最適化から観た選挙の図解

根本　俊男

1.　はじめに

日本をはじめ多くの民主的な国においては，政治に対する意見表明の自由とその公平な扱いが保障されている．意見表明の具体的な場のひとつが選挙であり，そのため公平性を有する選挙制度のデザインが重要となる．選挙における公平性の議論では，議席数を人口で除した数である**一票の重み**が指標として利用されることが多い．ここでは，一票の重みの格差の縮小を意識しつつ，選挙制度のデザインを最適化の視点から紹介したい．

2.　選挙制度デザインと最適化問題

選挙制度には様々な形態がある．それらは，選挙区数と配分議席数により日本では大きく3分類される．

- 大選挙区制：1選挙区，全議席をそこから選出
- 中選挙区制：複数選挙区，各選挙区で2名以上選出
- 小選挙区制：複数選挙区，各選挙区で1名選出

まず，大選挙区制では1選挙区なので一票の重みの格差は問題にならない．次に，中選挙区制では選挙区の区割画定と各選挙区への定数配分の両方が一票の重みの格差の原因となり制御は単純でない．そのため，県会議員選挙などの格差是正の議論では，区割は固定または一部の変更に留め，議席配分の変更に集中することが多い．このような各選挙区が有する人口と総議席数を所与とし，各選挙区への議席配分数を決める問題を**定数配分問題**とよぶ．最後に，小選挙区制では，各選挙区が有する人口の格差がそのまま一票の重みの格差となる．つまり，格差は区割の定め方で決まる．このような与えられた選挙区数での区割を決める問題を**区割画定問題**とよぶ．以降では定数配分問題と区割画定問題を概説する．

ねもと　としお
文教大学 大学院情報学研究科
〒253-8550 茅ヶ崎市行谷1100

3.　定数配分問題

まずは，各都道府県（以後，各県）への議席配分を例とし，定数配分問題を紹介したい．

総議席数を K，県の集合を I，各県の人口を $p_i (i \in I)$ とする．このとき，総人口は $P=\sum_{i \in I} p_i$ となる．人口に比例して配分するなら，各県に $q_i = p_i \frac{K}{P}$ 議席を配分すればよい．ただし，q_i が整数である保証はない．そこで，q_i の代わりに総和が K となる整数 $d_i (i \in I)$ を見つけるのが定数配分問題である．まとめると，次のように表現できる．

$$
(\mathrm{P}) \left| \begin{array}{ll} \min & \boxed{\quad ? \quad} \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in I} d_i = K, \\ & d_i \text{ は非負整数 } (i \in I). \end{array} \right.
$$

目的関数が不明だが，そこを次の議論の焦点としたい．

3.1　格差の定式化

格差最小を意識し，問題(P)の目的関数を作ってみよう．実数値 q_i との格差に注目するのか，県間格差に注目するのかにより表現が異なる．

はじめに実数値 q_i と d_i との差を格差と捉えてみよう．差の総和を最小化する次の目的関数は有力候補だろう．

$$
(\mathrm{P\,1}) \quad \min \sum_{i \in I} |d_i - q_i|
$$

他にも，$\min \sum_{i \in I} (d_i - q_i)^2$ や $\min \max_{i \in I} |d_i - q_i|$ でもよいだろう．

次に，県間格差に注目すると，各県の一票の重み $\frac{d_i}{p_i}$ または議員一人当たりの人口 $\frac{p_i}{d_i}$ を均一化するミニマックス型が思いつく．

$$
(\mathrm{P\,2}) \quad \min \max_{i \in I} \frac{d_i}{p_i},
$$

$$
(\mathrm{P\,3}) \quad \min \max_{i \in I} \frac{p_i}{d_i}
$$

これらとは別に，一票の重みの平均値 $\frac{K}{P}$ との差が気になるなら，

(P 4)　$\min \sum_{i \in I} \left| \frac{d_i}{p_i} - \frac{K}{P} \right|$

議員一人当たりの平均人口 $\frac{P}{K}$ との差が問題と思うなら，

(P 5)　$\min \sum_{i \in I} d_i \left(\frac{p_i}{d_i} - \frac{P}{K} \right)^2$

(P 6)　$\min \sum_{i \in I} \left| \frac{p_i}{d_i} - \frac{P}{K} \right|$

などが考えられる．

3.2　問題(P 1)の解導出：最大剰余法

次にこれらの目的関数での最適配分を導出しよう．まず，問題(P 1)から取り組む．図1は，x 軸を人口，y 軸を配分議席数に対応させた x-y 平面上に，例として4県（A, B, C, D）の人口を x 軸上に△で示している．ここで総議席数 $K=8$ とする．この図1で各県の q_i の値は，原点を通り傾き $\frac{K}{P}$ の直線と各県の人口との交点●の y 座標が対応する．q_i を超えない最大の整数を $\lfloor q_i \rfloor$ で表すこととし，各県での $\lfloor q_i \rfloor$ を○，$\lfloor q_i \rfloor+1$ を◇，そして $\lfloor q_i \rfloor$ 未満の正整数を◎で図に示した．

ここで，○と◎の総数は総議席数 $K(=8)$ 以下，さらに◇を加えると総議席数 K を超えるので，○か◇が各県の配分数となる実行可能解が存在する．また，ある県で○か◇以外を配分数に定めると，全県で○か◇のどちらかを配分数とするより問題(P 1)の目的関数が大きくなる．つまり，最適配分は各県で○か◇のどちらかを選ぶパターン中に存在する．目的関数値への寄与分から，各県にまずは○で配分し，$q_i - \lfloor q_i \rfloor$（この量を剰余と呼ぶ）の大きい順に（$K - \sum_{i \in I} \lfloor q_i \rfloor$）個の県を選び，それらにさらに1議席ずつ与える（◇を配分数とする）ことで最適解を得る．この例では，A : B : C : D＝1 : 2 : 2 : 3 が最適配分となる．

この導出法は**最大剰余法**とよばれ，実際に衆議院小選挙区制での人口比例議席配分で利用されている．

3.3　問題(P 2)の解導出：ドント法（除数法(1)）

次に問題(P 2)の最適解導出方法に話題を移そう．図2は，図1と同じ例で，各県の人口 p_i の線と y 軸での整数値 $i_i \in \{1, 2, \cdots\}$ の線で格子を形成している．格子点と原点を結ぶ直線の傾きは $\frac{d_i}{p_i}$ となる．問題(P 2)ではこの $\frac{d_i}{p_i}$ の最大値を最小にするよう配分数を決める問題なので，原点から延びる直線を x 軸から傾きを上げていき，通過した格子点順に K 個を選べば最適配分数が決まる．この例では，A : B : C : D＝1 : 1 : 3 : 3 となり，最大剰余法とは異なる配分を導く．

この導出法は，**ドント法**と呼ばれ，実際に参議院選挙比例代表制での各党の当選者数を決める場面等で利用されている．この解法の動きからもわかるように，結果的に議席配分に寄与しなかった人口（選挙では死票とも呼ばれる）の総和を最小化している方法とも解釈できる．

3.4　問題(P 3)-(P 6)の解導出：除数法(2)

ところで，問題(P 2)では格子点を通過時に順番を付けたが，格子点を通過した後にその直上にある格子点に順番を付けるように規則を変えてみよう．つまり，図3において，x 軸から上がっていく直線と各県の人口の線の交点●が格子点間にあるとき，ドント法では直下の○のみに順序付けしていたが，変更後は直上の◇に順序付けすることになる．これらは交点●の y 座標の切り下げと切り上げの違いとも解釈できるので，各々を**切り下げ法**（＝ドント法），**切り上げ法**ともよぶ．切り上げ法では問題(P 3)の最適解が得られることが知られている．

交点●の y 座標の値の切り下げ・切り上げだけでなく，あるしきい値未満なら○を，しきい値以上なら◇を選択するという規則も考えられる（図3）．

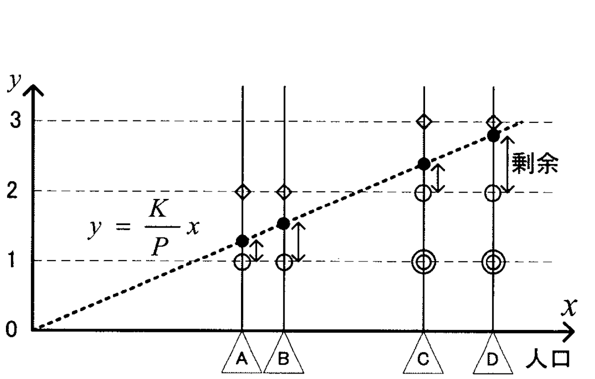

図1　問題(P 1)の最適配分導出法（最大剰余法）

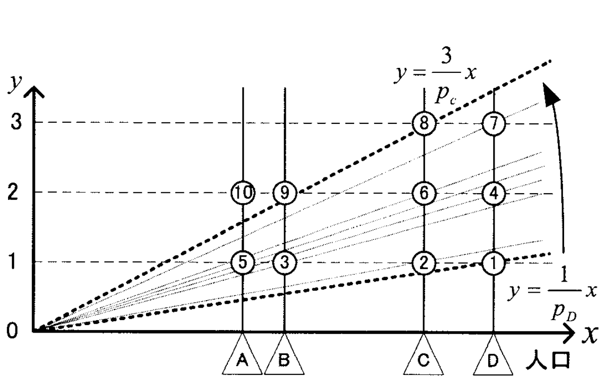

図2　問題(P 2)の最適配分導出法（ドント法）

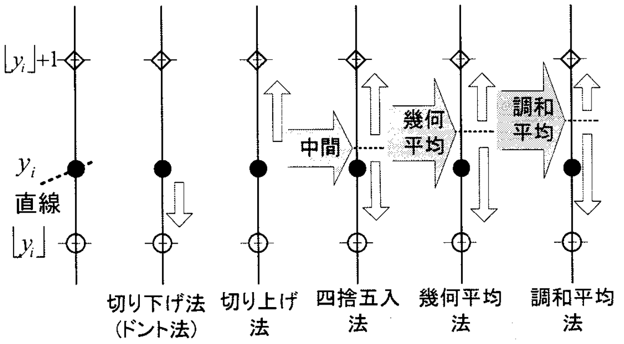

図3　除数法での格子点選択順序規則

そのしきい値を中間点（つまり，$\lfloor y_i \rfloor + 0.5$）に取ると**四捨五入法**，幾何平均（つまり，$\sqrt{\lfloor y_i \rfloor (\lfloor y_i \rfloor + 1)}$）に取ると**幾何平均法**，調和平均（つまり，$\dfrac{2}{\frac{1}{\lfloor y_i \rfloor} + \frac{1}{\lfloor y_i \rfloor + 1}}$）にとると**調和平均法**と呼ばれ，各々，問題(P 4)，問題(P 5)，問題(P 6)の最適配分を導くことが知られている[2][3].

ここで紹介した原点を通る直線の傾きを上げていきながら交点●の位置を元に K 個の点を順に K 個選び配分数を定める形で説明できる５種類の解法はまとめて**除数法**とよばれている．さらに，除数法の説明に用いたしきい値をパラメータ化し一般化された議席配分法も提案されている[3]．なお，最大剰余法，除数法のいずれの最適配分の導出も解探索範囲を容易に絞り込むことができ第 k 要素選択の線形時間解法利用により，県数 $|I|$ に対して線形時間で可能である[4].

定数配分問題は配分法そのものに議論が向きがちである．様々な配分方法に対しての配分結果がもつ特徴付けもなされている[1][7]．ここでの最適化からの見方も別角度からの特徴付けを提供するだろう．

4.　区割画定問題

次に，ある県 i での d_i 個の選挙区設定を例とし，区割画定問題を紹介したい．区割の画定とは，県を d_i 個の地域に分割する作業である．その際，飛び地の禁止や市区郡を分割しないなどが条件となり，一票の重みの格差を少なくすることが望まれる．ここで定数配分問題のときと同様に格差とは何かが不明確である．多様な格差の計測法が考え付くが，一票の重みの最大値と最小値の比が用いられることが多い．

最適化問題として捉えやすそうな問題だが，実際には区割線の引き方にあいまいな点があり，問題の明確化は想像より容易ではない．ただし，単純に捉えて問題の本質を眺めようとするORの大胆なアプローチを用いると，区割画定問題はグラフの分割問題として捉えることができる．

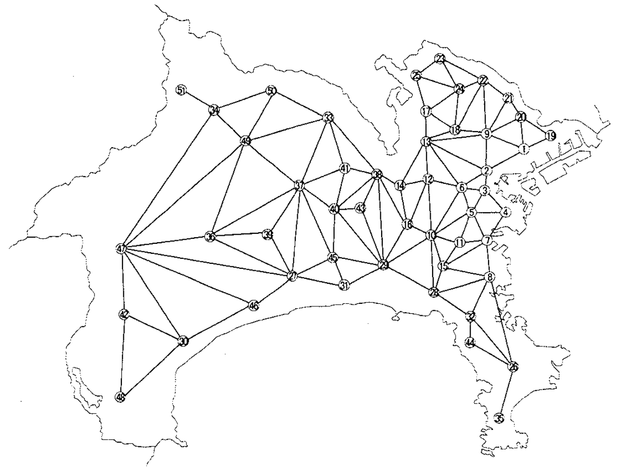

図4　神奈川県の市区郡隣接グラフ

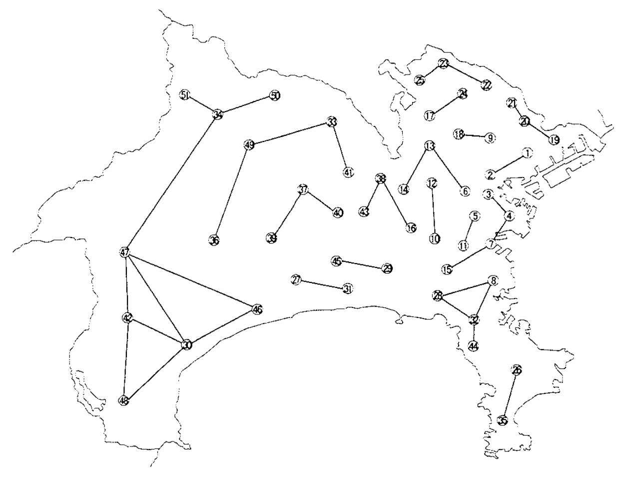

図5　神奈川県の最適区割

まず，市区郡を点とし，市区郡間に地理的隣接の関係がある場合に点間を枝でつなぎグラフを作成する．このグラフは**市区郡隣接グラフ**と呼ばれる．例えば，図4は2006年4月時点の神奈川県の市区郡隣接グラフである．

次に，市区郡隣接グラフの各点に対応する市区郡の人口を点の重みとし，部分グラフの重みを含まれる点の重みの総和とする．このとき，市区郡隣接グラフを d_i 個の連結な部分グラフへの分割パターンの中で，各部分グラフの重みの格差を最小化する分割を見つける問題が区割画定問題と捉えることができる．

このグラフを d_i 分割する問題の最適解の導出には様々なアプローチが考えられるが，グラフのサイズが大きくなると厳密解の導出が困難になる例が多いことに気をつけなくてはならない．図5は神奈川県を18

分割した最適区割である（実際には神奈川県に19議席配分されているが，1議席は相模原市が過大人口を有すため例外処理されている）．

5. 一票の重みの格差の是正に向けて

定数配分問題と区割画定問題は，選挙の実行段階で相互に関係をもつことが多い．例えば，1994年から導入された衆議院選挙小選挙区制では，小選挙区を各都道府県内で設定することが前提となっているため，各都道府県への議席配分数を考慮しながら同時に区割画定を扱う技術が一票の重みの格差を縮小するために必要になる．実際に衆議院小選挙区（300議席）での区割画定問題の厳密解の導出に取り組み，そこからさまざまな新たな知見を得た結果がある[5][6]．そこでは，前節で紹介した従来の配分法とは異なり，区割画定問題の最適区割の情報から一票の重みの格差を最小にする定数配分を見出す配分法（**格差最小配分法**）も提案されている．

6. おわりに

ここでは，ORでは馴染み深い定数配分問題や区割画定問題を題材に最適化問題からの観点を紹介した．選挙制度の背景には政治分野が控えている．政治に対して，ORは馴染まないと感じている人がいるかもしれない．しかし，税金に代表される資源や国が有する権力などの再配分機能が政治の担う一面と捉えるなら，まさしく政治はORこそが活躍できそうな応用分野のひとつである．そもそも，人を説得することが政治活動の柱であるなら，強力な説得力を提供する数理的アプローチの玉手箱であるORを利用しない理由はない．実際の政治活動での状況は詳らかでないが，学術面では『アメリカ政治学会の機関誌（中略）に掲載されている論文の2分の1以上が何らかの形で数理的分析ないし数理的分析にかかわるものになっている』[8]との報告もあり数理モデルは受け入れられている．また，政治学分野で使用されている数理モデルはORとの親和性も高いように見受けられる．選挙制度，そして従来でもORが貢献している投票行動や政策モデルなどに限らず，ORの知見と政治分野での問題意識の交流により新たな展開を期待したい．

参考文献

[1] M. L. Balinski and H. P. Young: *Fair Representation 2nd ed.*, Brookings (2001).

[2] P. G. di Cortona, C. Manzi, A. Pennisi, F. Ricca and B. Simeone: *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, SIAM (1999).

[3] T. Oyama: On a parametric divisor method for the apportionment problem, JORSJ, 34-2 (1991) 187-221.

[4] 伊藤暁, 井上克司：ドント方式の計算について, 電子情報通信学会論文誌, J 89-D, No. 2 (2006) 399-400.

[5] 根本俊男, 堀田敬介：衆議院小選挙区制における一票の重みの格差の限界とその考察, 選挙研究, 20 (2005) 136-147.

[6] 根本俊男, 堀田敬介：一票の重みの格差から観た小選挙区数, 選挙研究, 21 (2006) 169-181.

[7] 大和毅彦：議員定数配分方式について―定数削減, 人口変動と整合性の観点から―, オペレーションズ・リサーチ, 48-1 (2003) 23-29.

[8] 山川雄巳：数理と政治, 新評論 (1998).