信頼性理論の研究におけるベイズ的方法と頻度論的方法の影響

Stefanka Chukova，早川　有

本稿では，統計的推測におけるベイズ的方法と頻度論的方法について比較する．両方法の背景となる根本的原理の相違についてまとめ，それがどのように点推定，区間推定，仮説検定に反映されているかについて述べる．信頼性の観点から，両方法の差異がもたらす統計的推測の結果に焦点をあてる．最後に，ベイズ的アプローチと頻度論的アプローチの相違点をどう克服するかについての可能性についてコメントをする．

キーワード：信頼性，ベイズ的方法，頻度論的方法

1. はじめに

製品の信頼度とはそれがあらかじめ設定されたとおりに機能するかどうかについての量的尺度である．時刻がゼロのとき製品が機能するとした場合，製品の信頼度とは決められた時間内で故障せずに機能する確率と定義されている．製品の信頼度は製造している会社の評判，顧客の満足度などと関連しており，製品の重要な属性のひとつである．製品の信頼度の評価とモニタリングはデザインの段階から継続して行われるプロセスである．一般的には信頼度の評価は故障データの統計的解析に基づいて行われる．統計的解析の方法の選択はアナリストが信じている特定の統計的原理に依存する場合がある．

統計学の専門家は大まかには3つのグループにわけられる[22]．頻度主義者，ベイズ主義者，プラグマティストである．本稿では，頻度主義者とベイズ義者の差異について主に取り扱う[14]．ベイズ主義者と頻度主義者の250年にわたる「哲学的な正しさ」についての議論は，さまざまな分野の理論と応用の両面に関する研究および実際に重大な影響を及ぼしてきた．コンピュータの進歩により統計的解析がますます重要な役割を担ってきており，信頼性データの解析にとっても適切な統計的解析方法が欠かせないものである．

ステファンカ　チュコヴァ
School of Mathematics, Statistics and Computer Science, Victoria University of Wellington
PO Box 600, Wellington, New Zealand
はやかわ　ゆう
早稲田大学 国際教養学部
〒169-0051 新宿区西早稲田 1-21-1

2節以降では，ベイズ主義者と頻度主義者の根本原理の背景，関係する統計的原理，ベイズ的アプローチと頻度論的アプローチの比較についてのべ，最後に本稿のまとめを付け加える．

2. ベイズ的方法と頻度論的方法の主な相違点

2.1 確率とは何を意味するのか？

ベイズ統計学と頻度論的統計学の違いは確率の意味の解釈の違いによるところが大きい．

頻度主義者が事象 A の確率というとき，それは独立した同一の実験を試行することが可能と仮定して，事象Aがおこる相対頻度の極限値を意味する．したがって，もし頻度主義者が硬貨の表がでる確率が $\frac{1}{2}$ であるといえば，それは硬貨を独立して何度も繰り返し投げたとして，そのうち約半分の回数は表，残りの約半分の回数は裏がでることを意味している．

ベイズ主義者は確率を主観的なものであるととらえている．主観的確率とは，ある事象が起こるという個人の確信度を表したものである．この解釈では，必ずしも事象の確率を，繰り返しが可能な実験での相対頻度ととらえなくても定義できる．したがって，ベイズ主義者の観点からでは，ある事象が生起する確率は，同じデータが与えられたとしても，各々の解析者によって違う場合も認められる．主観的確率を賭の見込を使って定義することもできる．詳細については[18]，[4]，[12]，[13]，[28]を参照されたい．

2.2 なぜ同じデータから異なった統計的推測が可能か？

標本に基づいて母集団について統計的推測をするとき，ベイズ的アプローチと頻度論的アプローチに重要な差異がある．ベイズ統計学ではデータを観測する前に，パラメタの事前分布を選択し，データ観測後，事前分布と尤度関数からベイズの定理を使用してパラメタの事後分布を求める．それを基礎に統計的推測をする．それに対して，頻度論的統計学においては，パラメタは未知で真の値はひとつであり，その他の値は偽であるという立場をとる．実際に観測したかどうかとは関係なく，標本分布を考慮し，満たすべき基準を設定したうえで統計的推測を行う．

両方のアプローチの枠組みにおいても，選択されたモデルの違いによって統計的推測に差異が生ずる．しかし，事前分布の違いによって統計的推測に相違が起こるのはベイズ的アプローチ固有のものである．これを理由として頻度主義者はベイズ主義者の統計的分析は主観的で「データに基づいていない」と批判する．この批判に対する典型的なベイズ主義者の応答は，頻度論的アプローチも主観的，である．なぜなら，統計的推測はデータ発生モデルの選択に依存するからである[17].

3. ベイズ的方法の枠組み

ベイズ的アプローチでは，パラメタ θ の事前分布 $\pi(\theta)$ を事前の情報・知識が反映されるよう選択し，データ $\tilde{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を得た後，$\pi(\theta)$ と尤度関数 $L(\theta|\tilde{x})$ から，ベイズの定理によって事後分布 $\pi(\theta|\tilde{x})$ を以下のように計算する．

$$\pi(\theta|\tilde{x})=\frac{\pi(\theta)L(\theta|\tilde{x})}{\int_{\Theta}\pi(\theta)L(\theta|\tilde{x})d\theta}.$$

それから，統計的推測は事後分布に基づいて行われる．

事前分布の選択はさまざまな方法でなされるが，本節では2つのタイプの事前分布について記述する．

1. **共役事前分布**

ある尤度関数に対して，事前分布と事後分布が同じ分布族に属するとき，前者を共役事前分布と呼ぶ[24]．例えば，$X_1, \cdots, X_n$ がn個の独立したコンポーネントの故障時間を表し，その分布が同一のパラメタ λ をもつ指数分布であるとする．事前分布 $\pi(\lambda)$ が超パラメタを α と β をもつガンマ分布とする．超パラメタとはデータ発生モデルのパラメタの分布のパラメタを意味する．ベイズの定理から，事後分布は以下の関数と比例する．

$$\pi(\lambda|x_1, \cdots, x_n)\propto\pi(\lambda)L(\lambda|x_1, \cdots, x_n)$$
$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}\cdot\lambda^{n}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}.$$

これを規準化することにより，事後分布もガンマ分布であり，超パラメタの値は $\alpha+n$ と $\beta+\sum_{i=1}^{n}x_i$ に更新されることがわかる．

2. **無情報事前分布**

無情報事前分布はパラメタ θ について情報がないことを表す目的で選択される．ジェフリーズ (Jeffreys) は θ について無知であるとすると，θ の関数についても無知であると主張し，ジェフリーズ事前分布を導き出した[19]．パラメタ空間が一次元の場合，彼の原理に基づいて得られる無情報事前分布は

$$\pi(\theta)\propto\det(I(\theta))^{\frac{1}{2}}$$

となる．ここで $I(\theta)$ はフィッシャーの情報量[5, p. 88]を意味する．

パラメタが一次元で標本の大きさ，n，が実験の前に固定されている場合，頻度論的方法とベイズ的方法による推定が同一になる条件は知られている（Barthlomew[3]，Welsh and Peers[27]）．ウェルシュとピアーズ（Welsh and Peers[27]）は $n\rightarrow\infty$ のとき，ジェフリーズ事前分布を選択すると，頻度論的推定とベイズ的推定のもたらす結果がより速く同一なものに近づくことを示した．

4. 統計的原理

ベイズ的アプローチと頻度論的アプローチの違いについて説明するときに，よく議論される統計的原理に尤度原理がある．ベイズ的方法は尤度原理と矛盾しないが，頻度論的方法は尤度原理と両立しない．最尤法についてはベイズ的方法と同じように尤度原理と両立する．

尤度原理[5, pp. 27-33]：(1)データ X から得られるパラメタ θ に関する情報はすべて尤度関数 $L(\theta|x)$ に含まれている；(2)同一のパラメタ θ に対してデータ X_1 と X_2 が与えられたとし，それらに基づく尤度関数が比例しているとするならば，すなわち $L_1(\theta|x_1)\propto L_2(\theta|x_2)$，のとき，$X_1$ と X_2 に基づいた統計的推測は同一であるべきである．

尤度原理についての簡単な例[5, pp. 28-29]をみてみよう．

例1．[5, pp. 28-29]：同じ生産ラインで製造されたあるアイテム10個を検査したところ，2個が不合格品であることがわかった．ここでは，2つのデータ生成モデルを考慮する．二項モデルと負二項モデルである．モデルを特徴づける検査停止のルールがありそれによってモデルの標本空間に差異が生じる．二項モデルにおいては，検査対象のアイテム数をあらかじめ決定し，不合格アイテムの数，x，を数える．負二項モデルの場合，あらかじめ決めた数，k，の合格アイテムがみつかるまでに，何個の不合格アイテム，y，を検査するか数える．アイテムが不合格品である確率をθで表すと，二項モデルと負二項モデルに対応するθの尤度関数は以下の通りになる．

$$L_1(\theta|x=2)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$
$$=45\theta^2(1-\theta)^8$$
$$L_2(\theta|y=2)=\binom{y+k-1}{y}\theta^y(1-\theta)^k$$
$$=36\theta^2(1-\theta)^8.$$

この例では，ベイズ的アプローチを用いると，同じ事前分布を使用した場合，双方のモデルに対して同一の事後分布を得る．

次に頻度論的アプローチから同じ例について考える．二項モデルでは，典型的なθに対する不偏統計値は$x/n=2/10=1/5$であり，負二項モデルの場合，$y/(k+y-1)=2/(2+8-1)=2/9$である．この例が示すように，頻度論的方法は尤度原理と両立しない．なぜなら，頻度論的アプローチは標本空間に依存するからである．

尤度原理と関係する二つの統計的原理に十分性原理と条件性原理がある．まず十分性原理について述べる前に，十分統計量の定義を頻度論的観点とベイズ的観点から見てみよう．

Definition 1．フィッシャー十分性[16]：$\tilde{X}$の密度関数を$f(\tilde{x}|\theta)$とする．統計量$T(\tilde{X})$が与えられたときの$\tilde{X}$の条件付分布がθに依存しないとき，$T(\tilde{X})$を十分統計量とよぶ．

Definition 2．コルモゴロフ十分性[20]，[1, p. 77] [13, pp. 155-156]：任意のθの事前分布において，θの事後分布は$T(\tilde{X})$をとおしてのみ$\tilde{X}$に依存するとき，$T(\tilde{X})$を十分統計量と呼ぶ．

フィッシャー十分性がコルモゴロフ十分性を含意することは知られているが，ある正則性の条件の下ではこれらは同じことを意味する[9]．したがって，おおまかに言えば，どちらの定義を使うにしても，データから得られるθについての情報は，十分統計量に要約されていることになる[1, p. 78]，[4]．

十分性原理（Sufficiency principle）：ある十分統計量に対して2つのデータが同じ値をとるならば，θに関する推定はどちらのデータを使っても同一となる．

条件性原理（Conditionality principle）：パラメタθの推定を行うための実験の集合があり，そこからランダムに実験を選ぶとすると，θの推定は選ばれた実験にのみ依存し，その他の実験には依存しない．

バーンバウム（Birnbaum[8]），バーガーとウォルパート（Berger and Wolpert[6]）は十分性原理と条件性原理を合わせると尤度原理を意味することを証明した．

5．標準的な統計的手順：類似点と相違点

5.1 点推定

1. **不偏推定**

   θを真のパラメタの値，$T(X)$を推定量とするとき，

   $E_\theta(T(X))=\theta$

   を満たす推定量を不偏推定量とよぶ．

   一つのパラメタに対して，無数の不偏推定量が存在する場合がある．そのようなときは，不偏性以外で好ましい性質をもっている推定量を使用する[25, p. 352]．

   ときには不偏推定量は意味をなさない推定値を生み出すことがある．Lindley[21, pp. 16-17]とRohatgi[25, p. 351]はそのような例として，ある事象の確率の推定値が負である場合を示している．

2. **最尤推定**

   尤度関数$L(\theta|\tilde{x})$を最大化するθの値を最尤推定値と呼ぶ．数学的には，以下のようにして，最尤推定値をベイズ的推定値の特別なケースと見なすことが可能である．θの事前分布が一様分布であると仮定すると，事後分布は規準化された尤度関数と見なすことができ，最尤推定値は事後分布のモードと同一である．ここで注意しなければいけないことは，パラメタ空間が有界でないとき，一様事前分布の場合，積分する

と無限大になる（変則事前分布と呼ぶ）ため，事後分布も同様に変則的になる可能性があることである．

3．**ベイズ推定**

パラメタ θ のベイズ推定は θ の事後分布に基づいている．典型的なベイズ点推定は以下のとおりである．

(a) 事後分布の平均：$\hat{\theta}=\int_{\Theta}\theta\pi(\theta|\tilde{x})d\theta$；

(b) 事後分布の中央値：$\int_0^{\hat{\theta}}\pi(\theta|\tilde{x})d\theta=0.5$ を満たす $\hat{\theta}$；

(c) 事後分布のモード：$\max_{\theta}\pi(\theta|\tilde{x})=\pi(\hat{\theta}|\tilde{x})$ を満たす $\hat{\theta}$．

最尤推定とベイズ推定の関係を示す例を見てみよう．

例2．Barlow and Proschan[2]：n 個のあるアイテムの寿命 $X_1, \cdots, X_n$ が相互に独立で期待値 θ の指数分布に従うとする．このとき，尤度関数は

$$L(\theta|x_1, \cdots, x_n)=\theta^{-n}e^{\sum_{i=1}^{n}x_i/\theta}$$

となる．事前分布がこの尤度関数に対して共役事前分布，すなわち，逆ガンマ分布

$$\pi(\theta)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{-(a+1)}e^{-b/\theta}$$

であるとする．ベイズの定理から事後分布も逆ガンマ分布に従い，超パラメタは $a+n$ と $b+\sum_{i=1}^{n}x_i$ に更新される．事後分布の平均を θ の点推定値として使うと

$$E(\theta|x_1, \cdots, x_n)=(1-w)\frac{b}{a-1}+w\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

ここでは $w=n/(n+a-1)$ とする．すなわち，θ の事後分布の平均は事前分布の平均と最尤値の凸結合として表すことができる．重み，w，は標本の大きさ，n，が増加するに従い増え，n を無限大に近づけていくと，w は1に近づいていく．これとは反対に標本の大きさが0の場合 w も0となり，点推定は事前分布の平均と同じになる．

5.2　区間推定：信頼区間　対　確信区間

区間推定においては，頻度主義者は信頼区間，ベイズ主義者は確信区間を用いる．それぞれの区間推定の解釈に違いはあるが，特定の事前分布が選択されると信頼区間と確信区間が同一になる場合がある．

パラメタ θ に対する $(1-\alpha)\times100\%$ 信頼区間とは

$$P(L(\tilde{X})\le\theta\le U(\tilde{X}))=1-\alpha$$

を満たす区間 $(L(\tilde{X}), U(\tilde{X}))$ である．しかし，一つの標本 $\tilde{x}$ から計算で得られる信頼区間 $(L(\tilde{x}), U(\tilde{x}))$ は，確率 $(1-\alpha)$ で未知のパラメタ θ を含むことを意味するのではなく，θ を含んでいるかいないかのどちらかである．繰り返し得られる標本を使って $(L(\tilde{x}), U(\tilde{x}))$ を計算すると，$(1+\alpha)$ の割合で信頼区間が θ を含むという解釈ができる．

パラメタ θ に対する $(1-\alpha)\times100\%$ 確信区間 (a, b) とは θ の事後分布 $\pi(\theta|\tilde{x})$ が

$$P(a\le\theta\le b|\tilde{x})=\int_a^b\pi(\theta|\tilde{x})d\theta=1-\alpha$$

を満たす区間である．したがって確信区間は主観確率的な意味を伴う．

次の2つの例において，それぞれのアイテムの寿命が独立した故障率 λ の指数分布に従うと仮定し，完全データ $\tilde{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ が与えられたとき

$$L(\lambda|\tilde{x})=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

を尤度関数とする．

例3．ジェフリーズ事前分布：λ がジェフリーズの事前分布に従うとき，その密度関数は $\pi(\lambda)\propto\frac{1}{\lambda}$ で表される．事後分布は $\pi(\lambda|\tilde{x})\propto\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$ となり，超パラメタ n と $\sum_{i=1}^{n}x_i$ をもつガンマ分布であることがわかる．$g_{\alpha/2}^J$ と $g_{1-\alpha/2}^J$ によって，事後分布の下側確率 $100\times(\alpha/2)$ パーセント点と下側確率 $100\times(1-\alpha/2)$ パーセント点を表すことにすると，$(g_{\alpha/2}^J, g_{1-\alpha/2}^J)$ は λ に対する $100\times(1-\alpha)\%$ 確信区間になる．

例4．信頼区間：λ に対する $100\times(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$\left(\frac{\chi^2(2n)_{\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n}x_i}, \frac{\chi^2(2n)_{1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)$$

であることが知られている．ここで $\chi^2(2n)_{\alpha/2}$ と $\chi^2(2n)_{1-\alpha/2}$ は自由度 $2n$ のカイ二乗分布の下側確率 $100\times(\alpha/2)$ パーセント点，$100\times(1-\alpha/2)$ パーセント点をそれぞれ表す[10, pp. 152-153]．

一般に，同じデータを使用した場合，信頼区間と確信区間は異なった結果をもたらす．しかし，上述のジェフリーズ事前分布に基づいた $100\times(1-\alpha)\%$ 確信区間と $100\times(1-\alpha)\%$ 信頼区間は，それぞれの解釈の違いはあるが，区間としては同一になるケースである．

5.3　統計的仮説検定

伝統的な仮説検定では，まず帰無仮説 $H_0：\theta\in\Theta_0$ と対立仮説 $H_a：\theta\in\Theta_a$ を立てる．有意水準をもとに棄却域を決定し，帰無仮説を採択するかどうか判断する．あるいは，p-値を求め，有意水準と比較するこ

とによって，判断をすることも可能である．

ベイズ的アプローチでは，まず $p(H_0)$ の事前確率を選び，ベイズの定理を使って H_0 についての事後見込比を以下のように計算する．

$$\frac{p(H_0|\bar{x})}{p(H_a|\bar{x})}=\frac{p(H_0)}{p(H_a)}\frac{f(\bar{x}|H_0)}{f(\bar{x}|H_a)}.$$

ここで，$p(H_i|\bar{x})$ と $f(\bar{x}|H_i)$ は仮説 H_i が真である事後確率，仮説 H_i が真であるとした場合の密度関数を表すとする．H_0 についての事後見込比が1より大きい場合，H_0 が採択され，そうでなければ棄却される．$p(H_0)/p(H_a)$ は H_0 についての事前見込比と呼ばれる．$f(\bar{x}|H_0)/f(\bar{x}|H_a)$ は H_0 についてのベイズ・ファクタと呼ばれ，次の式が成り立つ．

$$\frac{f(\bar{x}|H_0)}{f(\bar{x}|H_a)}=\frac{p(H_0|\bar{x})/p(H_a|\bar{x})}{p(H_0)/p(H_a)}.$$

このことから，事前見込比はベイズ・ファクタをとおして更新されることがわかる．

ベイズ的アプローチで仮説検定をするには，パラメタ θ の事前分布を選択することが要求される．バーガー（Berger[5, p. 146]）に書かれているように，g_0 と g_a が密度関数とすると

$$\pi(\theta)=\begin{cases} p(H_0)g_0(\theta) & \text{if } \theta\in\Theta_0, \\ p(H_a)g_a(\theta) & \text{if } \theta\in\Theta_a, \end{cases}$$

を θ の事前分布と見なすことができる．

例5．X はアイテムの寿命を表し，故障率 λ の指数分布に従うものとし，次の仮説検定をする．

$H_0: \lambda=1$

$H_a: \lambda>0.$

帰無仮定と対立仮定の事前確率がそれぞれ1/2と仮定し，対立仮定における λ の事前密度関数が

$$g_a(\lambda)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$$

とする．H_0 についての事後見込比は

$$\frac{p(H_0|\bar{x})}{p(H_a|\bar{x})}=\frac{1/2}{1/2}\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}d\lambda}$$
$$=\frac{(\beta+x)^{\alpha+1}e^{-x}}{\alpha\beta^\alpha}$$

となり，これが1より大きければ，H_0 を棄却せず，そうでなければ棄却する．

以下は仮説検定におけるベイズ的方法と頻度論的方法についてのコメントである．

1. **尤度原理再訪**：4節の例1の2つのモデルを再考する[5, p. 28]．本例では，不合格品，合格品の替わりに，タイプA，タイプBと名づけ，θ をタイプAの割合とする．アナリストが以下の仮説検定を行うとする．

   $H_0: \theta=0.6$

   $H_a: \theta>0.6.$

   さらに，20個のアイテムを観察し，16個がタイプA，4個がタイプBであったとする．二項モデルでは p 値は0.05095，負二項モデルでは p 値は0.02296である．有意水準が5%の場合，二項モデルでは H_0 を採択，負二項モデルでは H_0 は棄却することになる．このように，観測されたデータは同じでも，結論に差異が生じる．したがってこの例は，尤度原理と矛盾することを示している．
2. **統計的仮説検定の誤った使用**：単純仮説対複合仮説の場合，頻度論的方法を使うとすると，標本が十分に大きくなると，たとえ点推定値が帰無仮説に近い値であっても，帰無仮説を棄却することになる場合がある[5, pp. 20-21]，[23, p. 33]．
3. **リンドリー（Lindley）パラドックス**：単純仮説対複合仮説で同じデータであるにもかかわらず，頻度論的観点では p-値が小さくなるため，帰無仮定を棄却し，反対に，ベイズ的観点から帰無仮定が真である事後確率が帰無仮定を強く支持し，採択する場合がある．これをリンドリーパラドックスという[7, p. 394]，[23, pp. 36-37]．

6．二つの統計的方法論の比較

本節では，頻度論的方法とベイズ的方法の比較を行う[22]．

頻度主義者は事前分布の選択を必要とせず，モデル選択における事前情報の役割とパラメタ推定におけるデータの役割を区別している．繰り返し標本抽出できると仮定して得られる特性に焦点をあてて統計的推測を行う．しかし，頻度論的アプローチは規範的でないという重大な欠点を抱えている．頻度主義者の理論は統計的推測のシステムというよりは手順の特性を評価するための基礎となっている．小標本理論での限界から，漸近理論を用いるが，それをどこまで適用できるか明らかでない場合がある．つまり，標本の大きさがどれだけあれば適用を正当化できるかという疑問がおこる．頻度的アプローチは5.3節で述べたように，尤度原理に反する．

ベイズ的アプローチでは主観的確率と統計的推測に

事前情報・知識をつかう．頻度論的アプローチと異なり，ベイズ理論は規範的である．ベイズ的アプローチにおいては，モデルとパラメタの事前分布を選択し，ベイズの定理をとおして，事前分布を更新し事後分布を求める．統計的推測は，こうして得られた事後分布に基づいて行う．しかし，ベイズ的方法を実行するのに困難が伴う場合がある．ベイズ的アプローチについて批判のなかで多いのは，主観的確率と事前分布を必要とするため，科学的推論には主観的過ぎてふさわしくないということが挙げられるだろう．また，ベイズ的アプローチは，尤度関数と事前分布を明確に決めなければならない．

頻度論的アプローチとベイズ的アプローチの長所と短所を踏まえたうえで，それぞれの長所を取り入れ，統計的推測のアプローチを展開しようとする研究者たちがいる．calibratedベイズ的アプローチ[22]，conditional frequentistテスト[11]などがその例である．

7. 終わりに

ベイズ的方法論と頻度主義的方法論はそれぞれ長所と短所をかかえながら議論されつづけるであろう．製品の信頼度を評価するには，信頼性データを集め，統計的解析を行うことが不可欠であることを考慮すると，統計的方法の選択は重要になってくる．信頼度の推定は製品の設計，品質保証，保全スケジュール等とかかわってくる．ベイズ主義者と頻度主義者が最終的に妥協点にたどり着くと考えるのは，楽観的過ぎるように思われる．しかし，これら双方の長所を兼ね備えたアプローチをつくりだそうとしている研究者たちがいる．ベッドフォードとクック（Bedford and Cooke[4, p.61]）はエフロン（Efron[15]）の論文“Why isn't everyone a Bayesian?”について言及したあと，次のように述べている．「ある程度まで，この質問は，統計的推測を演繹的であるべきと考えるか，あるいは帰納的であるべきと考えるかということである．双方のアプローチは可能であり，選択は主として好みの問題である」特定の統計的原理を支持する場合，それに伴う結果に注意を払い，統計的推測を行うことが重要である．

今日では，特有な統計的解析をし，その結果をもとに意思決定をする場合，様々な選択肢から適切な方法を簡単に選ぶことができないかもしれない．一般的な使用を目的とした，ひとまとまりの同意のとれた標準的な手順が，実際にデータ解析をする専門家に利用できるようになることを願う．

参考文献

[1] S.F. Arnold: SUFFICIENT STATISTICS. In Encyclopedia of Statistical Sciences, Volume 9 (S. Kotz and N.L. Johnson, Editors-in-chief) (John Wiley & Sons, 1988), 72-80.

[2] R.E. Barlow and F. Proschan: Inference for the exponential life distribution In Theory of Reliability, XCIV Corso, Soc. Italiana di Fisica, Bologna, Italy, (1985), 143-164.

[3] D.J. Bartholomew: A Comparison of Some Bayesian and Frequentist Inferences, *Biometrika* 52: 1 (1965), 19-35.

[4] T. Bedford and R. Cooke: Probabilistic Risk Analysis: Foundations and Methods (Cambridge University Press, 2001).

[5] J.O. Berger: Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis (Second Edition) (Springer-Verlag, 1980).

[6] J.O. Berger and R.L. Wolpert: The Likelihood Principle, Lecture Notes No.6 (Institute of Mathematical Statistics, 1984).

[7] J.M. Bernardo and A.F.M. Smith: Bayesian Theory (John Wiley & Sons, 1994).

[8] A. Birnbaum: On the foundations of statistical inference: binary experiments, *Annals of Mathematical Statistics*, 32 (1961), 414-435.

[9] D. Blackwell and R.V. Ramamoorthi: A Bayes but not classically sufficient statistic. *The Annals of Statistics*, 10: 3 (1982), 1025-1026.

[10] W.R. Blischke and D.N.P. Murthy: Reliability: Modeling, Prediction, and Optimization (John Wiley & Sons, 2000).

[11] S.C. Dass and J.O. Berger: Unified conditional frequentist and Bayesian testing of composite hypotheses, *Scandinavian Journal of Statistics*, 30 (2003), 193-210.

[12] B. de Finetti: La prévision; ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7 (1937), 1-68. English translation in *Studies in Subjective Probability* (H. Kyburg and H. Smokler, Editors) (John Wiley & Sons, 1964).

[13] M.H. DeGroot: Optimal Statistical Decisions (McGraw-Hill, 1970).

[14] B. Efron: Modern Science and the Bayesian-frequentist controversy, *Journal of American Statistical*

Association, 100 (2005), 1-5.
(15] B. Efron: Why isn't everyone a Bayesian?, *American Statistician*, 40 (1986), 1-11.
[16] R. A. Fisher: On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Philo. Trans. R. Soc.* (*Lond.*) *Ser. A*, 222 (1922), 309-368.
[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Bayesianprobability
[18] http://mathforum.org/dr.math
[19] H. Jeffreys: Theory of Probability (Oxford University Press, 1961).
[20] A. N. Kolmogorov: Definition of center of dispersion and measure of accuracy from a finite number of observations (in Russian), *Izv. Akad. Nauk S. S. S. R. Ser. Mat.*, 6 (1942), 3-32.
[21] D. V. Lindley: Bayesian Statistics, A Review (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1971).
[22] R. Little: Calibrated Bayes: A Bayes/Frequentist Roadmap, *The American Statistician*, 60: 3 (2006), 1-4.
[23] S. J. Press: Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications (John Wiley & Sons, 1989).
[24] H. Raiffa and R. Schlaifer: Applied Statistical Decision Theory (Harvard University, 1961).
[25] V. K. Rohatgi: An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics (John Wiley & Sons, 1976).
[26] K. Shigemasu: Introduction to Bayesian Statistics (Japanese) (Tokyo University Press, 1985).
[27] B. L. Welch and H. W. Peers: On formulae for confidence points based on integrals of weighted likelihoods, *J. Roy. Statist. Soc.* B 25 (1963), 318-329.
[28] 芝祐順, 渡辺洋, 石塚智一(編)：統計用語辞典（新曜社, 1984).
[29] 繁桝算男：ベイズ統計入門（東京大学出版会, 1985).