

位相型確率分布の標準化と パラメータ推定の実際

岡村 寛之, 土肥 正

位相型分布はあらゆる確率分布を任意の精度で近似できるだけでなく、解析的な取り扱いが可能であるため、信頼性理論や待ち行列理論など確率モデルの分野において頻繁に用いられている。反面、位相型分布は多くのパラメータを含む確率分布であるので、冗長なパラメータを排除するための標準化と統計的パラメータ推定手続きは応用上極めて重要な問題となる。本稿では、位相型分布の標準形と位相型分布のパラメータ推定としてEM (Expectation-Maximization) アルゴリズムを紹介する。

キーワード：位相型分布, 標準形, 最尤法, EM アルゴリズム

1. はじめに

システムの信頼性や保全性を定量的に評価するためには、機器やシステムの寿命分布を同定するためのツールとして確率モデルが必要不可欠であり、統計的推定や検定など確率分布に基づいた故障データ解析が重要な役割を演じる。物理的な故障特性が実験や経験を通じて把握できる場合には、パラメトリックな確率分布の族をデータにあてはめることで寿命分布を同定し、信頼性、可用性、安全性、保全性に関連したディペンダビリティ (Dependability) 評価尺度を導出することができる。機器やシステムの寿命分布として指数分布やワイブル分布がよく用いられるのは、確率分布の年齢特性や極値分布としての性質を仮定しているからに他ならない。しかしながら、コンピュータシステムや情報通信システムに代表される大規模システムにおいて発生する障害の物理的な現象を厳密にモデル化することは困難であるため、システムの障害発生事象がある種のブラックボックスと見なし、より広いクラスに属する確率分布によって表現することは必然的である。

一方、コンピュータシステム、情報通信システム、生産システム、ロジスティックシステムなど、不確実性下で複雑な要因が絡み合ったシステムの性能評価を行うことは、オペレーションズ・リサーチにおける確

率モデリングの中心的な課題である。特に、待ち行列に代表される離散事象システムをより一般的に記述するためには、やはり、広いクラスに属する確率分布や確率過程を導入し、様々なシステムの動特性を表現する必要がある。例えば、最も基本的な待ち行列モデルとして $M/M/1$ 待ち行列があり、単一のサーバへの客の到着数がポアソン過程に従い、各々の客へのサービス時間が指数分布に従うと仮定できるならば、出生死滅過程と呼ばれる連続時間マルコフ連鎖 (CTMC: Continuous Time Markov Chain) に帰着される。しかしながら、より複雑な待ち行列を対象に待ち行列長や待ち時間に関する有効な性能評価指標を導出するためには、解析的に取扱うことが可能なモデルのクラスに限界がある。

離散事象を取扱う上で、解析的に取扱いやすく、しかも代表的な確率分布を含む (あるいは近似することができる) 広いクラスに属する確率分布が位相型分布 (PH: Phase-Type Distribution) である。位相型分布は CTMC の吸収状態までの到達時間として定義され、指数分布、アーラン分布、超指数分布などを特殊な場合として含む。また、位相型分布は CTMC の構造に依存し、あらゆる確率分布を任意の精度で近似できるだけでなく、解析的な取り扱いが容易であることが知られている。よって、大規模かつ複雑なシステムの寿命特性や修理時間などの保全性を確率分布上で表現するために位相型分布は頻繁に利用されている。

位相型分布は CTMC に含まれるパラメータに依存するため、CTMC の構造が大規模かつ複雑になればなるほど、多くのパラメータを含むことになる。よっ

おかむら ひろゆき, どひ ただし
広島大学 大学院工学研究科
〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1

て、通常のパラメトリックな確率分布の族とは異なり、その統計的な取扱いはかなり煩雑なものとなる。また、位相型分布の冗長なパラメータを排除するための標準化の理論があるにも関わらず、その存在があまり知られていない。このような理由から、伝統的な統計学の方野においてパラメータ推定法や統計的な諸性質について、他の確率分布ほどに多くの議論がなされていないのが現状である。

本稿では、位相型分布の標準化とパラメータ推定の理論について、著者らの最近の研究成果も踏まえた上で紹介する。パラメータの推定法としては最も汎用性の高い最尤法に着目し、EM (Expectation-Maximization) アルゴリズムに基づいた推定アルゴリズムを紹介する。特に後半では、高い次数の位相型分布の推定を行うことができる高速 EM アルゴリズムについてふれる。また、理論的な確率分布の近似例を示し、位相型分布の利用可能性を近似精度や計算時間の観点から議論する。

2. 位相型分布

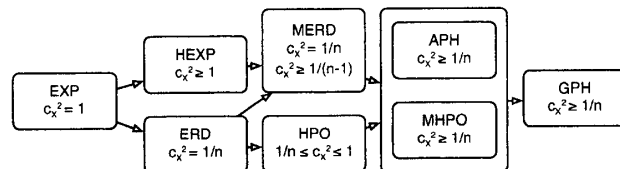
2.1 定義

位相型分布 (PH: Phase-Type Distribution) は吸収状態をもつマルコフ連鎖の吸収時間に対する確率分布である。PH 分布の待ち行列解析における有効性は Neuts[9]において広く紹介されたが、その基本的な発想は Cox[5]による行列指数分布 (ME: Matrix-Exponential Distribution) にまで遡ることができ、PH 分布は ME 分布のサブクラスとして位置づけられる。通常、確率分布のように、PH 分布は確率分布の台が連続形と離散形の場合に大きく分類される。本稿では連続形 PH 分布について取扱うが、離散形 PH 分布の解説は Bobbio et al.[3]に詳しい。

連続形 PH 分布は CTMC の構造によって規定される。Q を吸収状態をもつ CTMC の無限小生成行列とし、一般性を失うことなく以下を仮定する。

$$Q = \begin{pmatrix} T & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 T は非吸収状態に対する $n \times n$ の無限小生成行列、 ξ は非吸収状態から吸収状態への推移率を構成要素とした列ベクトルである。また、 T_{PH} を初期状態から吸収状態に到達するまでの時間を表す確率変数とすると、非吸収状態を対象とした初期状態を決定する確率ベクトル (行ベクトル) π が与えられたという



- GPH: 一般化 PH 分布
- APH: 非周期的 PH 分布
- MHPO: 混合 hypoexponential 分布
- MERD: 混合アーラン分布
- HPO: hypoexponential 分布
- HEXP: 超指数分布
- ERD: アーラン分布
- EXP: 指数分布

図1 PH 分布の分類

条件下で、PH 分布の累積分布関数 (cdf: Cumulative Distribution Function) と確率密度関数 (pdf: Probability Density Function) は

$$F(t) = \Pr\{T_{PH} \leq t\} = 1 - \pi \exp(Tt)e, \quad (2)$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \pi \exp(Tt)\xi \quad (3)$$

となる。ここで、 e は要素がすべて 1 の列ベクトルであり、 $\xi = -Te$ であることに注意する。以降では、個々の非吸収状態を単に「フェーズ (もしくは位相)」と呼ぶ。また、 T の (i, j) 要素を $\lambda_{i,j}$ 、ベクトル π および ξ の i 要素を π_i 並びに ξ_i とする。特に、 T の対角要素は負となるため、 $-\lambda_{i,i}$ によって表現する。

2.2 PH 分布の分類

PH 分布は任意にパラメータを設定できるため、その次数を増やすことによって表現可能な確率分布関数のクラスを任意に広げることができる。その一方で、次数が爆発的に増加することにより、統計的な取扱いが困難になるという弱点をもっている。連続形 PH 分布は元の CTMC の構造によって完全に規定されるため、フェーズの構造に従って PH 分布を分類することができる。そこで応用面においては、パラメータ構造を特定しない一般的な PH 分布 (GPH: General PH Distribution と表記する) よりも、パラメータあるいは内部のフェーズ構造に何らかの制約を負荷した確率分布を用いることが多い。対象とする PH 分布の内部フェーズの構造が物理的な意味から特定化されない場合には、解析的な取扱いやすさから、非周期的構造および直並列構造がよく用いられる。非周期的な内部構造をもつ PH 分布 (APH: Acyclic PH Distribution) とは、フェーズの推移がループ構造をもたない確率分布であり、無限小生成行列 T が上三角行列によって表現される。一方、直並列構造による表現は

APHのサブクラスであり、指数分布のたたみ込みやそれらの混合によって構成される確率分布である。アーラン分布、超指数分布、混合アーラン分布などは直並列構造をもつPH分布の特殊形である。最も単純なPH分布は、一つのフェーズから構成される指数分布であることは明らかである。

図1は文献[12]から参照したPH分布のサブクラスの相互関係を示している。上位クラス(図中右側)になるほど、より多くの種類の確率分布を表現することができる。ここでは参考として、各クラスで表現可能な変動係数の二乗 c_x^2 の範囲を明記しており、図中の矢印は確率分布間の包含関係を示している。また、hypoexponential分布は推移率の異なる指数分布のたたみ込みを意味している。

3. 標準形

PH分布における表現上の問題の一つに、同一の確率分布に対して複数の異なった初期確率ベクトルと無限小生成行列が存在することが挙げられる。このことは、後に述べるパラメータ推定問題において悪影響を及ぼす。表現上の問題を解決するための一つの手段として、PH分布における標準化がある。つまり、初期確率ベクトルと無限小生成行列に何らかの制約を設けることで、同一の確率分布に対するパラメータの一意性を保証することができる。Cumani[6]は、APHに対して自由パラメータ数が最小となる内部構造を標準形と呼んでいる。PH分布のラプラス変換形からわかるように、GPHもしくはAPHに限らず、PH分布に必要な自由パラメータの最小数は $2n-1$ 個である。つまり、PH分布の標準形は、 $2n-1$ 個の自由パラメータから作られる初期確率ベクトル π と無限小生成行列 T を用いて、任意のPH分布を構成するクラスとして定義される。

具体的に任意のAPHは以下の初期確率ベクトルと無限小生成行列をもつ標準形で表現できる。

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n), \quad (4)$$

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_{[1]} & \lambda_{[1]} & & & 0 \\ & -\lambda_{[2]} & \lambda_{[2]} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda_{[n-1]} & \lambda_{[n-1]} \\ 0 & & & & -\lambda_{[n]} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで $\lambda_{[1]}, \dots, \lambda_{[n]}$ は元のAPHの無限小生成行列の対角要素を昇順に並べたもの(すなわち、 $0 < \lambda_{[1]} \leq \dots \leq \lambda_{[n]}$)である。Cumani[6]はさらに、上述の標準形

から異なる2つの標準形を導出している。本稿では式(4)と(5)で表現される標準形のみを取り扱い、これをCanonical Form 1 (CF 1) とする。

4. パラメータ推定

4.1 最尤法

最尤法に基づいてPH分布のパラメータを推定する手続きについて考察する。最尤法は応用上最も重要なパラメータ推定法であり、観測データが出現する確率(尤度)を最大にするようパラメータの推定値を与える方法である。一般に、PH分布の尤度あるいは対数尤度は複雑な形となり、解析的な取扱いが困難である。そのため、尤度関数の最大化問題を解くためには、数値的な最適化アルゴリズムが不可欠である。観測データ数が多い場合やフェーズの次数が大きい場合にはより多くの計算コストが必要とされるため、初期の研究においては、モーメントマッチなどの計算コストの少ない推定方法が研究の主流であった。しかしながら、最尤推定によって得られる結果は統計的に合理的な性質(一貫性、漸近正規性など)を有していることが多く、モデル選択の方法においてもAICやBICなどの汎用的な情報量基準が適用できるという利点が存在する[1]。

4.2 EMアルゴリズム

EMアルゴリズム[7][13]は、最尤推定値を算出するための有効なアルゴリズムであり、潜在変数と呼ばれる非観測データが与えられている状況で大域的な収束性を保証する繰り返しアルゴリズムである。PH分布に対するEMアルゴリズムの適用はAsmussen et al.[2]によって行われた。以下では、GPH分布に対するEMアルゴリズムの概略について述べる。

観測データ $\mathcal{D} = \{t_1, \dots, t_k\}$ が与えられたもとの、GPHに関する推定アルゴリズムを構築する。いま、 $J_i^{[k]}, \dots, J_{M_k}^{[k]}$ と $S_i^{[k]}, \dots, S_{M_k}^{[k]}$ を、観測データ t_k に対するフェーズの推移パスと各フェーズ状態での滞在時間として定義する。すなわち、

$$t_k = \sum_{i=1}^{M_k} S_i^{[k]}. \quad (6)$$

ここで、 M_k はフェーズの推移回数を表す。もし、 $J_i^{[k]}$ および $S_i^{[k]}$ が観測できるのであれば、GPHの推定はCTMC内の指数分布に対する推定問題に帰着されるため、各パラメータに対する最尤推定値は、簡単に

$$\hat{\pi}_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{1}(J_1^{[k]} = i), \quad (7)$$

$$\hat{\lambda}_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \mathbf{1}(J_{s-1}^{[k]} = i, J_s^{[k]} = j)}{\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \mathbf{1}(J_s^{[k]} = i) S_s^{[k]}}, \quad i \neq j, \quad (8)$$

$$\hat{\xi}_i = \frac{\sum_{k=1}^K \mathbf{1}(J_{M_k}^{[k]} = i)}{\sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^{M_k} \mathbf{1}(J_s^{[k]} = i) S_s^{[k]}} \quad (9)$$

によって与えられる。ここで、 $\mathbf{1}(\cdot)$ は指標関数である。

EM アルゴリズムは、未観測の潜在変数を観測データが与えられたときの期待値で補完する E-Step と、補完された対数尤度（期待対数尤度）を最大化する M-Step から構成される。これら E-Step と M-Step を繰り返し実行することで、最終的に最尤推定値を導出することができる。PH 分布に対する EM アルゴリズムは、 $J_s^{[k]}$ と $S_s^{[k]}$ を潜在変数と見なすことで設計できる。つまり、式(7)から式(9)は EM アルゴリズムの M-Step に対応している。一方 E-Step では、式(7)から式(9)の分母分子に現れる $J_s^{[k]}$ と $S_s^{[k]}$ に対する期待値を算出する。以下のベクトル

$$\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\pi} \exp(\mathbf{T}t), \quad \mathbf{b}(t) = \exp(\mathbf{T}t) \boldsymbol{\xi} \quad (10)$$

を定義すれば、次のような期待値表現を得る。

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}(J_1^{[k]} = i) | t_k] = \frac{\boldsymbol{\pi}_i [\mathbf{b}(t_k)]_i}{\boldsymbol{\pi} \mathbf{b}(t_k)}, \quad (11)$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{M_k} \mathbf{1}(J_s^{[k]} = i) S_s^{[k]} | t_k\right] = \frac{\int_0^{t_k} [\mathbf{f}(u)]_i [\mathbf{b}(t_k - u)]_i du}{\boldsymbol{\pi} \mathbf{b}(t_k)}, \quad (12)$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{M_k} \mathbf{1}(J_{s-1}^{[k]} = i, J_s^{[k]} = j) | t_k\right] = \frac{\int_0^{t_k} [\mathbf{f}(u)]_i \lambda_{i,j} [\mathbf{b}(t_k - u)]_j du}{\boldsymbol{\pi} \mathbf{b}(t_k)}, \quad (13)$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}(J_{M_k}^{[k]} = i) | t_k] = \frac{[\mathbf{f}(t_k)]_i \hat{\xi}_i}{\boldsymbol{\pi} \mathbf{b}(t_k)}. \quad (14)$$

ここで、 $[\cdot]_i$ はベクトルの i 番目の要素を表す。

4.3 EM アルゴリズムの改良

PH 分布における EM アルゴリズムの計算コストは、主として式(12)および式(13)において見られる行列指数関数の積分によるものである。Asmussen et al.[2]は、数値的に微分方程式を解くことでこれらの値を算出することを提案しているが、これでは \mathbf{T} の次数 n に対して $O(n^3)$ で計算時間が増加する。PH 分布を用いて一般分布を高精度に近似する際には、数百次元の PH 分布を取り扱う必要があるため、より計算コストの低いアルゴリズムが必要とされる。ここでは、文献[10]によって提案された高速 EM アルゴリズムの紹介を

HFIB algorithm (E-step for PH estimation)

1: Global step:

1.1 Forward: Compute $\tilde{\xi}_k$ for $k = 2, \dots, K+1$;

$$\tilde{\xi}_k := \exp(\mathbf{T} \Delta t_{k-1}) \tilde{\xi}_{k-1}, \quad \tilde{\xi}_1 := \boldsymbol{\xi}.$$

1.2 Backward: Compute $\tilde{\pi}_k$ for $k = K-1, \dots, 1$;

$$\tilde{\pi}_k := \tilde{\pi}_{k+1} \exp(\mathbf{T} \Delta t_{k+1}) + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\pi} \tilde{\xi}_{k+1}},$$

$$\tilde{\pi}_K := \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\pi} \tilde{\xi}_{K+1}}.$$

2: Local step: For each time interval $\Delta t_k, k = 1, \dots, K$;

2.1 Forward: Compute \mathbf{b}_u for $u = 1, \dots, U$;

$$\mathbf{b}_u := \mathbf{P} \mathbf{b}_{u-1}, \quad \mathbf{b}_0 = \tilde{\xi}_k.$$

2.2 Backward: Compute \mathbf{c}_u for $u = U-1, \dots, 0$;

$$\mathbf{c}_u := \mathbf{c}_{u+1} \mathbf{P} + e^{-r \Delta t_k} \frac{(r \Delta t_k)^{u+1}}{(u+1)!} \tilde{\pi}_k,$$

$$\mathbf{c}_U := e^{-r \Delta t_k} \frac{(r \Delta t_k)^{U+1}}{(U+1)!} \tilde{\pi}_k.$$

2.3 Aggregation: Compute $\mathbf{H}_k = (1/r) \sum_{u=0}^U \mathbf{b}_u \mathbf{c}_u$.

3: Aggregation: Compute $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k$.

図2 階層的 forward-backward アルゴリズム

行う。

いま行列 $\mathbf{H}(t)$ の (i, j) 要素を

$$[\mathbf{H}(t)]_{i,j} = \int_0^t [\mathbf{f}(u)]_i [\mathbf{b}(t-u)]_j du \quad (15)$$

とすると、E-Step における計算は行列 $\mathbf{H}(t_k)$ およびその和 $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}(t_k)$ を求めることとなる。Asmussen et al.[2]のアルゴリズムを実装したツール EMpht¹ では、以下の微分方程式を4次の Runge-Kutta 法を用いて解いている。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) = \mathbf{T} \mathbf{H}(t) + \boldsymbol{\xi} \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{H}(0) = \mathbf{O}. \quad (16)$$

これに対して、文献[10]では一様化 (Uniformization) に基づいた方法を用いている。

一様化は CTMC の過渡解 (行列指数関数) を導出する際に有効な計算手法である。いま、行列 \mathbf{T} の対角要素の絶対値における最大の値を r とすると、

$$\exp(\mathbf{T}t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-rt} \frac{(rt)^k}{k!} \mathbf{P}^k \quad (17)$$

となる。ここで $\mathbf{P} = \mathbf{I} + \mathbf{T}/r$ である。すなわち、CTMC をポアソン過程における到着時間列によって離散化したものと考えることができる。

¹ <http://home.imf.au.dk/asmus/pspapers.html>

高速 EM アルゴリズムのアイデアは、一様化によって離散化された点列およびそれに従属する離散時間マルコフ連鎖 (DTMC: Discrete Time Markov Chain) に対して forward-backward アルゴリズムを適用する点にある。実際の導出は CTMC のポアソン確率による重みを考慮する必要があるため、より複雑な手順をもつ forward-backward アルゴリズムとなる。図 2 は文献[10]から引用したアルゴリズムの擬似コードである。ここで、 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ である。このアルゴリズムは列ベクトルと行ベクトルのかけ算のみで構成されるため、 T のサイズに対して計算量は多くても $O(n^2)$ となる。また、Asmussen et al.[2]の方法と異なり、実際に M-Step で必要な要素だけの計算が行えるため T の疎性を直接利用できるのが大きな特徴である。CF1 に高速 EM アルゴリズムを適用した場合は $O(n)$ となり、CF1 の構造に着目した EM アルゴリズムの初期値探索[8][10]と組み合わせることにより、数百次元の PH 分布に対するフィッティングを実施することが可能となる。

5. PH 分布による一般分布の近似

ここでは、ワイブル分布と対数正規分布に対する近似問題を例として取り扱う。高速 EM アルゴリズムは C++ 言語と BLAS および LAPACK を用いて実装した²。一般に、EM アルゴリズムを用いた PH 分布による近似では近似対象となる密度関数を重みとしたサンプルを用いる。表 1 はここで用いたワイブル分布 (WEI) と対数正規分布 (LOG) の変動係数の 2 乗 (CV^2) と 3 次モーメント (3rd) を示す。それぞれの分布の平均 (1 次モーメント) は 1 と設定した。また、二重指数積分公式に基づいた重み付きサンプルを発生させた際のサンプル数も併記する。

表 2 は各分布をフェーズ数 10, 50, 100, 200 の PH 分布で近似したときの、近似された変動係数と 3 次モーメントを示している。1 次モーメントに対する近似結果はすべての近似において小数点第 4 位までの精度で 1 となったため省略している。計算時間は Intel Core-Duo 2.0 GHz を搭載した PC 上で計測した。図 3 は WEI1 および LOG2 の密度関数に対する PH 近似の結果である。参考のため、3 次までのモー

表 1 分布の変動係数, 3 次モーメントおよび重み付きサンプル数

dist.	CV^2	3rd	# of samples
WEI1	0.1	1.3008	238
WEI2	2.0	16.4203	600
LOG1	0.1	1.3310	182
LOG2	2.0	27.0000	571

表 2 PH 近似結果

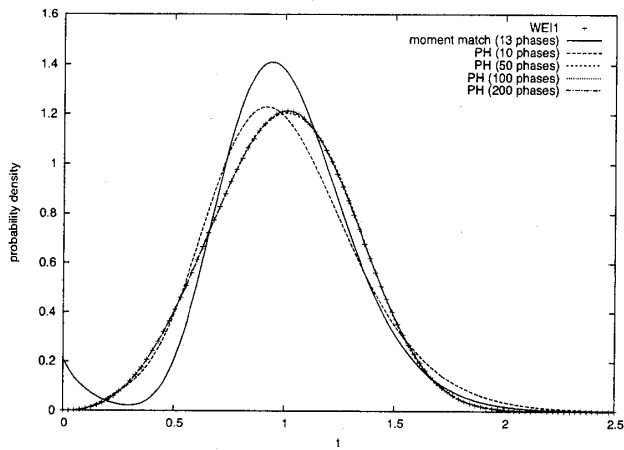
	# of phases	CV^2	3rd	time (sec.)
WEI1	10	0.1168	1.3695	2.96
	50	0.1001	1.3013	5.39
	100	0.1000	1.3009	10.43
	200	0.1000	1.3008	26.36
WEI2	10	1.9851	15.9087	10.37
	50	1.9977	16.3110	59.86
	100	1.9983	16.3349	158.55
	200	1.9999	16.4147	395.07
LOG1	10	0.1000	1.3201	3.61
	50	0.1000	1.3311	7.02
	100	0.1000	1.3310	18.55
	200	0.1000	1.3310	55.55
LOG2	10	1.9418	21.9953	63.07
	50	1.9801	24.4015	119.25
	100	1.9481	22.2787	350.49
	200	1.9811	24.4760	748.60

メントを用いたモーメントマッチ[4][11]の結果も示す。

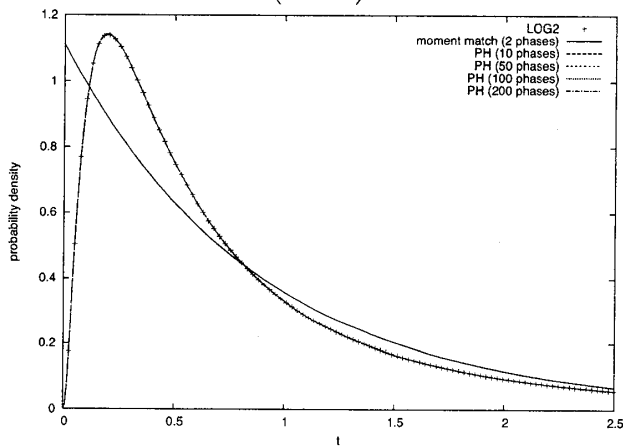
これらの結果から、モーメントと密度関数の振る舞いを同時に高精度で近似するためにはかなり高い次数の PH 分布が必要であることがわかる。つまり、この数値例で行った 100 および 200 といった次数が実際に必要となる。従来の推定手法を用いて、このような高い次数の PH 分布のパラメータを実用的な時間で推定することは困難である。しかし高速 EM アルゴリズムを利用することで、表 2 で見られるように、分布のばらつきに計算時間が依存するものの、いずれの場合においてもほぼ実用的な時間で PH 分布による近似が行えることがわかる。

さらに、一般のモーメントマッチによる手法では利用するモーメントの次数が問題となる。高い次数の PH 分布を用いた場合には、正確にモーメントを一致させることが難しい。これに対して、EM アルゴリズムに基づいた最尤法では、単純に高い次数を用いることで理論分布とほぼ一致する近似が行えることが見て取れる。この点で、モーメントマッチよりも高いスケラビリティをもつ EM アルゴリズムの優位性を改めて主張することができる。

² ここで用いた高速 EM アルゴリズムを実装した PH 近似のツールは <http://www.rel.hiroshima-u.ac.jp/okamu/PHPACK/>にて公開している。



(WEI1)



(LOG2)

図3 PH近似による密度関数のふるまい

6. まとめ

本稿では、位相型分布における標準化とパラメータ推定に関する研究を紹介した。位相型分布やその上位クラスである行列指数分布は、確率モデルの研究者にとっては汎用的なツールとして既に定着している感があるが、意外なことに、統計学における認知度はそれほど高くはない。その主な理由として、確率モデルとしての解析的な取扱いやすさと裏腹に、統計的推定や検定など実データを取扱う統計学においては逆に計算コストがかかり、とりわけ敬遠されてきたきらいがある。しかしながら、昨今の計算機の演算能力の向上は本稿で紹介した最尤推定アルゴリズムの利用を現実のものとし、理論の精緻化と実験による検証を積み重ねることによってそれらはさらに進化しようとしている。このような発展は近い将来において、確率ペトリネットなど、離散事象システムを解析するための汎用パッケージに実データ解析を志向した推定機能が実装され、大規模・複雑化した確率モデルの実用的な分析が可能

になることが期待される。

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究(C) 18510138 (2006-2008), 19510148 (2007-2008) および若手研究(B)19700065 (2007-2008) による助成の下で行われたものである。

参考文献

- [1] H. Akaike: Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. in *Proc. 2nd Int'l Sympo. on Information Theory* (B. N. Petrov and F. Csaki, eds.), pages 267-281, Akademiai Kiado, 1973.
- [2] S. Asmussen, O. Nerman and M. Olsson: Fitting phase-type distributions via the EM algorithm. *Scandinavian Journal of Statistics*, 23(4): 419-441, 1996.
- [3] A. Bobbio, A. Horváth, M. Scarpa and M. Telek: Acyclic discrete phase type distributions: properties and a parameter estimation algorithm. *Performance Evaluation*, 54: 1-32, 2003.
- [4] A. Bobbio, A. Horváth and M. Telek: Matching three moments with minimal acyclic phase type distributions. *Stochastic Models*, 21(2-3): 303-326, 2005.
- [5] D. R. Cox: A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. in *Proceedings of The Cambridge Philosophical Society*, volume 51, pages 313-319, 1955.
- [6] A. Cumani: On the canonical representation of homogeneous Markov processes modelling failure-time distributions. *Microelectronics and Reliability*, 22: 583-602, 1982.
- [7] A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, B-39: 1-38, 1977.
- [8] H. Gotoh, H. Okamura and T. Dohi: A note on parameter estimation for phase-type distribution in canonical form. in *Proc. 2006 Asian International Workshop on Advanced Reliability Modeling* (W. Y. Yun and T. Dohi, eds.), pages 577-584, World Scientific, Singapore, 2006.
- [9] M. F. Neuts: *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [10] H. Okamura, H. Gotoh, T. Dohi and K. S. Trivedi: A faster EM algorithm with large-scale PH distributions. in submission.
- [11] T. Osogami and M. Harchol-Balter: Closed form

solutions for mapping general distributions to minimal PH distributions. *Performance Evaluation*, 63 (6): 524-552, 2006.

[12] A. Thümmler, P. Buchholz and M. Telek : A novel approach for phase-type fitting with the EM algo-

rithm. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 3 (3): 245-258, 2006.

[13] C. F. J. Wu : On the convergence properties of the EM algorithm. *Annals of Statistics*, 11 : 95-103, 1983.