離散凸解析—離散最適化に対するボトムアップ的アプローチ—

森口　聡子

1. はじめに

実数変数に関する最適化（連続最適化）では，凸計画問題が理論的にも実際的にも扱いやすいということが良く知られており，「凸解析」によってその理論体系が完成している．一方，整数変数に関する最適化である離散最適化（組合せ最適化）の分野では，解きやすい問題に現れる構造を「凸性」の観点から捉えようとする研究が展開されてきた．離散格子点上で定義された関数に対して，様々な研究者により「離散凸性」の定義がなされてきたが，中でも，マトロイド・劣モジュラ関数の研究の流れを汲んだ離散凸解析による統一的枠組みが90年代以降注目され，今や多くの成果が報告されている[2][3]．連続最適化で凸関数のもつ良い性質が活かされているように，離散最適化において同様の議論を展開しようというのが，離散凸解析の狙いの一つである．

別の見方をすると，「離散最適化問題を解く」という目的に対して，解の精度の保証がなくても，実用的な解を求めようとするヒューリスティクスを『トップダウン的アプローチ』と解釈するならば，離散凸解析は，同じ目的に対して，効率良く厳密解を求められる問題の構造を理論的に積み上げていく『ボトムアップ的アプローチ』と捉えられよう．

2. 連続変数の凸関数

まず，通常の凸関数について説明する．より詳しくは文献[1]を参照されたい．

連続関数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の実効定義域を

$$\mathrm{dom}_{\mathbf{R}}\, f = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

とする．関数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は，任意の $x, y \in \mathrm{dom}_{\mathbf{R}} f$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して，不等式

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

を満たすときに凸関数と呼ばれる．f が連続である場合は，この凸性の定義は次の中点凸性と等価であることが知られている：

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ (\forall x, y \in \mathrm{dom}_{\mathbf{R}} f). \qquad (1)$$

また，凸関数 f は，任意の $x, y \in \mathrm{dom}_{\mathbf{R}} f$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して，不等式

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \alpha(x-y)) + f(y + \alpha(x-y)) \qquad (2)$$

が成り立つ．この不等式(2)は，2点 x，y における関数値の和 $f(x)+f(y)$ が，2点を結ぶ線分上で同じ距離だけ近づいた2点 $x' := x - \alpha(x-y)$，$y' := y + \alpha(x-y)$ における関数値の和 $f(x')+f(y')$ 以上であることを示している（図1参照）．

凸関数の大域的な最小性は局所的な最小性により保障されるという，最適化において非常に使いやすい性質がある．この性質から，現在の点の関数値と近傍内の関数値を比較し，近傍内に関数値が小さくなる点があれば移動するという降下法により，凸関数 f の最小化が行えることがわかる．また，凸関数は，この他にも双対性と密接な関係がある分離定理などの良い性質をもち，凸解析の理論が連続最適化で用いられている．

次節以降で，凸解析の離散版，離散凸解析において中心的な役割を担っているM/L凸関数を図解していく．

3. M凸関数

本節では交換公理に基づくM凸関数を説明する．なお，M凸関数の「M」はMatroidの頭文字である．

これ以降，離散関数 $f: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対して，

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbf{Z}^n \mid f(x) < +\infty\}$$

として，

$$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{w \in \{1, 2, \cdots, n\} \mid x(w) > y(w)\},$$

もりぐち　さとこ
上智大学 理工学部
〒102-8554 千代田区紀尾井町7-1

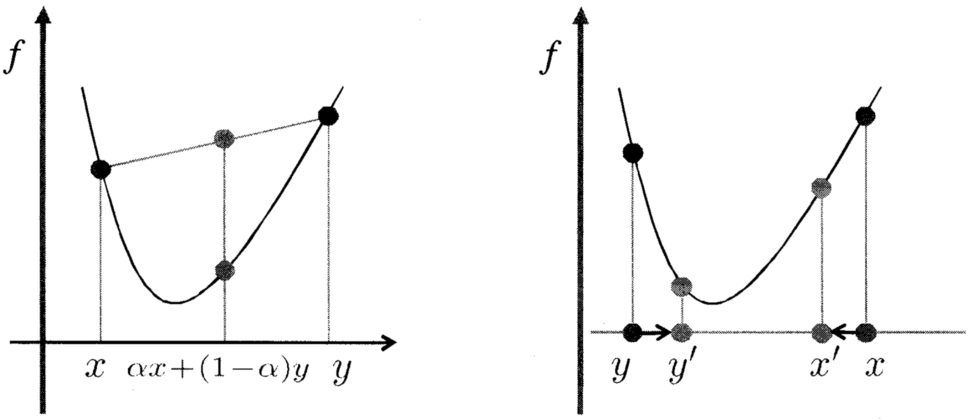

図 1　凸関数の定義と性質

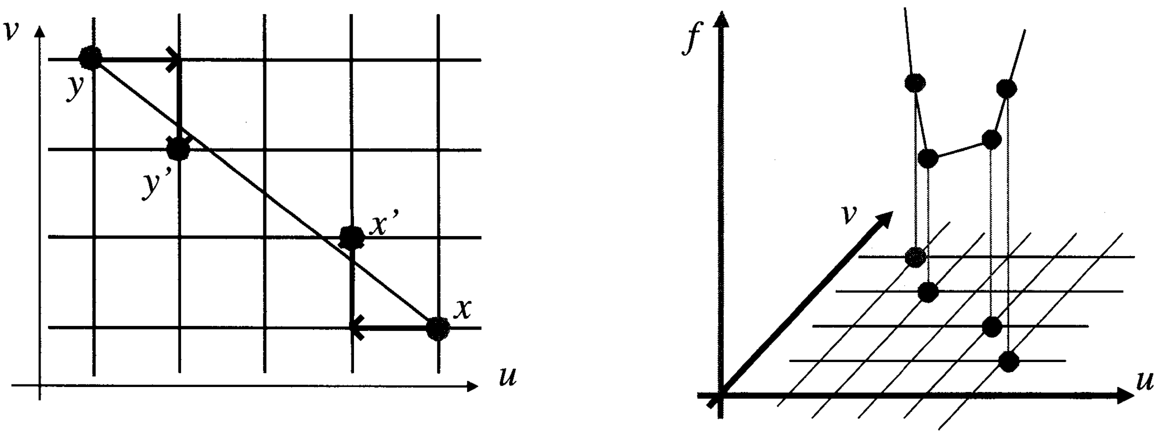

図 2　M 凸関数の定義

$$\mathrm{supp}^-(x-y)=\{w\in\{1,2,\cdots,n\}|x(w)<y(w)\}$$

とする．$\chi_i\in\{0,1\}^n$ は $i=1,2,\cdots,n$ に対する特性ベクトル，すなわち

$$\chi_i(v)=\begin{cases}1 & (v=i)\\ 0 & (v\neq i)\end{cases}$$

とする．また，便宜上，$i=0$ のときは $\chi_i=(0,0,\cdots,0)$ と約束する．

関数 $f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ が M 凸関数であるとは，f が次の交換公理（M-EXC）を満たすことである．

(M-EXC) 任意の $x,y\in\mathrm{dom}\,f$ と任意の $u\in\mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して，ある $v\in\mathrm{supp}^-(x-y)$ が存在し，

$$f(x)+f(y)\geq f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v).$$

ここで，上記の不等式は，$f(x)$ か $f(y)$ が $+\infty$ であるとき成立していると約束する．

式(2)を離散関数 $f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ に対して考えると，接近後の点 x'，y' が整数ベクトルになるとは限らないため，右辺が定義されないことがある．そこで，座標軸に沿った接近による整数ベクトルを x'，y' として採用すると，交換公理は不等式(2)の離散版とみなすことができる．

定義より，M 凸関数 f の実効定義域は成分和が一定の超平面の上に乗っていること，つまり，ある整数 r に対して

$$\mathrm{dom}\,f\subseteq\left\{x\in\mathbf{Z}^n\,\middle|\,\sum_{i=1}^n x_i=r\right\}$$

が成り立つことが導かれる．したがって，n 変数の M 凸関数 f の定義域をある座標軸方向に沿って射影した $n-1$ 変数の関数を考えても情報は失われない．このように導出される M 凸関数と等価な概念は，$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数と呼ばれている．$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数は，(M-EXC) において v を選ぶ範囲を $v\in\mathrm{supp}^-(x-y)\cup\{0\}$ に広げた条件（$\mathrm{M}^\natural$-EXC）により定義される．すなわち，関数 $f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ が $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数であるとは，f が

($\mathrm{M}^\natural$-EXC) 任意の $x,y\in\mathrm{dom}\,f$ と任意の $u\in\mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して，ある $v\in\mathrm{supp}^-(x-y)\cup\{0\}$ が存在し，

$$f(x)+f(y)\geq f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v)$$

を満たすことである．

定義より，（同じ n 変数ならば）M 凸関数は $\mathrm{M}^\natural$ 凸

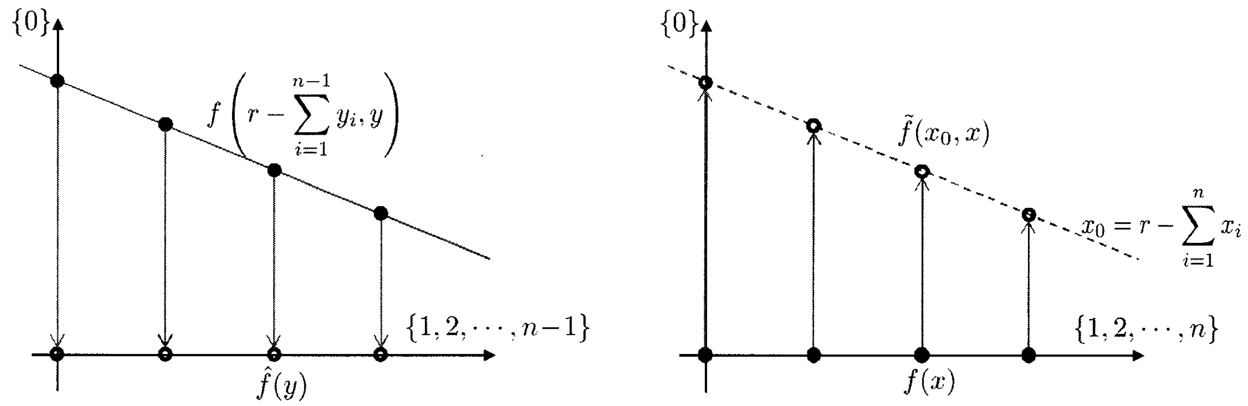

図3　M凸関数とM♮凸関数

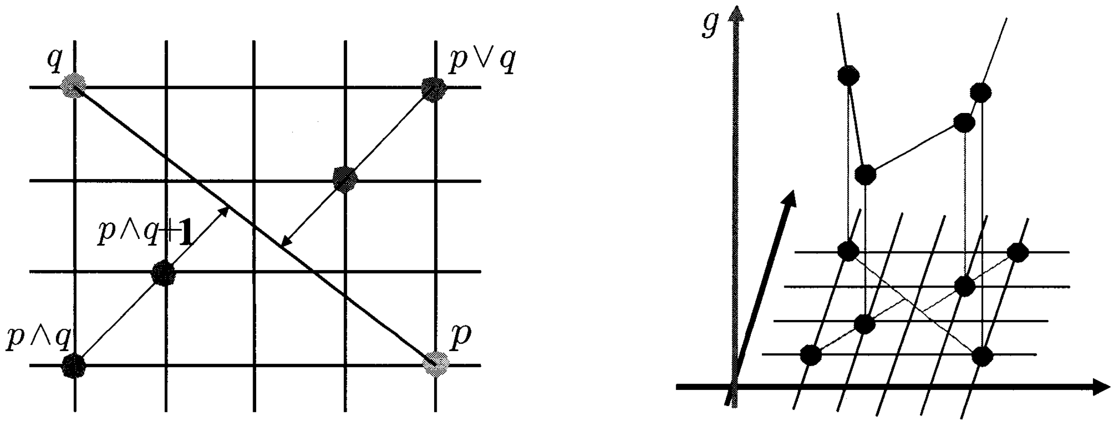

図4　L凸関数の定義

関数の特殊ケースである．ここでは，両者が本質的に等価であることを図3を用いて説明する．n 変数のM凸関数 f が与えられたとき，$n-1$ 変数の関数 $\hat{f}$: $\mathbf{Z}^{n-1}\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$\hat{f}(y):=f\left(r-\sum_{i=1}^{n-1}y_i,\ y\right)$$

(ただし $y\in\mathbf{Z}^{n-1}$) と定義すると，$\hat{f}$ はM♮凸関数になる．逆に，n 変数のM♮凸関数 f が与えられたとき，$n+1$ 変数の関数 $\tilde{f}$: $\mathbf{Z}^{n+1}\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$\tilde{f}(x_0,x):=\begin{cases} f(x) & (x_0=r-\sum_{i=1}^{n}x_i) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

(ただし $x_0\in\mathbf{Z}, x\in\mathbf{Z}^n$) と定義すると，$\tilde{f}$ はM凸関数になる．このように，両者に本質的な差はないので，M凸関数かM♮凸関数かは，場合に応じて使い分ければ良い．

M凸関数の最小値は整数格子点上で局所的に特徴付けられる．連続の凸関数のもつ良い性質の代表である「局所最小性＝大域的最小性」のM凸関数版は，下記の定理で与えられている．

定理3.1 (M凸関数最小性規準)　f : $\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ はM凸関数とする．任意の $x\in\mathrm{dom}\,f$ に対し，

$$f(x)\leq f(y)\ (\forall y\in\mathbf{Z}^n)$$
$$\Longleftrightarrow f(x)\leq f(x-\chi_u+\chi_v)\ (\forall u, v\in\{1,2,\cdots,n\}).$$

上記の局所最小性を判定するには，$O(n^2)$ 回の関数値評価を行えば良い．

4．L凸関数

本節では劣モジュラ性に基づくL凸関数を説明する．なお，L凸関数の「L」はLatticeの頭文字である．

ベクトル $p, q\in\mathbf{Z}^n$ に対して，成分ごとに最大値，最小値をとって得られるベクトルを $p\vee q$，$p\wedge p$ と書くことにし，$\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{Z}^n$ とする．関数 g : $\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ がL凸関数であることは g が2条件

(SBF)　$g(p)+g(q)\geq g(p\vee q)+g(p\wedge p)$

$$(\forall p, q\in\mathbf{Z}^n),$$

(TRF)　ある $r\in\mathbf{R}$ が存在して，

$$g(p+\mathbf{1})=g(p)+r \qquad (\forall p\in\mathbf{Z}^n)$$

を満たすことと定義される．ここで不等式 (SBF) は $g(p)$ か $g(q)$ が $+\infty$ であるときには成立していると約束する．

L凸関数は1方向の線形性 (TRF) をもつので，

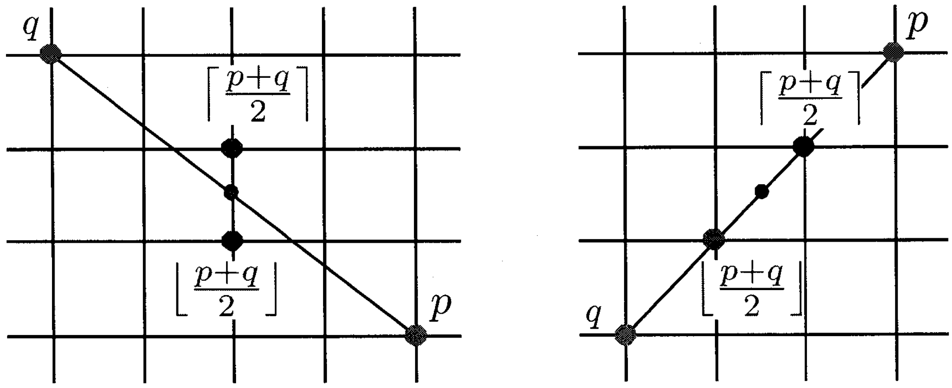

図 5　離散中点凸性

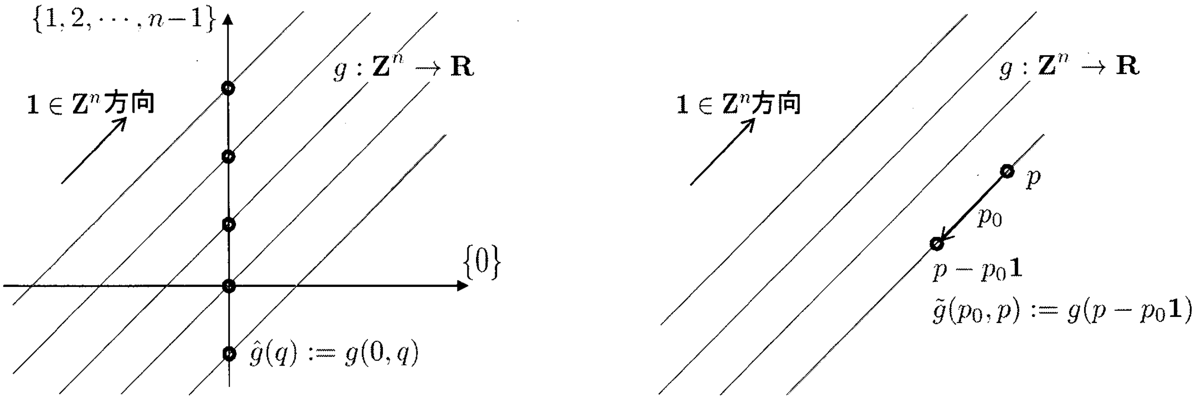

図 6　L 凸関数と L♮凸関数

ある一つの座標値が 0 に等しい超平面に制限した $n-1$ 変数の関数を考えても本質的な情報は失われない．このように導出される L 凸関数と等価な概念は L♮凸関数と呼ばれている．

L♮凸関数は式(1)の離散版と言える離散中点凸性により定義される．すなわち，関数 $g: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が離散中点凸性

$$g(p)+g(q) \geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right)+g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right) (\forall p, q \in \mathbf{Z}^n)$$

をもつとき，g は L♮凸関数である．離散中点凸性を図 5 に示す．

L♮凸関数は，並進劣モジュラ性により特徴付けることが可能である．すなわち，関数 $g: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が並進劣モジュラ性

$$g(p)+g(q) \geq g((p-\alpha\mathbf{1}) \vee q)+g(p \wedge (q+\alpha\mathbf{1})) \quad (\forall \alpha \in \mathbf{Z}_+, \forall p, q \in \mathbf{Z}^n) \quad (3)$$

をもつとき，g は L♮凸関数である（ただし，$\mathbf{Z}_+$ は非負整数全体を表す）．$\alpha=0$ のとき，式(3)は劣モジュラ性に一致する．

ここでは，L 凸関数と L♮凸関数が本質的に等価であることを図 6 を用いて説明する．n 変数の L 凸関数 g が与えられたとき，$n-1$ 変数の関数 $\hat{g}: \mathbf{Z}^{n-1} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\hat{g}(q) := g(0, q)$$

（ただし $q \in \mathbf{Z}^{n-1}$）と定義すると，$\hat{g}$ は L♮凸関数になる．逆に，n 変数の L♮凸関数 g が与えられたとき，$n+1$ 変数の関数 $\tilde{g}: \mathbf{Z}^{n+1} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\tilde{g}(p_0, p) := g(p-p_0\mathbf{1})$$

（ただし $p_0 \in \mathbf{Z}, p \in \mathbf{Z}^n$）と定義すると，$\tilde{g}$ は L 凸関数になる．

$\chi_X \in \{0, 1\}^n$ を集合 $X \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ に対する特性ベクトルとする．L 凸関数の最小性規準は以下の定理で与えられている．

定理 4.1（L 凸関数最小性規準）　関数 $g: \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は L 凸関数で，(TRF) において $r=0$ とする．任意の $p \in \mathrm{dom}\, g$ に対し，

$$g(p) \leq g(q) \ (\forall q \in \mathbf{Z}^n)$$
$$\Longleftrightarrow g(p) \leq g(p+\chi_X) \ (\forall X \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}).$$

ここで，上記の局所最小性の判定は劣モジュラ集合関数

$$\rho_p(X) := g(p+\chi_X)-g(p)$$

の最小化に帰着できる．すなわち，劣モジュラ集合関

数最小化アルゴリズムを用いて，多項式時間で調べることができる．

5. むすび

連続の凸関数が降下法により最小化が行えたように，定理3.1，4.1より，M/L凸関数の最小化に対して降下法が適用できる．さらに，より効率的な多項式時間アルゴリズムも提案されている．非線形離散最適化問題を解く鍵として，離散凸解析に関するより詳しいことを知りたい読者は，参考文献[2][3]を参照していただきたい．

参考文献

[1] 福島雅夫: "非線形最適化の基礎," 朝倉書店, 2001.
[2] 室田一雄: "離散凸解析," 共立出版, 2001.
[3] K. Murota: "Discrete Convex Analysis," SIAM, 2003.