在庫管理と離散凸関数

森口　聡子

1. はじめに

在庫管理の理論は，古くから多くの研究がなされており，理論面・実用面ともに多くの教科書，参考書[1][2][3][9][16]が出版されている．オペレーションズ・リサーチ学会誌でも既に連載の解説記事が掲載されている[15]．現代の企業活動の管理手法のひとつで，原材料調達から生産・物流・販売を経て消費者に渡る全体プロセスを扱う SCM (Supply Chain Management) を実践する上でも，在庫管理はその基礎的な中核の一端を担っている．

一方，離散凸関数に関しては，主に離散格子点上で定義された関数に対して様々な研究者により定義がなされ，理論研究が展開されてきた．その中でも，マトロイド・劣モジュラ関数の研究の流れを汲んだ離散凸解析による統一的枠組みが 90 年代以降注目され，今や多くの成果が報告されている[12][13]．

一見，縁遠い関係にあると思われがちな両者の間の興味深い関わりを解説するのが，本稿の目的である．離散凸関数の理論研究が，在庫管理理論にもたらした成果を中心に説明していきたい．

2. 各種在庫モデル

在庫理論は，製品の需要を効率的に満たすことを目的とし，在庫水準の管理を扱う．供給者側は，消費者の需要に応じるために必要な商品を仕入れたり，製品加工のための材料を発注し，それらを適当な期間，倉庫に貯蔵する．ここで，正の在庫量には保管在庫費用，負の在庫量には品切れ損失費用，そして発注して在庫量を増やすことには発注費用といった，各種の費用が生じる．また，発注された商品や材料は通常，配達に時間を要する．この発注から受入れまでの時間はリードタイムといわれ，確定的な場合と確率的な場合に区別される．発注量や需要量が連続値をとるか離散値をとるかについても分類される．さらに，限りある施設，時間，資金による制約や，在庫の管理の仕方，ルールによる制約・費用など，在庫の問題を取り巻く要因は多数存在する．

例えば，一口に品切れ損失費用といっても，扱う品目や在庫管理業務の運用方法により，未納注文（あるいは繰越注文）を許すバックオーダーモデルと，許さない売り損じ（lost-sales）モデルという異なるモデルとそれに伴う費用が考えられる．両者とも，予測よりも需要量が多く，在庫切れを起こした場合をモデル化しているが，バックオーダーモデルでは，在庫切れ時の需要は顧客が待っていてくれるため将来満たされるのに対し，売り損じモデルでは，顧客は他社に囲い込まれてしまうため，在庫切れ時の需要が満たされることはない．

在庫が多品種から成るとき，しばしば同時に管理調整を行う必要があり，各品種を個別に取り扱うことができないため，一品種の場合と区別してモデル化される．また，対象計画期間は一期間なのか，多期間なのか，あるいは無限期間なのか，という観点からも区別される．

以上の要因のいくつかを取り上げ，総費用を最小にするような在庫方式を検討する際に，離散凸関数とその理論が貢献していることを 4 節以降で解説していく．

3. 離散凸関数

離散凸関数にまつわる概念は多数存在するが，ここでは在庫管理の研究に関係するものだけを取り上げることにする．その他の概念については，[12][13]を参照されたい．

点 $x\in\mathbf{R}^n$ の整数近傍を

$$N(x)=\{y\in\mathbf{Z}^n \mid \lfloor x(i)\rfloor\le y(i)\le\lceil x(i)\rceil,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

と定義する．関数 $f:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$ は任意の $x,y\in\mathbf{Z}^n$ と任意の $\alpha\in\mathbf{R}, 0\le\alpha\le 1$ に対して

もりぐち　さとこ
上智大学 理工学部
〒102-8554 千代田区紀尾井町 7-1

$$\min\{f(z)|z\in N(\alpha x+(1-\alpha)y)\}$$
$$\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

を満たすとき，Millerの離散凸関数といわれる．

L凸関数は，整数格子点上で定義された関数のクラスとして，離散凸解析において中心的な役割を担っている．

$V=\{1,\cdots,n\}$とおく．ベクトル$p,q\in\mathbf{Z}^n$に対して，成分ごとに最大値，最小値をとって得られるベクトルを$p\vee q$，$p\wedge q$と書くことにし，$\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{Z}^n$とする．関数$g:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$がL凸関数であることは$g$が2条件

(SBF) $g(p)+g(q)\geq g(p\vee q)+g(p\wedge q)\ (p,q\in\mathbf{Z}^n)$,

(TRF) $\exists r\in\mathbf{R}:g(p+\mathbf{1})=g(p)+r\ (p\in\mathbf{Z}^n)$,

を満たすことと定義される．

関数$g:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$が$\mathrm{L}^\natural$凸関数であるとは，

$$g(p_1,\cdots,p_n)=\tilde{g}(0,p_1,\cdots,p_n) \tag{1}$$

となるL凸関数$\tilde{g}(p_0,p_1,\cdots p_n)$が存在することである．$\mathrm{L}^\natural$凸関数はMillerの離散凸関数である．

実数ベクトルを変数とする関数についてもL凸性は定義されている．関数$g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$がL凸関数であることは$g$が2条件

(SBF[R]) $g(p)+g(q)\geq g(p\vee q)+g(p\wedge p)$
$(p,q\in\mathbf{R}^n)$,

(TRF[R]) $\exists r\in\mathbf{R},\ \forall p\in\mathbf{R}^n,\ \forall\alpha\in\mathbf{R}:$
$g(p+\alpha\mathbf{1})=g(p)+\alpha r$,

を満たすことと定義される．連続L凸関数から(1)式に基づいて連続$\mathrm{L}^\natural$凸関数も定義されている．

連続空間上のL凸関数，$\mathrm{L}^\natural$凸関数に対しては，通常のヘッセ行列を用いてL凸性の特徴付けができる[14]．しかし，離散空間上のL凸関数，$\mathrm{L}^\natural$凸関数に対してはそのまま適用することはできない．次に，L凸性に対する離散ヘッセ行列の概念とこれを用いた新たなL凸性の特徴付け[10]を紹介する．

$\chi_i\in\{0,1\}^n$は$i=1,2,\cdots,n$に対する特性ベクトル，すなわち

$$\chi_i(v)=\begin{cases}1 & (v=i)\\ 0 & (v\neq i)\end{cases}$$

とする．離散関数$g:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$, $p\in\mathbf{Z}^n$, $i,j=1,2,\cdots,n$ $(i\neq j)$に対して，

$$\eta_{ij}(g;p)=-g(p+\chi_i+\chi_j)+g(p+\chi_i)+g(p+\chi_j)-g(p),$$
$$\eta_i(g;p)=g(p)+g(p+\mathbf{1}+\chi_i)-g(p+\mathbf{1})-g(p+\chi_i)$$

と定義する．ここで$-\eta_{i,j}(g;p)$は$p\in\mathbf{Z}^n$におけるχ_i, χ_j方向への2次前進差分を，$\eta_i(g;p)$はχ_i，1方向への2次前進差分を意味している．離散関数$g:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$と$p\in\mathbf{Z}^n$に対して，離散ヘッセ行列$H(g;p)=(H_{ij}(g;p)|i,j=1,2,\cdots n)$を以下で定義する：

$$H_{ij}(g;p)=-\eta_{ij}(g;p)\ (i\neq j),$$
$$H_{ii}(g;p)=\eta_i(g;p)+\sum_{j\in V\setminus\{i\}}\eta_{ij}(g;p)$$
$$=\eta_i(g;p)-\sum_{j\in V\setminus\{i\}}H_{ij}(g;p).$$

上記の定義と，連続変数の凸解析におけるヘッセ行列が，同等な基本的性質を備えていることが確認されている．よって，ヘッセ行列の離散版というに相応しい．次の定理は，$\mathrm{L}^\natural$凸関数に対する離散ヘッセ行列による特徴付けを与える．

定理3.1 $g:\mathbf{Z}^n\to\mathbf{R}$に対して，次の2条件は同値である．

(a) gは$\mathrm{L}^\natural$凸関数．

(b) 各$p\in\mathbf{Z}^n$に対して，$H(g;p)$は以下を満たす．

$$H_{ij}(g;p)\leq 0\quad(i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j), \tag{2}$$
$$\sum_{j=1}^{n}H_{ij}(g;p)\geq 0\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

連続$\mathrm{L}^\natural$凸関数の特徴づけは，通常のヘッセ行列が(2), (3)を満たすことである[14]．

4. 一品種モデル

売り損じを考慮した一品種の離散時間モデル[4][11][17]を考える．需要量，発注量，在庫量が連続値をとると仮定したモデルに対して，連続空間上の通常の凸関数との関連がこれまで論じられてきたが，[17]で連続$\mathrm{L}^\natural$凸関数とその理論に基づいた解析がなされている．さらに，需要量，発注量，在庫量について整数性を仮定したモデルに対しても，同様の議論が展開できることに言及している．

まずは需要量や発注量が連続値をとるものとする．各期では，(i)その期に納入されることになっていた発注残（発注してあったが，正のリードタイムにより納入されなかった未納入残）の納入，(ii)新規の発注，(iii)需要の発生，の順で起こるものとする．

L=注文のリードタイム，$L>0$
$t=1,\cdots,T+L$（期のインデックス）
$d_t=t$期の需要
$z_t=t$期の発注量
$y_t=t$期の在庫（発注残到着後）
$u_t=y_t-d_t$
$x_{0,t}=y_t,\ x_{1,t}=z_{t+1-L},\cdots,x_{L-1,t}=z_{t-1}$

として，t期のシステムの状態をL次元ベクトルx_t

$=(x_{0,t}, x_{1,t}, \cdots, x_{L-1,t}) \in \mathbf{R}^L$ で表現する．このとき，次期（$t+1$ 期）の状態 $x_{t+1} \in \mathbf{R}^L$ は

$$x_{t+1}=(\max\{0, x_{0,t}-d_t\}+x_{1,t}, x_{2,t}, \cdots, x_{L-1,t}, z_t)$$

とあらわされる．

c を単位量当たりの発注費用，$\hat{h}$ を単位量当たりの在庫保管費用，p を単位量当たりの売り損じペナルティとする．将来のコストは，各期に割引率 $0<\gamma\leq 1$[1] をかけて割り引かれるものとする．当然，割引を考えない場合は $\gamma=1$ とすればよい．

u_t が与えられているとき，t 期末の在庫保管あるいは売り損じにより生じるコストは

$$\hat{q}_t(u_t)=\hat{h}\max\{u_t, 0\}+p\max\{-u_t, 0\}$$

であるので，y_t が与えられているとき，t 期初（発注残到着直後）に見積もれるコストの期待値は $\hat{q}_t^0(y_t)=E[\hat{q}_t(y_t-d_t)]$ となる．

$\hat{f}_t(x_t)$ を，t 期に状態 x_t から始めた最適費用（最適な発注を行った際の総費用）と定義すると，次の漸化式が成り立っている：

$$\hat{g}_t(x_t, z)=\gamma^L cz+\hat{q}_t^0(y_t)+\gamma E[\hat{f}_{t+1}(x_{t+1})] \tag{4}$$

$$\hat{f}_t(x_t)=\min_{z\geq 0}\{\hat{g}_t(x_t, z)\}. \tag{5}$$

有限の期間 T に対して，最後の発注は T 期になされるが，在庫保管あるいは売り損じにより生じるコストは $T+L$ 期まで計上されるとする．つまり，$\hat{f}_{T+L+1}(x_{T+L+1})=0$ と仮定する．$\hat{z}_t(x_t)$ を最適政策，すなわち，(5)式の右辺で最小値を達成する z とする[2]．

これまで，通常の凸関数であることは知られていた $\hat{g}_t$ と $\hat{f}_t$ に対して，Zipkin[17]は変数変換を施すことにより，これらのもつ L♮凸性を示している．その証明は t に関する帰納法による．さらにこの事実を利用し，$\hat{z}_t$ の非増加性と下界を導いている．また，需要がマルコフ変調型である場合や，リードタイムが確率的に与えられている場合，顧客にクラス分けが存在しコストに差が生じる場合などの各種拡張モデルについても議論している．さらに，需要量，発注量，在庫量が整数値をとるモデルに対しても，同様の議論が展開できることに言及している．

5. 多品種・バックオーダーモデル

Miller[8]は需要量，発注量が離散値をとるバックオーダーを考慮した多品種モデルを扱い，その在庫費用関数最小化のため，「Millerの離散凸関数」を定義した．離散凸解析研究の進展により，この在庫費用関数が L♮凸関数であることもわかった．離散凸関数と密接な関係にあるこのモデルと，需要量，発注量が連続値をとるモデルを，本節では解説する．

品種数が n で，バックオーダーを許し，バックオーダーによる罰金とスペアの購入コストの和をできるだけ減らしたいという在庫モデルを考える．$c_j>0$ を，品種 j の単価とし，$x_j \in \mathbf{Z}$ を品種 j の発注量とする．$F_j(\cdot)$ は品種 j の需要に対する非負離散確率変数の累積分布関数で，$\varphi_j(m)\geq 0\ (m\geq 0, 1\leq j\leq n)$ を用いて

$$F_j(k)=\sum_{m=0}^{k}\varphi_j(m) \quad (k\in\mathbf{Z}_+)$$

と書きあらわされるものとする．このモデルでは $\lambda_j>0$ で

$$\varphi_j(m)=e^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^m}{m!} \quad (m\in\mathbf{Z}_+)$$

である．

次の関数 $f:\mathbf{Z}_+^n\to\mathbf{R}$ が最小化すべき目的関数である：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\prod_{j=1}^{n}F_j(x_j+k)\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jx_j, \tag{6}$$

ここで $\lambda>0$ とする．

(6)式の最初の項は定常状態におけるバックオーダーが最大となる品種のバックオーダー量の期待値をあらわしている．(6)式の第二項は，スペアの購入コストをあらわしている．λ をバックオーダーによる罰金の逆数として，二つの項を結合し，(6)式は，バックオーダーによる罰金とスペアの購入コストの和をあらわすことになる．

(6)式は「Millerの離散凸関数」である[8]．

(6)式に対して，$\eta_{ij}(f;x)$, $\eta_i(f;x)$ の非負性が示せるので，定理3.1より，f は L♮凸関数である[10]．このことから，$f(x)$ の最小化は L♮凸関数の最小化アルゴリズム（[13], Sect. 10.3）を用いることで，文献[8]の方法より効率的に行えることがわかる．

Millerは，多品種モデルに対し，在庫量が離散値をとる場合だけでなく，連続値をとる場合も議論している[7]．文献[8]と同様に，品種 j に対する需要の非負連続確率変数の累積分布関数を $F_j(\cdot)$ とする．品種 k に対する連続値発注量を x_k であらわすことにする．この論文で，最小化すべき目的関数

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(1-\prod_{k=1}^{n}F_k(x_k+y)\right)dy \tag{7}$$

---

[1] ここでは対象計画期間が有限であるモデルを考えている．無限期間の場合は，割引率は1より小さい（$\gamma<1$）と仮定する[2]．

[2] $\hat{g}$ の最小値を達成する z が複数個あった場合は，最小の z を $\hat{z}_t$ とする．

(バックオーダーが最大となる品種のバックオーダーの期待値）が x について凸であることを示し，

$$a_{ii}=\left[-f_i(x_i+y)\prod_{k\neq i}F_k(x_k+y)\right]_0^{\infty},$$

$$a_{ij}=\int_0^{\infty}f_i(x_i+y)f_j(x_j+y)\prod_{k\neq i,j}F_k(x_k+y)dy \quad (x\neq j)$$

とおくと，$f(x)$ のヘッセ行列が

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{k=1}^n a_{2k} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{nk} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk} \end{bmatrix} \tag{8}$$

となることを示している．明らかに $a_{i,j}\,(i\neq j)$ は非負であり，$\lim_{t\to\infty}f_i(t)=0$ より a_{ii} も非負なので，これは，ヘッセ行列の非対角非正性(2)と，対角優位性(3)に他ならない．すなわち，離散凸解析の成果で明らかになった事実より，この目的関数が連続の L$^\natural$ 凸関数であることが導ける．

6．多品種・受注組立て・基準在庫政策モデル

本節では Lu-Song[5]の基準在庫政策（base-stock policy）に基づく多品種受注組立て（assemble-to-order；ATO）在庫モデルを扱う．

前節までに述べてきたモデルとは異なる概念が用いられているので，これらの説明をしておく．

受注組立てシステムとは，顧客からの注文に対して，すべての部品を揃えられるときのみ，集約して出荷することである．顧客からの注文があったとき，注文に含まれる品種のうち，ひとつでも品切れを起こしているものがあれば，この顧客の注文はバックオーダーとして処理される（このシステムは，日頃利用されているであろう書籍や電化製品の通信販売で，商品を複数注文した場合，送料を安く抑えるときに目にされていることと思う）．

基準在庫政策とは，あらかじめ与えられた基準在庫水準（base-stock level）より在庫水準が下がってしまったときに，基準在庫水準まで引き上げる発注を行い，それ以外のとき，発注なしとする取り決めのことである[3]．基準在庫政策モデルの意思決定は，良い基準在庫水準を求めることである．

[3] 基準在庫水準は，発注点かつ発注水準と考えることもできる．このような，在庫が基準 S より1個でも減少すればそれだけ補充するという発注方式のことを $(S-1,S)$ 方式ということもある．

品種数を n とし，n 種類の異なる品種の集合を $V=\{1,2,\cdots,n\}$ で表す．注文の到着は平均 λ のポアソン過程に従うものとする．品種の部分集合 $K\subseteq V$ に対して，K に含まれる品種は1単位ずつ注文し，K に含まれない品種は注文しないとき，この注文をタイプ K と呼ぶことにする．また，品種 $i\in V$ に対して，K_i を品種 i を含むすべての注文のタイプの集合とする．

一般的なシステムに対する最適政策は知られていないため，各品種の在庫をコントロールするのために独立した基準在庫政策を仮定する．すなわち，各品種 $i\in V$ の基準在庫水準を s_i とおき，品種 i の正味在庫量（手持ちの在庫量＋発注残の量－バックオーダーの量）が s_i より低くなったら，s_i まで注文するというルールに従い，各品種の発注がなされるものとする．このモデルの目的は，$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in\mathbf{Z}^n$ を変数とした在庫費用関数を考え，この費用関数を最小にするような最適基準在庫水準を求めることである．

文献[5]では，各品種 i に対して，注文のリードタイムに対する確率変数の累積分布関数 F_i が与えられている．品種 i のリードタイムに対する確率変数 L_i は，独立同一分布に従う（i.i.d. である）と仮定し，平均を $E[L_i]=l_i$ とする．さらに，リードタイムは品種間でも独立（$i\neq j$ のとき L_i と L_j は独立で，$F_i\neq F_j$）と仮定する．このとき，$X_i(t)$ を品種 i の t 期における発注残（発注したがまだ納入されない未納入残）の数とおく．発注残ベクトルを $X(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t))$ と表す．文献[6]では n 並列の $M/G/\infty$ 待ち行列システムを用いて，$t\to\infty$ のとき，$X(t)$ が定常状態 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ に収束することを導いている．この事実から，X を用いて，受注組立てシステムに対する定常状態での性能評価尺度を得る．品種 i の定常状態における手持ち在庫量を

$$I_i(s_i)=\max\{0,s_i-X_i\}$$

とおき，品種 i の定常状態におけるバックオーダー量を

$$B_i(s_i)=\max\{0,X_i-s_i\}$$

とおく．さらに，定常状態におけるタイプ K の需要による品種 i のバックオーダー量を $B_i^K(s_i)$ とおくと，タイプ K のバックオーダー量（完全に揃っていないタイプ K の注文の数）$B^K(s)$ は

$$B^K(s)=\max_{i\in K}\{B_i^K(s_i)\}$$

となる．

各品種に対する在庫保管コストと各顧客のバックオーダーに対するバックオーダーコストについて，線形性を仮定する．h_i を品種 i の単位量あたりの在庫保管コスト，b^K をタイプ K のバックオーダーに対する単位量あたりのバックオーダーコストとおく．

受注組立てシステムでは，品種 i の在庫は，余剰在庫である I_i と，顧客からの注文に含まれているが，他品種の不足により出荷できずに保管されている在庫 J_i の2種類に区別できる．$B_i(s_i)=\sum_{K\in K_i}B_i^K(s_i)$ なので，

$$J_i(s)=\sum_{K\in K_i}\{B^K(s)-B_i^K(s_i)\}=\sum_{K\in K_i}B^K(s)-B_i(s_i)$$

とあらわせる．このとき，基準在庫水準 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ が与えられた際の総在庫費用の期待値 $C(s)$ は

$$C(s)=\sum_i h_i E[I_i(s_i)+J_i(s)]+\sum_K b^K E[B^K(s)]$$

とあらわされる．Lu-Song[5]は $C(s)$ が $L^\natural$ 凸関数であることを示し[4]，さらに，離散凸解析の研究の中で提案された $L^\natural$ 凸関数最小化アルゴリズム（[13], Sect. 10.3）を用いて，$C(s)$ を最小にする最適基準在庫水準を求めている．

7. おわりに

本稿では，離散凸関数の理論研究の立場から，在庫管理理論を見てきた．著者の偏った興味と限られた紙面の都合により，在庫管理理論の分野を幅広くカバーできなかったかもしれないが，在庫と離散凸解析の関りに魅力を感じていただければ幸いである．今後の展望については，受注組立て在庫モデルを拡張した多段階モデルでも同様の議論が展開できるのか，離散凸解析で理論の基礎をなす双対性を在庫理論に取り入れるとどうなるのか，などなど，個人的にはまだまだ興味が尽きないと思っている．

謝辞　本稿の執筆の機会を与えてくださった文教大学の根本俊男先生に感謝したい．

参考文献

[1] K. Arrow, S. Karlin and H. Scarf (eds.) : "Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production," Stanford University, Stanford, 1958.

[2] D. P. Heyman and M. J. Sobel (eds.) : "Stochastic Models," Handbooks in Operations Research and Management Science, **2**, Elsevier Science Publishers, 1990. 伊理正夫, 今野浩, 刀根薫（監訳）: "確率モデルハンドブック," 朝倉書店, 1995.

[3] 人見勝人 : "新・生産管理工学," コロナ社, 1997.

[4] S. Karlin and H. Scarf : "Inventory Models of the Arrow-Harris-Marschak Type with Time Lag," Chapter 10 in [1].

[5] Y. Lu and J. S. Song : "Order-Based Cost Optimization in Assemble-to-Order Systems," *Operations Research*, **53**, pp. 151-169, 2005.

[6] Y. Lu, J. S. Song and D. D. Yao : "Order Fill Rate, Leadtime Variability and Advance Demand Information in an Assemble-to-Order Systems," *Operations Research*, **51**, pp. 292-308, 2003.

[7] B. L. Miller : "A Multi-Item Inventory Model with Joint Backorder Criterion," *Operations Research*, **19**, pp. 1467-1476, 1971.

[8] B. L. Miller : "On Minimizing Nonseparable Functions Defined on the Integers with an Inventory Application," *SIAM J. on Appl. Math.*, **21**, pp. 166-185, 1971.

[9] 水野幸男 : "在庫管理入門," 日科技連, 1974.

[10] S. Moriguchi and K. Murota : "Discrete Hessian Matrix for L-convex Functions," *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **E 88-A**, pp. 1104-1108, 2005.

[11] T. Morton : "Bounds on the Solution of the Lagged Optimal Inventory Equation with no Demand Backlogging and Proportional Costs," *SIAM Review*, **11**, pp. 572-596, 1969.

[12] 室田一雄 : "離散凸解析," 共立出版, 2001.

[13] K. Murota : "Discrete Convex Analysis," SIAM, 2003.

[14] K. Murota and A. Shioura : "Fundamental Properties of M-convex and L-convex Functions in Continuous Variables," *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **E 87-A**, pp. 1042-1052, 2004.

[15] 高桑宗右ヱ門, 三輪冠奈 : "在庫管理方式のシミュレーション・アニメーション・モデル（第1回-第4回）," オペレーションズ・リサーチ学会誌, **49**, pp. 308-315, pp. 372-379, pp. 447-453, pp. 510-517, 2004.

[16] P. H. Zipkin : "Foundations of Inventory Management," McGraw-Hill, New York, 2000.

[17] P. H. Zipkin : "On the Structure of Lost-Sales Inventory Models," Working Paper, Duke University, 2007.

[4] 文献[5]では離散ヘッセ行列を用いず，離散中点凸性を導くことにより，$L^\natural$ 凸性を示している．