Consecutive-k システムとその周辺

秋葉　知昭，山本　久志

Consecutive-k-out-of-n：F システムは，システムの中で故障した部分が集中した場合にシステム故障が生起するような場合を表現する際に有用なシステムである．このシステムについて1980年代初頭より多くの関連研究がなされており，様々な拡張システムが提案され，また評価方法の提案がなされている．本論文では，consecutive-k-out-of-n：F システムを拡張したシステムとして，多次元のシステムに拡張した場合の信頼度算出方法と多状態のシステムに拡張した場合の状態確率分布の算出方法に注目して調査し，概要をまとめる．

キーワード：信頼性，Consecutive-k-out-of-n：F システム，多次元システム，多状態システム

1．緒言

Consecutive-k-out-of-n：F システムは，n 個のコンポーネント（部品）が一列に配置され，k 個以上のコンポーネントが連続して故障するとシステム故障となるシステムである．すなわち，システムの中で故障した部分が集中した場合にシステム故障が生起するような場合を表現できる．

これらのシステムに関連する研究は，1980年代初頭より多くの研究がなされ，また様々な拡張システムが提案されてきた．関連研究に関する概要については，Chang 他[5]，Kuo and Zuo[24]，Chao 他[17]他にて報告されている．このシステムの拡張として，二次元および更なる多次元をも表現できる d 次元 ($d \geq 2$) のシステムや，コンポーネントとシステムのもつ状態を多状態へと拡張したシステムが定義され，システム信頼度や状態確率分布の算出方法が提案されている．これらの拡張されたシステムの提案により，大規模化と複雑化が進んだ現代社会のシステムを近似的に評価できる範囲が拡げられる．また，それらシステムの信頼度・状態確率分布の算出方法の提案により，システムの信頼性を設計・運用するための予測段階において，システムの評価尺度の一つが与えられている．

そこで本論文は，多次元に拡張された consecutive-k-out-of-n：F システムの関連システムの研究として，長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの信頼度算出方法，および，多状態へと拡張した consecutive-k-out-of-n：F システムの状態確率分布の算出方法について概要を報告する．

あきば　ともあき
山形県立産業技術短期大学校
〒990-2473 山形市松栄二丁目 2-1
やまもと　ひさし
首都大学東京 システムデザイン学部
〒 191-0065 日野市旭が丘 6-6

2．長方形型 *k*-within-(*r*, *s*)-out-of-(*m*, *n*)：F システム

多次元への応用研究は，最初に Salvia and Lasher [1]より“二次元 consecutive-k-out-of-n：F システム”が提案されている．Boehme 他[23]は，Salvia and Lasher[1]に対して，より一般的な二次元 consecutive-k-out-of-n：F システムを定義した．その後，様々な多次元に拡張されたシステムが定義され，信頼度算出法が提案されている．多次元に拡張したシステムの関連研究に関する概要は，Malinowski and Preuss[9]，Chang 他[5]，Kuo and Zuo[24]，Yamamoto and Akiba[7]他にて調査報告されている．

長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムは二次元に拡張されたシステムの一つであり，図1

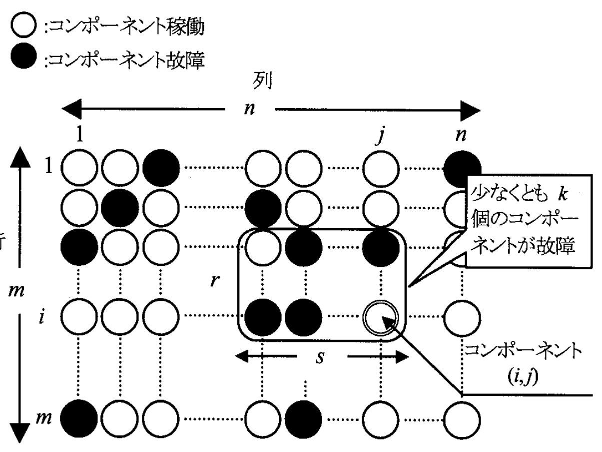

図1　長方形型 k-within-consecutive-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの故障例

のように $m \times n$ 個のコンポーネントの格子で構成される．この中の任意の r 行 s 列のコンポーネントの範囲中で故障コンポーネントの数が k 個以上になるとシステム故障が生起する場合，このシステムを長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システム（英語名 2-dimensional k-within-consecutive-(r, s)-out-of-(m, n)：F system）と表す．このシステムは consecutive-k-out-of-n：F システムの関連システムである r-within-k-out-of-n：F システム（英語名 r-within-consecutive-k-out-of-n：F system）を二次元に拡張したシステムであり，Papastavridis and Koutras[20]によって提案されている．

このシステムの応用例は Akiba and Yamamoto [22]が多数の構成画素による画像表示装置を示しているが，Salvia and Lasher[1]および Boehme 他[23]等の研究で示された多次元システムの応用例にも一部適用可能である．

次に，長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの信頼度算出方法を紹介する．Lin and Zuo [3]および Akiba and Yamamoto[22]は，長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの信頼度を求める再帰アルゴリズムを，それぞれ独立に提案した．以下に Akiba and Yamamoto[22]の方法を示す．まず確率変数 $\mathbf{Y}_{ij}$ を次式で定義する．

$$\mathbf{Y}_{ij} = \sum_{a=i-r+1}^{i} \sum_{b=j-s+1}^{j} \mathbf{Z}_{ab}$$

すなわち $\mathbf{Y}_{ij}$ は，コンポーネント (i, j) を右下隅にもつ $r \times s$ の小さな格子の中で故障しているコンポーネントの数を意味する．次に $R^R(k, r, s, m, n\,;\,[p_{ij}])$ を，コンポーネント (i, j) の信頼度を p_{ij} としたときの長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの信頼度を表す記号とする．このとき，以下の式が成り立つ．

$$R^R(k, r, s, m, n\,;\,[p_{ij}]) = \Pr\left\{ \bigcap_{i=r}^{m} \bigcap_{j=s}^{n} \{\mathbf{Y}_{ij} < k\} \right\} \quad (1)$$

ここで記号を定義する．まず Δ を $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ の値をもつ n 次元ベクトルとする．ここで $\delta_i (j=1, 2, \cdots, n)$ は 0-1 の二値変数である．次に $i=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n-s+1$ および $g=1, 2, \ldots, r$ に対して，

$F(i, \Delta)$：行 i の状態が Δ で表される確率

$\mathbf{Y}_{ij}(g)$：コンポーネント (i, j) を右下隅にもつ $g \times s$ の中で故障しているコンポーネントの数

$\mathbf{H}_{ij}$：$(h_{1ij}, \cdots, h_{rij})$ の非負の整数をもつ r 次元ベクトル

$R^R(i\,;\,\mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \ldots, \mathbf{H}_{i,n-s+1}\,;\,[p_{ij}])$：
事象 $\bigcap_{v=s}^{n} \bigcap_{g=1}^{r} \{\mathbf{Y}_{iv}(g) = h_{giv}\}$ が生起する特別な長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(i, n)：F システムの稼働確率

であるとする．また，$\chi(\mathbf{A})$ を $\mathbf{A}$ が正であるときに 1，それ以外を 0 とする指標関数とする．

定理 1 (Akiba and Yamamoto[22])

(A) $i=0, 1, \ldots, m$ に対して，次式を得る．

$$R^R(i\,;\,\mathbf{H}_{i1}, \mathbf{H}_{i2}, \ldots, \mathbf{H}_{i,n-s+1}\,;\,[p_{ij}]) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\Delta \in \Phi} F(i, \Delta) \cdot R^R(i-1\,;\,\mathbf{H}_{i-1,1}, \mathbf{H}_{i-1,2}, \ldots, \mathbf{H}_{i-1,n-s+1}\,;\,[p_{ij}]) \cdot \prod_{j=1}^{n-s+1} \chi(\{k_j^{\Delta} < h_{1ij}\}), & \text{if } i \geq \min_j \{h_{1ij}\}/s > 0 \\ 1, & \text{if } \min_j \{h_{1ij}\}/s > i \geq 0 \\ 0, & \text{if } \min_j \{h_{1ij}\} \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで $g=1, 2, \ldots, r$, $j=1, 2, \ldots, n-s+1$ および $\Phi = \{\Delta | \delta_j = 1 \text{ or } 0, \text{for } j=1, 2, \ldots, n\}$ に対して

$$h_{g,i-1,j} = \begin{cases} h_{g+1,ij} - k_j^{\Delta}, & \text{if } g=1, 2, \ldots, r-1 \\ k, & \text{if } g=r \end{cases} \quad (3)$$

である．

(B) $i=1, 2, \ldots, m$ に対して r 次元ベクトル $\mathbf{K}=(k, k, \ldots, k)$ を定義する．このとき，長方形型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの信頼度は次式で求められる．

$$R^R(k, r, s, i, n\,;\,[p_{ij}]) = R^R(i\,;\,\mathbf{K}, \mathbf{K}, \ldots, \mathbf{K}\,;\,[p_{ij}]) \quad (4)$$

また，Akiba and Yamamoto[22]は，定理 1 と同じ考え方を用いて円筒型 k-within-(r, s)-out-of-(m, n)：F システムの信頼度を求める再帰アルゴリズムを提案している．

3．多状態の consecutive-k-out-of-n：F システム

前節で示した先行研究は，コンポーネントおよびシステムの状態が二状態であることを仮定している．しかし，社会の中で現実に稼動するシステムでは，コンポーネントおよびシステムが複雑な状態をもつ場合が存在する．コンポーネントおよびシステムが中間的な稼動状態（例えば，「通常の x% の機能でそれらが稼動する状態」等）をもつことを考慮した場合，二状態で仮定したシステムの信頼度算出方法を用いてシステ

ムを評価することは難しい．そこで，システムの状態として各コンポーネントの状態の組み合わせにより保証される「中間的な稼動状態」を複数もつことを考慮する，本論文では，このように二状態以上の複数の状態をもつシステムを“多状態システム（英語名multi-state system）”と表す．多状態システムの研究は1970年代後半より提案されており，Barlow and Wu[19]が多状態のコンポーネントで構成される二状態のコヒーレントシステムを定義している．El-Neweihi他[4]は多状態のコンポーネントで構成され，かつ，システムも多状態をもつ直列システムおよび並列システムを定義している．さらにKossow and Preuss[2]，Malinowski and Preuss[10][11]，Zuo and Liang[15]，Koutras[18]，Haim and Porat[13]らが，二状態のconsecutive-k-out-of-nシステムを拡張し，多状態の場合について報告している．さらにHuang他[8]は一般型の多状態consecutive-k-out-of-n：Fシステム（英語名：multi-state consecutive-k-out-of-n: F system）を定義し，このシステムの評価指針として，システムの状態確率分布を求める方法を提案している．多状態をもつシステムの関連研究に関する概要は，Chang他[5]，Kolowrocki[12]，Kuo and Zuo[24]およびZuo他[14]にて調査報告されているので参照されたい．本論文ではHuang他[8]による一般型の多状態consecutive-k-out-of-n：Fシステムの定義と，Akiba他[21]により提案された状態確率分布の算出アルゴリズムを紹介する．

はじめに，システムを構成するコンポーネントおよびシステムは，状態0，状態1，…，状態Mの$M+1$状態をもつものとする．例えば，状態0は故障，状態Mは完全稼動を表す．次に$i=1, 2, \ldots, n$に対してZ_iをコンポーネントiの状態を表す確率変数とし，その実現値をu_iで表す．さらに，それらを要素にもつn次元ベクトルを$\mathbf{u}$で表す．すなわち$\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$である．そして$\varphi(\mathbf{u})(\varphi(\mathbf{u})\in\{0, 1, \ldots, M\})$をシステムの状態を表す構造関数とする．次に以下を仮定する．

仮定（Huang他[8]）：

1. システムはMS単調（multi-state monotone）とする（Griffith[25]）．すなわち，
   - 構造関数$\varphi(\mathbf{u})$は各$u_i(i=1, 2, \ldots, n)$に対して非減少である．
   - $j=0, 1, \ldots, M$に対して$\varphi(j, j, \ldots, j)=j$である．
2. 各コンポーネントの各状態は，統計的独立に生起する．
3. コンポーネントおよびシステムが取り得る状態は，状態0≤状態1≤…≤状態Mとすべて順序付けられている．

また，本論文では，システムの状態がjになる確率$(j=0, \ldots, M)$の集合，$\{\Pr(\varphi(\mathbf{u})=j) | j=0, 1, \ldots, M\}$を，システムの状態確率分布と呼ぶことにする．

仮定1と仮定3の下で，多状態consecutive-k-out-of-n：Fシステムは次のように定義される．

定義（Huang他[8]）

ある$j(j=1, 2, \ldots, M)$に対して，$j\leq l\leq M$のすべての整数lにおいて，状態l未満であるコンポーネントがk_l個以上連続して存在するならば，システムの状態はj未満，すなわち$\varphi(\mathbf{u})<j$とする．このようなn個のコンポーネントで構成されたシステムを多状態consecutive-k-out-of-n：Fシステムと呼ぶ．

Huang他[8]は，一般型の多状態consecutive-k-out-of-n：Fシステムを定義し，システムの状態確率分布の算出アルゴリズムおよび下限値の算出方法を提案した．また，このシステムがバッチ生産における品質管理問題等に応用可能であることを示している．Huang他[8]はまた，一般型の多状態consecutive-k-out-of-n：Gシステム（英語名：multi-state consecutive-k-out-of-n: G system）を定義しており，Zuo他[16]が多状態consecutive-k-out-of-n：Gシステムの状態確率分布について，$k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_M$の場合に効果的な算出アルゴリズムを提案した．また，極小パスによる状態確率分布算出式を$M=3$の場合について示した．この論文では$M\geq 4$の場合については下限値の算出方法を提案している．Yamamoto他[6]は多状態consecutive-k-out-of-n：Gシステムの状態確率分布の算出アルゴリズム，Akiba他[21]は多状態consecutive-k-out-of-n：Fシステムの状態確率分布をkの値によらず統合的に計算することができる算出アルゴリズムを提案した．

以下にAkiba他[21]で提案された状態確率分布算出方法を紹介する．$i=1, \ldots, n, j=1, 2, \ldots, M$に対して，多状態consecutive-$k$-out-of-$i$：Fシステムにおいて状態$j$未満にある確率を$R^{(j)}(i)$で表す．また，$\mathrm{x}=(x_j, \ldots, x_M)$を$(M-j+1)$次元ベクトルとし，$j=1, 2, \ldots, M$に対して要素$x_l=0, 1, \ldots, k_l, \bar{k}_l, \bar{\bar{k}}_l (l=j, j+1, \ldots, M)$とする．ここで$\bar{k}_l$と$\bar{\bar{k}}_l$は次の事象にて用

いる記号である．また，$i=1,\dots,n, j=1,2,\dots,M$ および $x_l=0,1,\dots,k_l,\bar{k}_l,\bar{\bar{k}}_l(l=j,j+1,\dots,M)$ に対して事象 $S(i,l;x_l)$ を以下のように定義する．

1) $i=2,\dots,n$ において $x_l=0$ ならば，“コンポーネント1からコンポーネント $i-1$ の間で k_l 個の連続したコンポーネントが状態 l 未満になっていない”，かつ，“コンポーネント i の状態が状態 l 以上”である；$i=1$ において $x_l=0$ ならば，“コンポーネント1の状態が状態 l 以上”

2) $x_l\le i-2$ かつ $x_l=1,2,\dots,k_l$ ならば“コンポーネント1からコンポーネント $i-x_l-1$ の間で k_l 個の連続したコンポーネントが状態 l 未満になっていない”，かつ，“コンポーネント $i-x_l+1$ からコンポーネント i の間で状態 l 未満の連続したコンポーネントがちょうど x_l 個”，かつ，“コンポーネント $i-x_l$ が状態 l 以上”である；$x_l\ge i-1$ かつ $x_l=1,2,\dots,k_l$ ならば“コンポーネント $i-x_l+1$ からコンポーネント i の間で状態 l 未満の連続したコンポーネントがちょうど x_l 個”，かつ，“コンポーネント $i-x_l$ が状態 l 以上”である

3) $i=2,\dots,n$ において $x_l=\bar{k}_l$ ならば“コンポーネント1からコンポーネント $i-1$ の間で状態 l 未満の連続したコンポーネントが k_l 個以上”，かつ，“コンポーネント i は任意の状態”；$i=1$ において $x_l=\bar{k}_l$ は空事象

4) $x_l=\bar{\bar{k}}_l$ ならば“コンポーネント1からコンポーネント i の間で状態 l 未満の連続したコンポーネントが k_l 個以上”

この $S(i,l;x_l)$ の定義において，$i(i\le 0)$ の場合は，仮定するコンポーネント i の状態は常に M とする．また，$S(i,l;\bar{\bar{k}}_l)=S(i,l;k_l)\cup S(i,l;\bar{k}_l)$ および $S(i,l;\bar{k}_l)=S(i-1,l;\bar{\bar{k}}_l)$ であり，$S(i,l;k_l)\cap S(i,l;\bar{k}_l)$ は空事象である．

また，$i=1,\dots,n$ において

$$R^{(j)}(i;\mathbf{x})\Pr\left\{\bigcap_{l=j}^{M}S(i,l,x_l)\right\} \text{かつ，}$$

$$R^{(j)}(0,\mathbf{x})\equiv\begin{cases}1 & \text{if } \mathbf{x}=(0,0,\dots,0)\\ 0 & \text{if } \mathbf{x}\neq(0,0,\dots,0)\end{cases}$$

とする．

$R^{(j)}(i-1;\mathbf{x})$ と $R^{(j)}(i;\mathbf{x})$ の関係に注目することで，次に再帰方程式を提案する．定理宣言する前に，さらに $i=1,\dots,n, j=1,\dots,M$ に対して以下の記号を定義する．

$A(\mathbf{x})$ ：$x_l=0,1,2,\dots,k_l,\bar{k}_l(l=j,\dots,M)(j=1,\dots,M)$ において，$\{l|x_l=1,2,\dots,k_l(l=j,\dots,M)\}$．すなわち $\{l|x_l\neq 0,\bar{k}_l(l=j,\dots,M)\}$

$B(\mathbf{x})$ ：$x_l=0,1,2,\dots,k_l,\bar{k}_l(l=j,\dots,M)(j=1,\dots,M)$ において，$\{l|x_l=0(l=j,\dots,M)\}$

$a(\mathbf{x})$ ：$A(\mathbf{x})\neq\phi$ の場合に $\min\{l\in A(\mathbf{x})\}$

$b(\mathbf{x})$ ：$B(\mathbf{x})\neq\phi$ の場合に $\max\{l\in B(\mathbf{x})\}$

p_{ij} ：コンポーネント i が状態 j となる確率

P_{ij} ：$\sum_{t=j}^{M}p_{it}$

Q_{ij} ：$\sum_{t=0}^{j-1}p_{it}$

定理2（Akiba 他[21]）

システム内のコンポーネントの状態は統計的に独立で排反であることを仮定する．ここで $x_l=0,1,\dots,k_l,\bar{k}_l(l=j,j+1,\dots,M), i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,M$ に対して $F(i;\mathbf{x})$ はコンポーネント i で事象 $\bigcap_{l=j}^{M}S(i,l;x_l)$ が生起する確率とする．このとき，

(A) $i=1,2,\dots,n$ に対して

$$R^{(j)}(i)=R^{(j)}(i;\bar{\bar{k}}_j,\bar{\bar{k}}_{j+1},\dots,\bar{\bar{k}}_M) \tag{5}$$

(B) $i=1,2,\dots,n$ に対して $x_l=\bar{\bar{k}}_l$ ならば，

$$\begin{aligned}&R^{(j)}(i;x_j,\dots,x_l,\dots,x_M)\\&\quad=R^{(j)}(i;x_j,\dots,k_l,\dots,x_M)\\&\quad+R^{(j)}(i;x_j,\dots,\bar{k}_l,\dots,x_M)\end{aligned} \tag{6}$$

(C) $i=1,2,\dots,n$ に対して $x_l=0,1,\dots,k_l,\bar{k}_l(l=j,j+1,\dots,M)$ ならば，

$$R^{(j)}(i;\mathbf{x})=\begin{cases}0, & \text{if } x_{l_1}>x_{l_2}(l_1<l_2)\\ & \text{for } l_1,l_2\in A(\mathbf{x})\cup B(\mathbf{x})\\ & \text{or if there exsits } x_l \text{ such that}\\ & x_l>i \text{ for } l\in A(\mathbf{x})\cup B(\mathbf{x})\\ F(i;\mathbf{x})\sum_{\mathrm{y}\in\Omega(\mathrm{x})}R^{(j)}(i-l;\mathrm{y}), & \text{otherwise}\end{cases} \tag{7}$$

ここで

$$F(i;\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{if } A(\mathbf{x})=\phi \text{ and } B(\mathbf{x})=\phi\\ Q_{i,a(\mathrm{x})}, & \text{if } A(\mathbf{x})\neq\phi \text{ and } B(\mathbf{x})=\phi\\ P_{i,b(\mathrm{x})}, & \text{if } A(\mathbf{x})=\phi \text{ and } B(\mathbf{x})\neq\phi\\ P_{i,b(\mathrm{x})}-P_{i,a(\mathrm{x})}, & \text{if } A(\mathbf{x})\neq\phi \text{ and } B(\mathbf{x})\neq\phi\end{cases} \tag{8}$$

かつ

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}=(y_j,y_{j+1},\dots,y_M),\\&\Omega(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}|y_l=\bar{\bar{k}}_l, \quad \text{if } x_l=\bar{k}_l\\&\qquad y_l=x_l-1, \quad \text{if } x_l=1,\dots,k_l\\&\qquad y_l=0,1,\dots,k_l-1, \quad \text{if } x_l=0\}\end{aligned} \tag{9}$$

また，境界条件として $i=0$ の場合

$$R^{(j)}(i\,;\,\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{x}=(0,0,\dots,0) \\ 0, & \text{if } \mathbf{x}\neq(0,0,\dots,0) \end{cases} \qquad (10)$$

となる．

定理2より任意の状態 j に対する確率 $R^{(j)}(n)$ が提案されたが，これを拡張し，$R^{(1)}(n)$ を求めることで $j=2,\dots,M$ に対してすべての $R^{(j)}(n)$ を求められる方法を次に紹介する．これにより $R^{(1)}(n)$ を求める過程ですべての状態 $j(j=1,\dots,M)$ に対する多状態consecutive-k-out-of-n：F システムの状態確率分布を求めることができる．

定理3（Akiba 他[21]）

$i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,M$ に対して

$$R^{(j)}(i)=\sum_{l_1\in C_1}\cdots\sum_{l_{j-1}\in C_{j-1}} R^{(1)}(i\,;\,l_1,\dots,l_{j-1},\bar{\bar{k}}_j,\dots,\bar{\bar{k}}_M) \qquad (11)$$

ここで $C_t=\{0,1,\dots,k_t-1,\bar{\bar{k}}_t\}, t=1,\dots,j-1$ とする．

4. 結言

本論文では，consecutive-k-out-of-n：F システムを拡張したシステムとして，長方形型 k-within-(r,s)-out-of-(m,n)：F システムの信頼度算出方法，および多状態へと拡張した consecutive-k-out-of-n：F システムの状態確率分布の算出方法についてまとめた．この分野の研究についてはまだまだ多くの課題があり，各システムの信頼度または状態確率分布の算出アルゴリズムにも改善が必要である．また，その応用についても様々な方面への適用を考えなければならない．特に "scan statistics" と呼ばれる統計分野において，平面を対象としたモデルの考え方が2次元consecutive-k-out-of-n：F システムの研究と共通性があり，新たな研究の発展が望めるであろう．

最後に，本研究は科学研究費補助金・基盤研究(C)(2)（課題番号 17510129）の補助を受けていることを記し，謝意を表します．

参考文献

[1] A. A. Salvia and W. C. Lasher: 2-dimensional consecutive-k-out-of-n: F models, *IEEE Transactions on Reliability*, 39-3 (1990), 382-385.

[2] A. Kossow and W. Preuss: Reliability of linear consecutively-connected systems with multistate Components, *IEEE Transactions on Reliability*, 44-3 (1995), 518-522.

[3] D. Lin and M. J. Zuo: Reliability evaluation of a linear k-within-(r,s)-out-of-(m,n): F lattice system, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 14-4 (2000), 435-443.

[4] E. El-Neweihi, F. Proschan and J. Sethuraman: Multi-state coherent system, *Journal of Applied Probability*, 15 (1978), 675-688.

[5] G. J. Chang, L. Cui and F. K. Hwang: *Reliabilities of Consecutive-k Systems* (*Network Theory and Applications, Volume 4*), (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000).

[6] H. Yamamoto, M. J. Zuo, T. Akiba and Z. Tian: Recursive formulas for the reliability of multi-state consecutive-k-out-of-n: G systems, *IEEE Transactions on Reliability*, 55-1 (2006), 98-104.

[7] H. Yamamoto and T. Akiba: Survey of reliability studies of multi-dimensional consecutive-k-out-of-n: F systems, *Reliability Engineering Association of Japan*, 25-7 (2003), 779-792.

[8] J. Huang, M. J. Zuo and Z. Fang: Multi-state consecutive k-out-of-n systems, *IIE Transactions Quality and Reliability Engineering*, 35 (2003), 527-534.

[9] J. Malinowski and W. Preuss: On the reliability of generalized consecutive systems—A survey, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 2-2 (1995), 187-201.

[10] J. Malinowski and W. Preuss: Reliability of circular consecutively-connected systems with multi-state components, *IEEE Transactions on Reliability*, 44-3 (1995), 532-534.

[11] J. Malinowski and W. Preuss: Reliability of reverse-tree-structured systems with multi-state components, *Microelectronics and Reliability*, 36-1 (1996), 1-7.

[12] K. Kolowrocki: *Reliability of Large Systems*, (Elsevier, United Kingdom, 2004).

[13] M. Haim and Z. Porat: Bayes reliability modeling of a multistate consecutive-k-out-of-n: F system, *Proceeding Annual Reliability and Maintainability Symposium*, (1991), 582-586.

[14] M. J. Zuo, J. Huang and W. Kuo, Chapter 1: Multi-state k-out-of-n systems, *Handbook of Reliability Engineering* (Ed. Pham, H.), (Springer, Berlin, 2003), 3-17.

[15] M. J. Zuo and M. Liang: Reliability of multistate consecutively-connected systems, *Reliability Engineering and System Safety*, 44 (1994), 173-176.

[16] M. J. Zuo, Z. Fang, J. Huang and X. Xu: Performance evaluation of decreasing multi-state consecu-

tive-k-outof-n : G systems, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 10-3 (2003), 345-358.

[17] M. T. Chao, J. C. Fu and M. V. Koutras : Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n : F related systems, *IEEE Transactions on Reliability*, 44-1 (1995), 120-127.

[18] M. V. Koutras : Consecutive-k, r-out-of-n : DFM systems, *Microelectronics and Reliability*, 37-4 (1997), 597-603.

[19] R. E. Barlow and A. S. Wu : Coherent systems with multi-state components, *Mathematics of Operations Research*, 3-4 (1978), 275-281.

[20] S. G. Papastavridis and M. V. Koutras : Consecutive-k-out-of-n systems, *New Trends in system Reliability Evaluation* (ed. K. B. Misra), (Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1993), 228-248.

[21] T. Akiba, H. Nagatsuka, H. Yamamoto and M. J. Zuo : Recursive formulas for the reliability of multi-state consecutive-k-out-of-n : F system, *Journal of Japan Industrial Management Association*, 56-6 (2006), 439-446.

[22] T. Akiba and H. Yamamoto : Reliability of a 2-dimensional k-within-consecutive-$r \times s$-out-of-$m \times n$: F system, *Naval Research Logistics*, 48 (2001), 625-637.

[23] T.K. Boehme, A. Kossow and W. Preuss : A generalization of consecutive-k-out-of-n : F system, *IEEE Transactions on Reliability*, 41-3 (1992), 451-457.

[24] W. Kuo and M. J. Zuo : *Optimal Reliability Modeling : Principles and Applications*, (John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2002).

[25] W. S. Griffith : Multistate reliability models, *Journal of Applied Probability*, 17 (1980), 735-744.