Dependent Rounding Technique（従属丸め技法）—最小カット問題の整数性—

松井　知己

1. はじめに

本稿では，最小カット問題の整数性について，従属丸め技法（dependent rounding）を使った証明を試みる．

最大フロー最小カット定理は，ネットワーク計画等の授業で触れることの多い，重要かつ基本的な定理である．最大フローのアルゴリズムを説明すれば，そこから最小カットを構成することができ，最大フロー最小カット定理を証明することもできる．しかし，最大フロー最小カット定理は線形計画法の強双対定理の特殊ケースでもあり，強双対定理を知っている学生に，その具体例として示したいケースもある．そのとき問題になるのは，最小カット問題の整数性である．最大フロー問題は，枝容量が整数ならば整数最適解があることが知られており，こちらの整数性は多くの本でも取り上げられているが，最小カット問題の整数性について取り上げている（教科書レベルの）本はあまりない．本稿では，最小カット問題の整数性，すなわち線形緩和問題が整数最適解をもつことを，従属丸め技法と呼ばれるテクニックを使って証明する．この証明は，従来のラベリング法のような手続きを必要とせず，簡潔に証明を記述できる．その上実は，非整数解から最小カット自体も簡単に得られるという特徴をもつ．是非授業やゼミ等で試みられたい．

従属丸め技法は，Bertsimas, Teo and Vohra[1]によって開発された技法であり，様々な問題の整数性の証明や，乱択近似解法（randomized approximation algorithm）の構築に用いられている．（従来の乱択解法に使われている丸め法の多くは，これに対して独立丸め技法（dependent rounding）と呼ばれる．）

まつい　ともみ
中央大学 理工学部
〒112-8551 文京区春日 1-13-27

2. 最小カット問題

本稿では，有向グラフ $G=(V, A)$ を対象とする．また始点，終点の対 $s, t\in V$ が与えられているとする．各有向枝 $a\in A$ に対し，正の枝容量 $c(a)$ が定義されているとする．このとき最大 $(s\text{-}t)$ フロー問題は，次のように定義される線形計画問題である．

$$
\begin{aligned}
\text{P: } & \max.\ x_0 \\
& \text{s.t.}\ \sum_{a\in \text{Out}(v)} x(a) - \sum_{a\in \text{In}(v)} x(a) = \begin{cases} x_0 & (v=s), \\ 0 & (\forall v\in V\setminus\{s, t\}), \\ -x_0 & (v=t), \end{cases} \\
& \qquad c(a)\geq x(a)\geq 0 \qquad (\forall a\in A).
\end{aligned}
$$

ここで $v\in V$ に対して $\text{Out}(v)$，$\text{In}(v)$ は，それぞれ v を始点，終点とする有向枝の集合である．変数 $x(a)(a\in A)$ は，有向枝 a に流れるフロー量を表す．この問題に対する双対問題は以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\text{D: } & \min.\ \sum_{a\in A} z(a)c(a) \\
& \text{s.t.}\ z(a)\geq y(v)-y(u) \qquad (\forall a=(u, v)\in A), \\
& \qquad y(t)=y(s)+1, \\
& \qquad z(a)\geq 0 \qquad (\forall a\in A).
\end{aligned}
$$

上記の問題で，すべての変数が 0-1 変数であるとした 0-1 整数計画問題が最小カット問題となる．

上記の主問題と双対問題の対は，強双対定理から，その最適値は一致することが知られている．そこで，双対問題の最適解の中に，すべての変数が「0 または 1 のどちらかの値をもつ」ものがあれば，それは 0-1 制約を入れた問題（最小カット問題）の最適解でもあり，最大フロー最小カット定理が証明できたことになる．

3. 整数性の証明

以下では，問題 D の最適解の中に，すべての変数が「0 または 1 のどちらかの値をもつ」ものがあるこ

とを証明しよう．まず，問題Dの最適解を一つもってきて(y^*, z^*)とする．(厳密にはここで，問題Dが最適解をもつことを示しておく必要がある．もちろん，問題Dは許容解をもち，問題Pも許容解をもつことから，問題PとDはどちらも最適解をもつ．ちなみに，主問題と双対問題の対が許容解をもつならば双方が最適解をもつことは，線形計画の基本定理であるが，その証明は決して初学者に易しいものではない．)

問題Dの目的関数係数（枝容量）が正であることと制約式から，

$$\forall a=(u, v)\in A, z^*(a)=\max\{y^*(v)-y^*(u), 0\} \tag{1}$$

が成り立つことが分かる．これは，変数$y(v)$をすべて固定すると，(枝容量が正であることから) 各$z(a)$は可能な限り小さな値にした方が目的関数が小さくなることから明らかである．

次に，ネットワーク理論に慣れている人にはおなじみの性質を導こう．

(i)　$y^*(s)=0$となる最適解が存在する．

もし最適解において$y^*(s)\neq 0$であったならば，各項点$v\in V$に対し，$y^*(v)-y^*(s)$の値を，改めて$y^*(v)$に置き換えよう．この置き換えによって，上記の式(1)で与えられる$z^*(a)$の値は変わらないことから，目的関数値は変わらず，最適性は保たれる．$y^*(s)=0$より，$y^*(t)=1$が導かれる．

(ii)　$\forall v\in V, y^*(s)\leq y^*(v)\leq y^*(t)$となる最適解が存在する．

現在の解が上記を満たしていなかった場合，任意の項点$v\in V$に対して，$y^*(v)$を$\{y^*(s), y^*(v), y^*(t)\}$という3つの値の中央値 (median) に置き換えて得られる解を改めて$y^*(v)$とする．この置き換えによって，$\forall v\in V, y^*(s)\leq y^*(v)\leq y^*(t)$が成立し，また上記の式(1)で与えられる$z^*(a)$の値は同じである（あるいは，より小さくなる）ことから，最適性は保たれる．

上記の性質は，$y^*(v)$の高さに頂点を配置した図を描き，目的関数は，任意の有向枝(u, v)に対して，uよりvが高いときだけ，その差$y^*(v)-y^*(u)$の枝容量倍が目的関数に反映されることを示唆すれば，直感的に納得できる性質かもしれない．

上記より，最適解(y^*, z^*)は，

$$\forall v\in V, 0=y^*(s)\leq y^*(v)\leq y^*(t)=1$$

を満たしていると仮定して良いことが分かる．さてやっと，従属丸め法の登場だ．

各項点vに対して，各変数$y(v)$を確率$y^*(v)$で1に切り上げるのが，この丸め法の基本である．このとき各項点の丸め方に従属性がある．正確には，変数$y(v)$を0または1に丸めて得られる解を確率変数$Y(v)$で表し，これを区間$[0, 1)$上の一様乱数Uを用いて，

$$Y(v)=\begin{cases}1 & (U<y^*(v)),\\ 0 & (U\geq y^*(v)),\end{cases}$$

と定義する．このとき用いる一様乱数Uは，すべての項点で共通のものを（1つ用意して）用いるのが重要である．上記の丸め法の手続きは，図1のように各項点vに対して高さ$y^*(v)$の棒グラフを用意し，Uの値に対応する高さに横の直線を引いたとき，直線が棒と交わるならば1に切り上げ，交わらない場合は0に切り下げることに対応する．図1では，項点v_2, v_kの変数が1に切り上げられ，項点v_1, v_3の変数が0に切り下げられる．

上記の丸め法に対応して，各枝$a\in A$に対応する確率変数$Z(a)$を

$$Z(a)=\max\{Y(v)-Y(u), 0\}$$

と定める．上記から明らかなように，$Z(a)$も常に0または1の値を取る．さらに，任意の枝$(u, v)\in A$に対し，「$y^*(u)\geq y^*(v)$ならば$Z(a)$は常に0となる」ことが分かる（図2左を参照）．また$y^*(u)<y^*(v)$ならば，$Z(a)$が1となるのは，$(Y(u), Y(v))=(0, 1)$となるときであり，すなわち$y^*(u)\leq U<y^*(v)$であるときに限ることが分かる（図2右を参

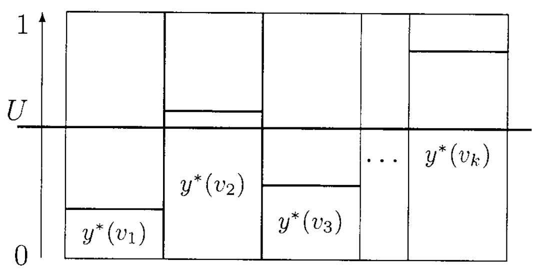

図1　従属丸め技法

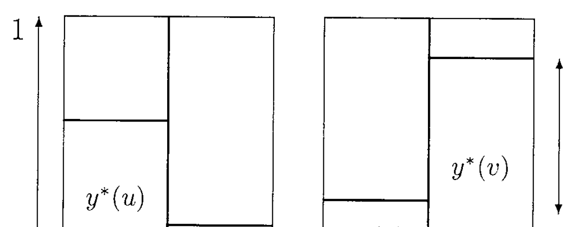

図2　確率変数$Z(a)$の期待値

照)．この事象が発生する確率は，U が一様乱数であることから，$\mathrm{Prob}\,[y^*(u) \le U < y^*(v)] = y^*(v) - y^*(u)$ である．上記より常に $\mathrm{E}\,[Z(a)] = \max\{y^*(v) - y^*(u), 0\} = z^*(a)$ が導かれる．

では，証明の仕上げをしよう．生起確率が正であるような $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ の組は，(a)すべての要素が「0 または 1 の値をもつ」，(b)問題 D の許容解である．また，(c)解 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ に対応する目的関数の期待値は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,[\sum_{a \in A} c(a) Z(a)] &= \sum_{a \in A} c(a) \mathrm{E}\,[Z(a)] \\ &= \sum_{a \in A} c(a) z^*(a)\end{aligned}$$

が成り立ち，問題 D の最適値に等しい．(期待値の性質より) 期待値以下の目的関数値をもつ $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ の組が必ず存在することから，D の整数許容解 (0-1 許容解) で，対応する目的関数値が D の最適値以下のものが必ず存在することが導かれる．以上より，問題 D の最適解で，すべての変数が「0 または 1 の値をもつ」ものが必ず存在する．

整数性の証明は以上で終了である．ちなみに，最適解となるカットを見つけることも簡単にできる．任意のカット (問題 D の 0-1 許容解) は，D の最適値以上の値をもつことから，期待値が D の最適値に等しいということは，生起確率が正のカットは，すべて D の最適値と同じ目的関数値を取る．すなわち，実は変数 U を $[0, 1)$ 上のどの値にとっても，そこから生成される解 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ は必ず最小カットとなっている．

4. おわりに

本稿では，有向グラフの最小 s-t カット問題の整数性の証明に，従属丸め技法を用いた．文献[1]では，他の問題についても，様々な (楽しい) 従属丸め法を紹介している．また MIN SAT 問題等の NP 困難な問題について，従属丸め技法を用いた近似解法の提案を行っている．

本稿の証明と同様の手続きで証明できるものに，重みなし 2 部グラフの「最大マッチング最小被覆定理」における最小被覆問題の整数性の証明などがあるが，これを書き下すとジグソーパズルのピースがぴたりとはまる感覚があり，非常に心地よい．興味のある読者は是非試みられたい．

従属丸め技法を使った証明は，確率の知識を使う分負担があるが，「最大フロー最小カット定理」のような重要な定理が，最大フロー問題のアルゴリズムを使うことなく証明できることは，教育的にも良い面があると筆者は感じている．

参考文献

[1] D. Bertsimas, C. Teo and R. Vohra : "On dependent randomized rounding algorithms," Operations Research Letters, 24 (1999), 105-114.