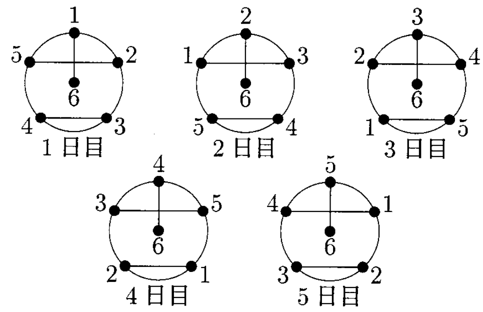


図 6　Circle method

（図 6）．図では頂点を回転させているけど，頂点を固定して重ね合わせれば，これらから完全グラフ K_6 ができることはすぐにわかる．

S：すごい！　これは先生が考えたんですか？

T：はは，まさか．この方法は，circle method と呼ばれていて，誰が作ったのかもわからないくらい昔から知られているよ．既に 1847 年には，本質的に等価な方法が文献に残されているね[3]．

S：昔の人は偉いですねえ．ところでこれ，図 6 では 6 人の場合ですが，人数が多くなってくると大変ではないですか．

T：一般の場合は以下のようになる．プレイヤーが n 人いる場合は，d 日目 $(d=1, 2, \ldots, n-1)$ に

- プレイヤー d と n が対局；
- それ以外のプレイヤーは以下を満たす組 (i, j) が対局：$i+j \equiv 2d \mod n-1$

とすればいい．

S：なるほど．先生，ご助言を頂戴したついでに伺いたいのですが，実はこのあと，先手と後手を決めなくてはいけなくて….

T：ものを頼むときだけは謙虚だよな．しかし，先手後手もあらかじめ決めておくとは，本格的だね．

S：対抗戦の場合は前もって決めています．戦法も考えやすいですしね．それで，先手と後手ができるだけ均等になるようにしたいんですよ．

T：というと，みんな先手と後手の回数ができるだけ等しくなるようにするということ？

S：回数の問題もあるんですけど，それ以上に，先手の対局が連続したり，後手の対局が連続したりしないように組みたいんです．

T：なるほどね．先手の回数，後手の回数をできるだけ均等にするのと，先手の対局/後手の対局が連続しないようにするという条件は一度に解決できるよ．

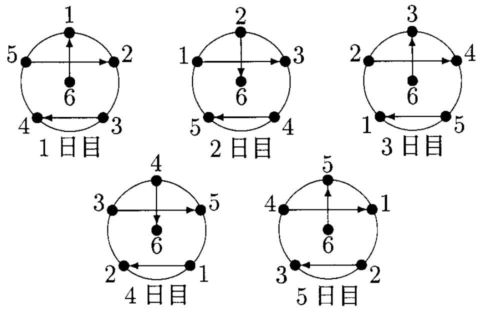


図7　先手/後手に対応した circle method

	1	2	3	4	5
1	6後	3先	5後	2先	4後
2	5後	6先	4先	1後	3先
3	4先	1後	6後	5先	2後
4	3後	5先	2後	6先	1先
5	2先	4後	1先	3後	6後
6	1先	2後	3先	4後	5先

図8　図7に対応するスケジュール

S：ぜひぜひ，その方法を教えてください．

T：さっきの circle method を少しいじるだけでいい．具体的には，図6の線分に向きをつけて，矢印にする．最初はプレイヤー $n-1$ から2への矢印，次はプレイヤー3から $n-2$ への矢印…と，向きを互い違いにした矢印で結ぶ．最後に，プレイヤー n から1へ向けて矢印を引く．これをスケジュールの1日目とする．ここで，矢印の始点に対応する人は先手，矢印で指されている人は後手という意味だ．

残りの日は，さっきと同じように，矢印を固定したまま，プレイヤー n 以外の頂点を円周上で一つずつ左回転させればOKだ．ただし，プレイヤー n に接続している矢印だけは，1日ごとに向きを反転させる（図7）．

S：作り方はわかりました．結果として，図8のスケジュールができ上がりますね．けれど，これで先手の対局/後手の対局が連続しないようになっているんですか？

T：いい質問だね．まず，図7の作成方法から，プレイヤー1と n は両方とも，先手の連続，後手の連続がないことがわかる．他のプレイヤーは，対応する頂点が平行な矢印の部分を移動している間は先手の連続，後手の連続はない．なぜなら，矢印が互い違いな向きになっているからね．また，プレイヤー n とあたる直前の対局は後手，直後の対局は先手だから，プレイヤー n との対局が先手でも後手でも，ここでちょうど1回だけ先手の連続か後手の連続が発生するね．ここまではいいかな．

S：大丈夫です．

T：したがって，circle method で作ったスケジュールは，先手が連続する回数，後手が連続する回数が合計 $n-2$ 回になる．もちろん，理想的なのは

	1	2	3	4	5
1	3先	5後	2先	4後	6後
2	6先	4先	1後	3先	5後
3	1後	6後	5先	2後	4先
4	5先	2後	6先	1先	3後
5	4後	1先	3後	6後	2先
6	2後	3先	4後	5先	1先

図9　全員に先手/後手の連続が1回あるスケジュール

…先後先後先後…というように，先手の連続，後手の連続が全くない，という状況だけれど，そうできるのは最大でも2人までだということはわかる？

S：はい．仮に全員が先手と後手を交互に行うとしたら，先手スタートの人どうしや，後手スタートの人どうしが対局できなくなってしまいます．だから，先手後手が完全に交互になる人はたかだか2人しか作れません．

T：よろしい．だから，先手の連続，後手の連続の回数は最低でも $n-2$ 回はある．Circle method で作ったスケジュールはこの下界を達成しているから，先手の連続，後手の連続の回数を最小にするという意味では最適なものの一つだ．このスケジュールは，canonical schedule[2]と呼ばれていて，他にも良い性質をもつことが知られている．

S：よくできていますねえ．ただ，先手の対局/後手の対局が全く連続しない，プレイヤー1とプレイヤー n の2人だけが何かずるくないですか？

T：そうくると思ったよ．その場合は，図8のスケジュールを2日目から始めて，1日目を最後にもってくればいい．そうすると，全員に先手の連続か後手の連続が1回起きる（図9）．

S：うーん，恐れ入りました．もうお腹いっぱいです．

T：次に，全体の人数が奇数の場合はだな….

S：先生，将棋部は10人ですから．

T：まあ聞けって．来年には人数が奇数になるかもしれないじゃないか．

S：大丈夫ですよ．必ず偶数になります．奇数になったら，先生にリーグ戦に参加してもらいますから．

T：げっ，勘弁してくれよ．お前たち，将棋で俺をいびりたいだけだろう．

S：まあ顧問の仕事だと思ってください．偶数じゃないと休みの人ができて暇なんですよ．

T：ほらほら，顧問の仕事でスケジュールを作ってあげたじゃないか．

S：この方法は，昔の偉い人が考えたんであって，先生が作ったわけじゃないですよね．諦めてください．

T：ずるいぞー！

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

さてはて，T先生の嘆きはともかく，スケジュール作成はうまくいったようですね．リーグ戦に参加する人数が奇数の場合は，仮想的なプレイヤー n を追加し，図7の方法でスケジュールを作ってから，「プレイヤー n と対戦する＝休み」と定義すれば，$n-1$ 人のスケジュールが作成できます．この場合，誰も先手の連続，後手の連続が起こらないきれいなスケジュールとなります（図10）．

	1	2	3	4	5
1	—	3先	5後	2先	4後
2	5後	—	4先	1後	3先
3	4先	1後	—	5先	2後
4	3後	5先	2後	—	1先
5	2先	4後	1先	3後	—

図10 人数が奇数のリーグ戦

参考文献

[1] C. J. Colbourn: Embedding partial Steiner triple systems is NP-complete. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, 35 (1983), 100-105.

[2] D. de Werra: Geography, games and graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2 (1980), 327-337.

[3] T. P. Kirkman: On a problem in combinations. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 2 (1847), 191-204.

[4] A. Rosa and W. D. Wallis: Premature sets of 1-factors or how not to schedule round robin tournaments. *Discrete Applied Mathematics*, 4 (1982), 291-297.