主双対近似解法

宮本裕一郎

1. はじめに

「平面上に白い点と黒い点が同数ずつあるとき，白い点と黒い点を結ぶ線を引く．線同士が交差しないように結べるだろうか？」以前どこかでこのような問題を出された．組合せ最適化の研究者が集まると，このような数理パズル（のような問題）の出し合いになりがちである．図1に問題の例と結んだ線の例（失敗例）を示す．点の数が増えてくると，本当に線が交差しないように結べるのかあやしい．

このように，点が1線分の端点になるように引いた線分の集合をマッチングという．特に，すべての点がいずれかの線分の端点になっているものを完全マッチングという．組合せ最適化っぽい文脈では，線分を枝とよぶことが多い．マッチングに含まれる枝の長さの和をマッチングの長さとよぶことにする．マッチングを扱う問題には様々な種類があるが，ユークリッド平面上に偶数個の点が与えられたとき，長さが最小となる完全マッチングを見つける問題はその最も単純なものの1つである．これは平面マッチング問題（Euclidean matching problem, geometrical matching problem）とよばれる．

本稿ではこの平面マッチング問題を例に主双対近似解法を紹介する．冒頭の問題はマッチングの枝の候補が2部グラフの場合の，平面マッチング問題はマッチングの枝の候補が完全グラフの場合のグラフ上の完全マッチングを扱っているとも見なせる．

2. 定式化と双対問題

平面マッチング問題の定式化の準備として，カットの概念を導入する．グラフの点集合を2分割したとき，その端点がちょうど両者に含まれる枝の集合をカットという．平面マッチング問題ではグラフの点が偶数個なので，分割は偶数・偶数か奇数・奇数かのいずれかである．奇数・奇数の分割によるカットを奇カットという．Vを点集合，Eを点集合Vからなる完全単純無向グラフ$K_{|V|}$の枝集合，Cを$K_{|V|}$の奇カットの集合，$\delta(v)$を点vに接続する枝の集合，c_eを枝$e=\{v, w\}$の長さ，すなわち点vとwのユークリッド距離とする．平面マッチング問題を整数計画問題として定式化すると

$$\text{minimize} \sum_{e\in E} c_e x_e \tag{1}$$

$$\text{subject to} \sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1,\ \forall v\in V, \tag{2}$$

$$\sum_{e\in D} x_e \geq 1,\ \forall D\in C, \tag{3}$$

$$x_e\in\{0, 1\},\ \forall e\in E, \tag{4}$$

となる．ここでx_eは枝eが完全マッチングに含まれるときに1，そうでないときに0となる変数である．式(2)は，どの点もちょうど1つの枝の端点になることを示している．式(3)は，完全マッチングの枝が必ずいずれかの奇カットに含まれることを示している．完全マッチングの枝がどの奇カットにも含まれないならば，奇数個の点部分集合で完全マッチングができてしまうことになりおかしいからである．この整数計画問題の式(4)を線形緩和し，式(2)を緩和すると

$$\text{minimize} \sum_{e\in E} c_e x_e \tag{5}$$

$$\text{subject to} \sum_{e\in D} x_e \geq 1,\ \forall D\in C, \tag{6}$$

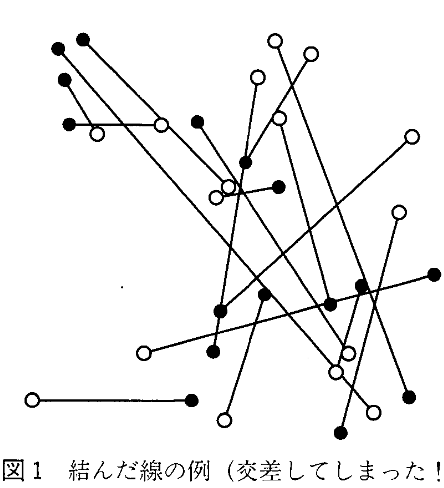

図1 結んだ線の例（交差してしまった！）

みやもと ゆういちろう
上智大学 理工学部
〒102-8554 千代田区紀尾井町7-1

$$x_e \geq 0, \forall e \in E, \tag{7}$$

となる．この線形計画問題の双対問題は

$$\text{maximize} \sum_{D \in C} Y_D \tag{8}$$

$$\text{subject to} \sum_{e \in D} Y_D \leq c_e, \forall e = \{v, w\} \in E, \tag{9}$$

$$Y_D \geq 0, \forall D \in C, \tag{10}$$

となり，この双対問題の最適値は平面マッチング問題の最適値の下界となっている．この双対問題の幾何的解釈として，Jünger と Pulleyblank の解釈（と言われているもの）を紹介する．

3. 双対問題の幾何的解釈

平面上に点が与えられたとき，いくつかの点を囲む帯状の領域を描く．これを堀とよぶことにする．奇数個の点を囲んでいる堀を奇数堀，偶数個の点を囲んでいる堀を偶数堀とよぶことにする．堀を複数描くときは，堀同士が重ならないように描く．偶数堀は見えないくらい細くなければならないとする（図2参照）．堀の内側から外側へ移動する際に，泳がなければならない距離の最小値を堀の幅とよぶことにする[1]．図2の最も右の点は帯状の領域に囲まれているのではなく，円に含まれているように見えるかもしれない．しかし，点とちょうど同じ場所に見えないくらい小さい穴があいているのである．堀は点分割を表しているとも解釈できるのでカットに対応しているが，1点の周りに同心円状に堀がある場合を想像すると，1つのカットに対して複数の堀が対応する場合もあることがわかる．それぞれの奇カット D に対応する奇数堀の幅の和を Y_D とすると，双対問題の制約条件を満たすので，堀の描画は双対問題の実行可能解に対応している．このとき，奇数堀の幅をすべての堀に関して足し合わせたものが目的関数値である．よって奇数堀の幅の和がなるべく大きくなるように堀を描くと元の問題（平面マッチング問題）の最適値の良い下界が得られそうである．

4. 幾何的解釈と主双対近似解法

この幾何的解釈を元に完全マッチングを見つける近似解法を紹介する．これは Goemans と Williamson [1]によるものである．近似解法は「堀の拡張」と「完全マッチング化」の2段階からなる．

堀の拡張は以下の規則に従うものとする．

(1) 各点が極薄い堀で囲まれている状態から始める．

(2) 最新の堀に関して，それが奇数堀ならば等速度で堀を拡張する．

(3) どこかで堀同士が接したら，堀が接する原因となった点同士を枝で結び，それぞれの堀の外側に極薄い堀を新たに作る．

堀の拡張の様子を図3に示す．図3では同じ時期に作られた堀は同じ色であり，新しい堀ほど色が濃くなるように描いてある．最新の堀のすべてが偶数堀になったら拡張終了である．元々，点は偶数個なので堀の拡張は必ず終了する．堀の拡張終了時点で点同士を結ぶ枝が偶然完全マッチングになっていたら，完全マッチング化の必要はない．

完全マッチング化は「枝消去」と「枝回転」の2段階からなる．堀の拡張が終了した時点で，枝は森を形成しているはずなので，森の各連結成分（すなわち木）を完全マッチング化する．木から枝を1本消すと2つの木になるが，この2つの木がともに偶数個の点からなるようならば枝を消す．これを枝消去とよぶ．図4の左上の連結成分に枝消去の例を示す．破線が消去された枝である．枝消去を繰り返し，完全マッチングが得られるようならば，完全マッチング化終了であ

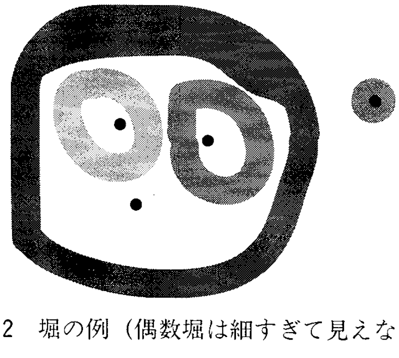

図2　堀の例（偶数堀は細すぎて見えない）

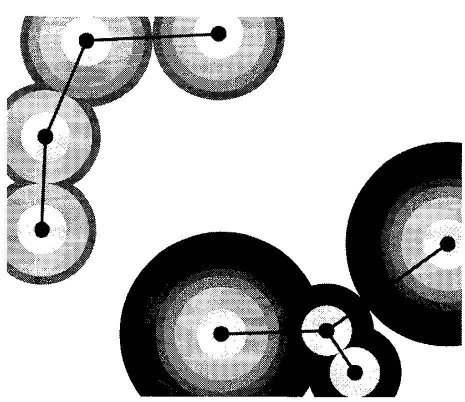

図3　堀の拡張

[1] ここでいう堀は水堀なのでござる．

る．枝消去ができなくなっても完全マッチングになっていないならば（図3の右下の連結成分がその例であるが），枝回転を行う．枝消去ができなくなった時点では，マッチングになっていない木には「共通の内点に隣接する2つ以上の葉」があるはずである[2]．その葉同士を枝で結び，内点と結ばれていた枝を消す．これを枝回転とよぶ．平面マッチング問題では枝の長さに関して三角不等式が成り立つので，枝回転によって森の枝の長さの和が増えることはない．図4では右下の連結成分に枝回転を施してようやく完全マッチングが得られた．

堀の解釈（双対問題の幾何的解釈）から，堀の幅をすべて足し合わせたものは最適値の下界になっている．よって，マッチングの枝がすべて堀と重なり，かつ，堀の境界と直交しているとき，完全マッチングは最適解である．枝回転をせずに得られた完全マッチングは，上記の条件を満たすので最適解である．参考のため，

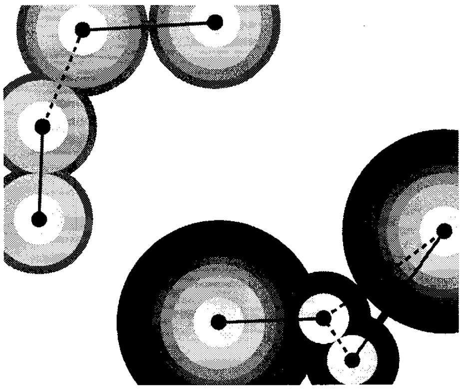

図4　完全マッチング

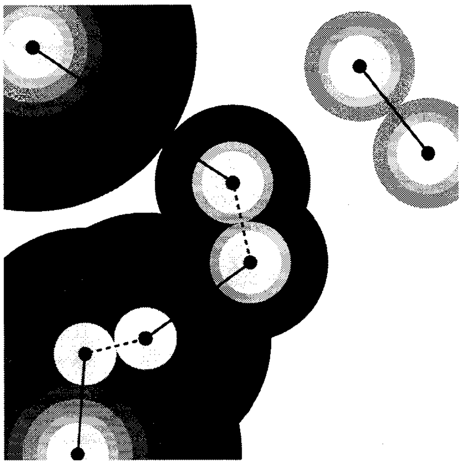

図5　最適完全マッチング

最適解が得られた例を図5に示す．図5のマッチングが最適完全マッチングであることはもちろんだが，堀の描画もまた双対問題の最適解に対応している．

得られた完全マッチングが最適解の条件を満たしていない場合は，枝と堀が重なっていない長さと，枝と堀が直交せずに重なっている長さの和が，最適値の下界との差になっているので，視覚的にわかりやすい．図4の例では，マッチングの最も右の枝の堀と重なっていない部分（少しだけ太い部分）の長さが下界との差を表しており，マッチングの長さに比べて小さいことが視覚的に分かる．

5．近似精度保証

紹介した近似解法により得られる解の値は，最適値の2倍以内であることが保証されている（よって近似解法とよばれている）．本節ではその保証を解説するが，少々複雑なので読み飛ばしていただいてもかまわない．近似精度の保証は「枝回転前（ただし枝消去後）の森の枝の長さの和が最適値の2倍以下であること」により示される．これをこれから図6（枝消去できない木）を見ながら示すが，堀の色ごとに「枝が堀と重なっている部分の長さは堀の幅の和の2倍以下である」ということを示せば十分である．偶数堀は極薄なのでその幅は無視できる．色ごとに奇数堀の幅は同じなので，各色の奇数堀について「奇数堀と枝が重なる回数は奇数堀の数の2倍以下である」ということを示せばよい．これは言い換えるならば，奇数堀を1点とみなした木において，奇数堀（を1点と見なした点）の次数の和が奇数堀の数の2倍以下ということである．図6の2番目に薄い色の堀に関して，堀を1点

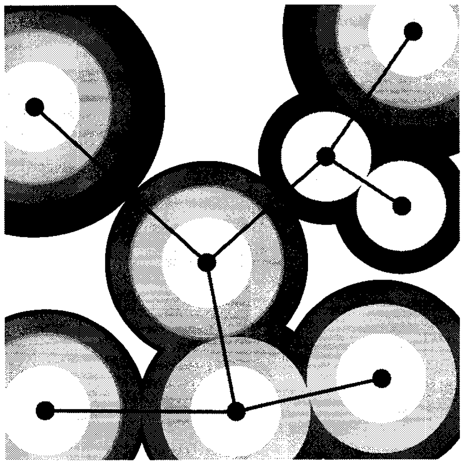

図6　枝消去できない木

[2] 自明ではないが，絵を描いてみれば簡単に納得できる．

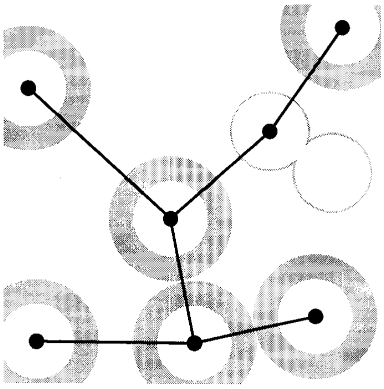

図7　2番目に薄い色の堀を1点と見なした木

と見なした木を図7に示す．この図では，本来見えないはずの偶数堀も若干太く描いてある．図より，堀を1点と見なした木では，葉に対応する堀は必ず奇数堀であることがわかる．これは，葉に対応する堀が偶数堀ならば，そこを分離するように枝消去できてしまうからである．葉に対応する部分が必ず奇数堀なので，奇数堀の次数の合計は，奇数堀の数の2倍以下である．（一般に木の点にラベルを付ける場合に，すべての葉にラベルをつけるならば内点にどのようにラベルをつけようとも，ラベルがついた点の次数の和はラベルの数の2倍以下である．この証明は紙面の都合上省略する．）

6.　おわりに

本稿では平面マッチング問題を例に（多項式時間）主双対近似解法を紹介した．より一般的なグラフ上の最小重み完全マッチング問題に多項式時間厳密解法があることは有名なので，近似解法の価値を疑われる方も多いと思う．しかし，この枠組みの主双対近似解法は，平面マッチング問題のみならず，多くの組合せ最適化問題に適用可能な汎用的な近似解法であり[3]，施設配置問題やシュタイナー木問題を拡張した問題に適用され良好な結果が報告されている．あえて平面マッチング問題を例に出したのは，幾何的解釈の図がきれいであるから，ただそれだけの理由である．平面マッチング問題の解法は本機関誌にも度々登場しており，20年前の特集号「ORの図解」にも登場した人気者である．どの業界にも世代を超えた人気者がいると実感させられる．

特に1980年代，1990年代には種々の組合せ最適化問題に対して多くの近似解法が作られた[2]．その中でも，主双対近似解法はわかりやすさ，美しさ，解法を設計する際の使い勝手の良さなどから筆者は好きである．なお，主双対近似解法は論文によっては貪欲解法と記されている場合もあるので注意が必要である．本稿で例に挙げた近似解法も，ある意味貪欲に堀を作り続ける形になっており，貪欲解法という解釈もあり得る．

筆者は数式を多用した解説の方が正確に理解できるので好きである．しかし，数式が1つ増えるたびに読者は半分に減るという俗説に従い，この解説では数式を極力排除した．1人でも多くの方に図解を楽しんでいただけたならば幸いである．

最後に，冒頭の問題であるが，すべての点が一般の位置にあるならば，答えはYESである．白と黒の点が与えられた場合にも，長さが最小となる完全マッチングがあるはずであり，そのマッチングにおいて線が交差していたらおかしい．

参考文献

[1] Goemans, M. X. and Williamson, D. P.: A general approximation technique for constrained forest problems, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 24 (1995), 296-317.

[2] Vazirani, V. V.: *Approximation Algorithms*, Springer-Verlag, 2001.

[3] Williamson, D. P.: The primal-dual method for approximation algorithms, *Mathematical Programming*, Vol. 91 (2002), 447-478.