

# 老子が見た最適化モデル

中森眞理雄

## 1. はじめに

まず、本稿の題名について説明しておく。「最適化」と言えば、多くの読者は、大学で学んだORの手法を思い出すであろう。そこでは「利益を最大にする生産計画」、「コストを最小にする作業手順」などが論じられた。しかし、一般に、老子は「自然に帰れ」と主張し（この考えが後にルソーに影響を及ぼしたことは良く知られている）、世俗の利益からは超然としていたように受け取られている。実際、老子と最適化は正反対、少なくとも無関係ではないかと聞かれることが多い。筆者は、老子が最適化問題を双対問題の側から述べたため、最適化とは無関係と見做されたに過ぎないと考えている。

最適化に関しては、大きな組織では「個別最適化」と「全体最適化」が問題となる。19世紀には、この両者は同等であり、競争が社会に幸福をもたらすと素朴に信じられていたが、今日では、そんなに簡単なことではないことが、経験的にも学術的にも明らかとなっている。実は、この問題も、老子が既に指摘していたことである。

以下では、老子の考えがよく現れている記述を三つ選び、それらを最適化モデルという観点から解釈してみる。

## 2. モデル1：最適化と双対問題

まず、易性第八の文章を引用しよう。

(原文) 上善若水。水善利万物，而不争。処衆人之所惡。故幾於道。居善地，心善淵，与善仁，言善信，正善治，事善能，動善時。夫唯不争，故無尤。

(読み下し文) 上善は水のごとし。水は善く万物を利して争はず。衆人の悪（にく）む所に処る。故に道

に幾（ちか）し。居には地を善（よ）しとし、心は淵なるを善しとし、与ふるには仁なるを善しとし、言は信なるを善しとし、政は治まるを善しとし、事には能なるを善しとし、動くには時なるを善しとす。夫（そ）れ唯争はず、故に尤（とが）無し。

(意味) 最上の善とは水のようなものである。水は万物に利益を与えながら他と争うことがない。水は皆がいやがる低い場所にいる。それゆえ水は道に近い存在と言えるのである。居所は大地がよく、心は深遠なのがよく、与えるのには仁愛をもってするのがよく、言葉は嘘がないのがよく、政治は治まるのがよく、物事を行うには能力があるのがよく、行動するには時にかなっているのがよい。そもそも、水は争わない。だから咎められないのである。■

水が低いところにある（向かう）というのは、最適化モデルと解釈できよう。力学、流体力学、電磁気学などの古典物理学は、自然は「エネルギー最小」、「発熱量最小」、「表面積最小」、「経路最短」などを目指すという観点で構成されている（この考えは交通工学や経済学にも影響が見られる）。なお、自然がエネルギー最小、発熱量最小、表面積最小、経路最短などを目指すということは、理論的に証明できることではない（証明できるのは「力の釣り合いの方程式が成り立つならば」というような、他の原理を仮定した場合である）。

最適化問題として最も典型的で簡明な線形計画問題を取り上げてみよう。複数の製品を複数の限られた資源を用いて売り上げが最大となるように生産する問題は、制約条件

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned}$$

を満たす変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の値の組で、目的関数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

の値を最大とするものを求めることと書かれる。制約条件

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i=1, \dots, m)$$

なかもり まりお  
東京農工大学 工学府情報工学専攻  
〒184-8588 小金井市中町 2-24-16

は資源が限られていることを表し、制約条件

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

は生産量が負でないことを表す。目的関数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

は売上高を表す。

この問題の双対問題は、制約条件

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j \quad (j=1, \dots, n)$$

$$y_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

を満たす変数  $y_1, y_2, \dots, y_m$  の値の組で、目的関数

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

の値を最小とするものを求めることと書かれる。人情としては、売り上げを最大としたいところであるが、双対問題から考えれば最小化問題となる。なお、上記の双対変数  $y_1, y_2, \dots, y_m$  は経済学では限界価値と呼ばれているものである。

老子の考えは、「政治を行うには、社会の〇〇が最小となるように取り計らうのがよい」と解釈される。なお、上記の「売り上げ最大化」の線形計画問題において目的関数を  $-z$  とすれば、これも最小化問題となる。これは、売り上げに  $-1$  を乗じたものを損失と考えて「損失最小化」問題を考えるのでも最小化問題となるが、おそらく、老子が述べていることはそんな自明なことではなく（老子は、「コストを切り詰めれば利益が最大になる」などとは述べていない）、双対問題を念頭においているのであろう。「水」や「道」が限界価値に相当するのである。

### 3. モデル2：制約条件と目的関数は交換可能

次に引用するのは淳風第十七の文章である。

(原文) 大上下知有之。其次親而誉之。其次畏之。其次侮之。信不足，焉有不信。悠兮其貴言，功成事遂，百姓皆謂我自然。

(読み下し文) 大上は下之有るを知るのみ。其の次は之に親しみ之を誉(ほ)む。其の次は之を畏れ、其の次は之を侮る。信足らざれば、不信有り。猶(ゆう)として其れ言を貴べ。巧成り事遂げて、百姓(ひやくせい)皆我自ら然りと謂へり。

(意味) 最上の君主に対しては、下にいる人々はただ君主が存在することを知っているだけである。二流の君主に対しては、人々は親しみ、その君主を誉め称える。三流の君主に対しては、人々は畏れを抱く。四流の君主に対しては、人々は侮りの心を持つ。君主に信が足りないと人々も信用しない。思慮を巡らして言

葉を尊ばなければならない。そうすれば、成果があがり事業が完成しても、人々は自分たち自身の力でそうなったのだと思うのである。■

かつて、森口繁一教授(本会名誉会員、故人)は最適化に関する講義の中で、旧制第三高等学校の校風を例にして説明した。「第三高等学校は自由を尊ぶ雰囲気であった。もちろん、学校には最小限の規則はあった。先輩たちは、それを説明するのに、『自分が自由に振舞っていることをそのまま規則にしたと思込めば、規則を規則と感じなくなる』と言っていた。」(正確な表現は忘れたが、大体の趣旨はこのようであった。)森口教授は、それに続けて、幅  $a$  cm のトタン板を折り曲げてコの字型の雨どいを作るのに、断面積を最大にするには、雨どいの幅をいくらにすればよいかという問題を提示した(図1)。これは制約条件付きの最適化問題である。これをラグランジュ乗数法(フリードリックス変換とよばれているものも同等の方法である)によって解く方法を示した(最適解は雨どいの幅が  $a/2$  cm のときで、断面積は  $a^2/8$  cm<sup>2</sup>)。次に、森口教授は、この最大断面積  $a^2/8$  cm<sup>2</sup> を実現するトタン板の最小幅を求める問題を提示した。(最適解は、雨どいの幅が  $a/2$  cm のときで、トタン板の最小幅は  $a$  cm である。つまり、儲かることはあり得ない。)前者の問題を「表(おもて)の問題」と言うならば、後者の問題は「裏の問題」となる。表の問題の制約条件と目的関数は、裏の問題では目的関数と制約条件になる。制約条件と目的関数は入れ替わるのである。問題が線形なら、表と裏の問題は前述の線形計画問題とその双対問題である。

森口教授によれば、第三高等学校の規則に関する考え方は、表の問題の制約条件が裏の問題では目的関数になるということと似ているとのことであった。

ここで、老子に戻って考えるならば、人々が君主を恐れるのは命令・法律・布令・規制を制約と考えることであり、「悠兮其貴言，功成事遂，百姓皆謂我自然」は、君主が表の問題を裏の問題で言い表すならば、国



図1 雨どいの問題  
(トタン板をこのように折り曲げて作る)

民は制約を制約と考えずに自由に振舞った結果、自然に大きな事業を成し遂げたり法制度に到達したりすることになると解釈できよう。

イソップ物語の「北風と太陽」も、北風を表の問題、太陽を裏の問題と解釈することが可能であろう。

#### 4. モデル3：対象を分割して個別最適化

最後に引用するのは独立第八十の文章である。

(原文) 小国寡民。使有什伯之器而不用，使民重死而不遠徙，雖有舟輿，無所乘之，雖有甲兵，無所陳之。使人復結繩而用之，甘其食，美其服，安其居，樂其俗，鄰國相望，鷄犬之声相聞，民至老死，不相往來。

(読み下し文) 小国寡民。人に什伯するの器有るも用ひざらしむ。民をして死を重んじて遠く徒(うつ)らざらしむ。舟輿(しゅうよ)有り而(い)えども、之に乗る所無し。甲兵有り而(い)えども、之を陳ずる所無し。民をして復(また)結繩して之を用ひしむ。其の食を甘しとし、其の服を美とし、其の居に安んじ、其の俗を楽しむ。隣國相望み、鷄狗の聲相聞こゆるも、民老死に至るまで、相往來せず

(意味) 私の理想郷とは、小さな国で人口も少ないところである。いろいろな便利な道具がたくさんあっても、それを使わないようにさせ、人々に生命を重んじさせ、遠くへ移住しようという気を起こさせない。そうすれば、舟や車があっても、それに乗る必要がなく、兜や武器があっても、それを用いるときがない。人々を、古代の、文字がなく繩を結んで用いたような時代の牛活に戻させる。人々が各自の食事をおいしいと感じ、各自の衣服を美しいと感じ、各自の住居に満足し、各自の風俗を楽しみ感じさせるようにする。隣國が互いに望める位置にあり、犬や鷄の聲が互いに聞こえても、人々が年老いて死ぬまで行き来をすることがない。■

この文章は老子の理想郷を述べた文章としてきわめて有名で、多くの書物に引用されている。大国は多数の小国に分割するのが良いと解釈するのが一般的であるが、筆者には全体最適化モデルと個別最適化モデルの違いを指摘して個別最適化モデルのメリットを述べているように見える。

話の筋から少々はずれるが、一例として、交通工学で古くから有名な Wardrop の原理[1]について考えてみよう。ある道路網を多数の自動車それぞれ出発地から目的地へ移動している場面を想定する。道路が混雑すると、同じ道路区間を通るのに要する時間は長

くなる(極端な場合は渋滞が起る)。各出発地から各目的地へ行く経路がそれぞれ複数あるとすると、各ドライバはどの経路を選択するかが問題となる。この問題に対して Wardrop は次の二つの原理を提唱した(文献[1]とは表現が異なるが、本稿に即して述べる)。

原理1：交通の流れは、各ドライバがどの経路を選んでも所要時間が同じになるように、定まる。

原理2：各ドライバは社会全体の時間損失が最小になるように経路を選ぶ。

経験によれば、原理1が成り立つと言われている(原理1による解は、ゲーム理論のナッシュ均衡解に相当する)。原理1は、全ドライバが自分にとって最短経路を選択するという仮定の下では成り立つ。このことは、個別最適化は平等をもたらすと解釈できる。

さて、原理1が成り立った結果、交通渋滞の解消を目的として新しい道路を建設したのに交通渋滞が一向に解消しないという現象が生ずることがある(かつて、ドイツのシュツットガルト市でこのような問題が起ったことがあった)。この現象はブレスのパラドクスとして有名である[2][3]。筆者は、ブレスのパラドクスは、交通工学に限らず、個別最適化と全体最適化の違いを指摘したものと考えている。

さて、老子に戻ろう。大国が小国に分割されたと仮定して、小国がそれぞれの利益を最大にするように国内政治を行うと、その結果は、分割前の大国が全体としての利益を最大にするように政治を行った結果とは異なるはずである。しかし、現実には、どんな大国でも行政は中央行政と地方行政と分けて行われるのであり、大国としての全体最適化などできるものではない。この考えを徹底するならば、国など廃止して個人ごとにしてしまえという主張になるが、人間が一人だけで生きていくのは不可能であるから、国として成り立つ最小の単位になるまで大国を分割するのがよいという考えになる。

分割の大きさについては、別の解釈も可能である。仮に人口(あるいは国の規模を現す変数)  $x$  に対して、その国の複雑さを表す関数  $f(x)$  が凸関数ならば(この仮定は、一般に、妥当と考えられている)、この国を  $n$  等分したとき(乱暴な話であるが)、全体の複雑さは  $f(x) + f(x/n)$  となり、この最小値は  $n = x^{1/2}$  のとき実現される。小国をさらに分割し、さらに分割し、と分割の段階を増やすことを考えることも可能である。そのような諸分割における適正な規模を老子は唱えたと筆者は解釈している。

以上をまとめるならば、このモデルは全体最適化と個別最適化の2種類のモデルの違いを述べ、後者を勧め、後者を実現する適正な規模を論じたものと考えられる。

## 5. 老子と孔子

通常、「老子」は書物「老子」と人物「老子」の二通りの意味に使われている。書物「老子」は中国の古典であり、81の章から成る。王弼（おうひつ）本、馬王堆（まおうたい）帛書（はくしよ）、河上公（かじょうこう）本、傅奕（ふえき）本などの写本が知られており、章の順序や字句等に少し違いがある。

人物としての老子は、謎につつまれている。生年・没年は不明であり、そもそも老子なる人物が本当に実在したのか、仮に存在するとしても一人の人物だったのか複数の人物だったのか、等々の初歩的なことすら、分かっていない。史記の老子・韓非列伝第三に、周の守蔵室（図書館）の役人であった旨が記載されているが、併せて異説が三つ挙げられており、司馬遷の時代に既に謎の人物であったことがうかがわれる。

しばしば老子と対照して論じられるのは孔子・孟子に代表される儒教である。老子とは反対に、儒教に関しては文献が多い。古来、儒教は性善説に基づいていると考えられてきたが、筆者は性善説は「建て前論」であると考えている。儒教の政治理念は、最も徳のある人が君主として国を統治し、各人にはそれぞれの徳に応じた身分・職を与えるべきであるというものである。しかし、現実には、徳のない人物こそ権力を求めるものである。儒教の考え方によれば、「後宮三千人」は、徳の高い君主が優れた後継者を育成・確保するために必要なものである。しかし、現実には、子供同士が王位継承をめぐる争う結果となる。儒教の建て前は現実社会では成り立たず、そのしわ寄せは、低い階級・階層、女性、子供、弱者に押し付けられる。儒教は権力者にとって都合のよい理屈を提供するだけである（中国の戦国時代には儒教は権力者から受け入れられなかったが、戦乱が治まった後は、儒教は永く権力

と結びついてきたのである）。儒教は人間の本質を捉えておらず、数理モデルとしては面白くない。

一方、老子の考えは「無為自然」、「無知無欲」、「柔弱謙下」、「小国寡民」であり、競争とは別の世界のことを述べていると、一般には理解されている。しかし、老子は「天下莫柔弱於水、而攻堅強者、莫之能勝」、「弱之勝強、柔之勝剛」（共に第七十八章）、「聖人後其身而身先」（第七章）など、競争に勝つことも述べている。老子は人間が欲望の塊であることを完璧に見抜いている。老子には建て前という概念はない。筆者は、老子の念頭にあったのは最適化モデルであると思う。

しかし、老子は「利益最大化」などとは言わず、価値を低く評価することが良いかのように言う。凡人が高めたがる価値を、敢えて低めるような、意表をつく老子のことばを「逆説」とする解説書が多いが、筆者は、老子が最適化問題の双対問題を示したのではないかと考えている。

## 6. まとめ

老子の考えがよく現れている記述を三つ選び、それらを最適化モデルと双対性、全体最適化と個別最適化という観点から解釈してみた。

本稿では、老子のことばの引用は[4]によった。読み下しと意味も、基本的には[4]によったが、筆者の考えで変えた部分もある。

### 参考文献

- [1] Wardrop, J. G.: "Some theoretical aspects of road traffic research," Proc. Institute of Civil Engineers, PART II, 1 (1952), 325-378.
- [2] Braess, D.: "Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung," Unternehmensforschung, 12 (1969), 258-268.
- [3] Taguchi, A.: "Braess' Paradox in a Two-terminal Transportation Network," J. Operations Research Society of Japan, 25 (1982), 376-388.
- [4] 阿部吉雄・山本敏夫・市川安司・遠藤哲夫: 老子・莊子上, 新釈漢文大系7, 明治書院, (1966).