

モデリング — 直流磁気シールドの開発を例に取って —

笹川 卓

1. はじめに

モデリングという言葉は、物理モデル・数値モデル等非常に広い範囲を示す言葉であると思います。筆者にはモデリング全般を語る能力はともありませんが、日頃 OR 学会の成果（特に数理計画法）を利用していただいている 1 ユーザとして、日頃扱っているモデルについて以下に述べたいと思います。

2. 超電導磁気浮上式鉄道

近年超電導磁石 (Super Conducting Magnet) の発生する強磁界を利用した機器が種々検討されており、その一つに超電導磁気浮上式鉄道 (超電導リニア) があります[2]。超電導リニアは車上に推進、浮上、案内の 3 力を発生するための SCM を搭載しています。将来的には 500 km/h で東京—大阪間を結ぼうという構想の下、現在は東海旅客鉄道株式会社が中心となって山梨県で試験走行が進められているところです。

3. 直流磁気シールドの最適化問題のモデル化

さて磁気浮上式鉄道にまつわる事例として本稿では SCM の発生する直流磁界の磁気シールドを扱います。超電導磁気浮上式鉄道ではその発生する磁界の遮蔽 (磁気シールド) が一つの課題となりますが、本システムでは車上に鉄系材料による磁気シールド板を搭載し、一定レベル (20 Gauss=2 mT) 以下の車内磁界強度を実現しています。

さて直流磁気シールド問題の拠り所となるのは Maxwell の方程式です。磁気浮上式鉄道の場合も、集中定数系 (通常の電気回路に帰着できる系で多くの電気工学の問題はこの範疇に入る) で取り扱える問題

もありますが、SCM が生み出す磁束が限られた磁気回路に集中せず空間の広い領域に広がっているため、多くの場合は直接電磁場の問題を解かねばなりません。本稿で扱うのは時間に依存しない磁場ですので、下記の 2 本の方程式と構成方程式が基礎方程式となります。 $\mu(\|H\|)$ は透磁率です。

$$\text{rot } H=0 \quad (1)$$

$$\text{div } B=0 \quad (2)$$

$$B=\mu(\|H\|)H \quad (3)$$

超電導リニアは浮上走行する乗り物として軽量化が求められており、磁気シールド板に関しても強く軽量化が求められます。開発当初 (現在から十数年前) から、複雑な形状を持つ超電導リニアの磁気シールドは、試行錯誤的な方法で軽量化を目指した設計がなされてきました。具体的に言うと、まず初期シールド形状を適当に定めその磁界計算を行い、磁界に余裕があれば磁気シールドを薄くし基準を超過すれば磁気シールドを加えるというようなやり方です。そのような作業を何度も繰り返した数度の試作試験も行った結果、“磁気シールドに必要とされる最低限の重量というようなものがあり、いくら努力をしてもそれを下回ることとはできないであろう”という漠然とした認識を関係者は持ちました。なんとかその“最低限の重量”というものを明らかにしたいというのが、本稿のそもそもの出発点でした。

本稿では磁気シールド板の (初期) 透磁率を無限大に置くという簡略化を施した状態で、「最適な=最も軽い」磁気シールド形状を設計する方法を紹介します [3][4]。この簡略化は現実の磁気シールド板の磁気飽和せずかなり高い透磁率を有している状態 (内部への磁界の漏えいを避けるため磁性体はこのような状態で使われるべきである) に対応します。他方軽量化のためには磁気シールド板をできるだけ高い磁束密度で使う必要があります (磁束量が一定の場合磁性体の磁束密度と必要な厚みは反比例する)、結局磁気飽和を起こす

ささかわ たかし
財団法人鉄道総合技術研究所
〒185-8540 国分寺市光町 2-8-38

間際で磁気シールド板を使うよう設計をします。以上が本稿の基本的なアイデアですが、以下具体的に説明いたします。

3.1 磁気シールド板外の境界値問題

磁気シールドに用いる磁性材は種々の $B-H$ 特性を持ち、これらを考慮した磁気シールド板の最適設計をするのは容易ではありません。そこで次の仮定を置き問題を単純化します。

仮定① 磁気シールド板の透磁率は無限大とする。

仮定② 磁気シールドすべき内部領域 $R^3-\Omega$ の全域を磁気シールド板で覆う。

仮定①より外部領域 Ω にある電流源による磁界は磁気シールド板に垂直に流入し、かつ仮定①②により磁束は内部領域 $R^3-\Omega$ に漏れません。また磁気シールド板の外部領域 Ω での磁界分布は、シールド面 $\partial\Omega$ を境界を持つ境界値問題（外部問題）として他と独立に解けるようになります。図1にこれらの状況を示します。

適当な方法で外部問題を計算すれば、磁気シールド面 $\partial\Omega$ に外部領域 Ω （電流源側）から流入する磁束密度 Bn （単位 T）の大きさとその分布が求められます。その情報を以下の最適化問題で用います。

3.2 シールド板内の磁束に関する制約式と最適化

シールド面 $\partial\Omega$ 上での磁束の収支を考えます。ここでシールド面 $\partial\Omega$ 上で定義されシールド面内の磁束の流れの方向と大きさを表す2次元ベクトル場 F （単位は $T \cdot m = Wb/m$ ）を導入します。この F の満たすべき式は、仮定①、②によりシールドすべき内部領域 $R^3-\Omega$ には磁束は漏れないことを考慮して、

$$\operatorname{div} F = Bn \text{ on } \partial\Omega \quad (4)$$

となります。ここで Bn は外部領域 Ω 側からシールド

面 $\partial\Omega$ に垂直に流入する磁束密度であり、3.1節の外部問題を計算すれば求められます。またここで微分記号 div は2次元面内でのものと理解することにします。この(4)式を満たすベクトル場 F は無数に存在します。われわれはこの F の自由度を以下の最適化問題において利用します。

最後に現実の磁気シールド板の磁気特性を勘案し次の仮定をさらに導入します。

仮定③ 磁気シールド板は飽和磁束密度 B_s （単位は T）以上の磁束を流すことができない。

結局仮定①と合わせて、図2右のような磁気シールド板の $B-H$ カーブを仮定したことになります。ここで図中の $B-H$ カーブは無敵大の初期透磁率と飽和磁束密度 B_s を持ちます。

ところでシールド板内の磁束密度は B_s 以下で使うようにしなければなりません。もし B_s 以上の磁束密度で磁気シールド板を使うとそれが「飽和」してしまい、仮定①の「シールド板の透磁率が無限大」とも矛盾してしまいます。一方軽量化のためには、できるだけ

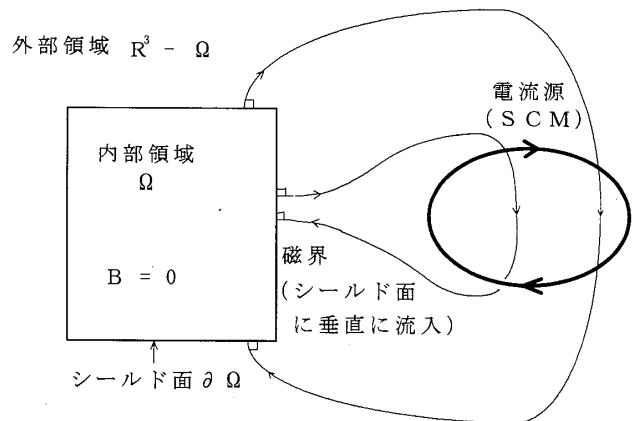
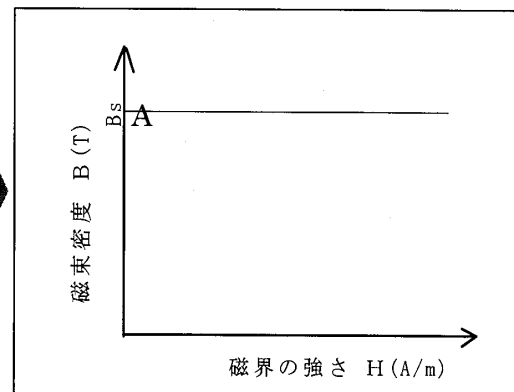
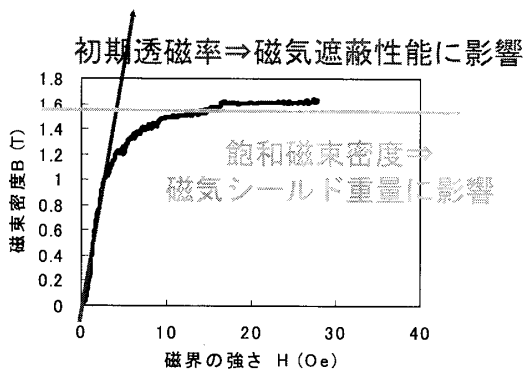


図1 考察する問題



$B-H$ カーブの近似

図2 現実の $B-H$ のカーブ

け磁束密度の大きい点で使いたいところです。結局図2右の $B-H$ カーブ中の A 点で磁気シールド板を使うことになり、その結果 $\|F\|/Bs$ が $\partial\Omega$ 上の各点で必要なシールド板の厚みとなります（ここで $\|F\|=(Fx^2+Fy^2)^{1/2}$ で Fx と Fy は F の2成分）。我々は磁気シールド板の軽量化を目指しているので、制約条件(4)式の下で次の2重積分（面積分）を最小にするものを追求します。

$$\iint_{\partial\Omega} \|F\| Bs \cdot dS. \quad (5)$$

面積分(5)は、必要なシールド板の全体積を表します。すると結局次の最適化問題(P)を計算することが必要になります。

$$\text{minimize } \iint_{\partial\Omega} \|F\| dS \quad (6)$$

$$(P) \text{ subject to } \text{div } F = Bn \text{ on } \partial\Omega \quad (7)$$

3.3 2次錐計画問題への帰着

この3.3節では、3.2節で得られた磁気シールド重量最小化問題(P)を少し変形することにより、2次錐計画問題（Second Order Cone Programming, SOCP）に適した形に、最適化問題(P)を書き換えることにします[4]。まず数理計画法でよく行われるように、 F と同様に $\partial\Omega$ 上で定義されたスカラー値関数であるスラック変数 F_0 を新たに導入し、最適化問題(P)を次のように書き直します。

$\partial\Omega$ 上の制約条件

$$\text{div } F = Bn, \quad (8)$$

$$\|F\| = (Fx^2 + Fy^2)^{1/2} \leq F_0 \quad (9)$$

(SP)のもとで、

$$\iint_{\partial\Omega} F_0 dS \quad (10)$$

を最小化せよ。

(P)と比較すると、等式線形制約条件式(7)は元のままですが、(9)式という非線形の不等式制約が新たに付け加わり、一方非線形の目的関数(6)式は線形の目的関数(10)式となっています。(P)の場合と同様ですが、仮定①、②、③のために解くべき最適化問題が簡略化されていることがわかります。もちろん、簡略化しすぎて現実と遊離した問題設定になってしまえば意味がなくなってしまいます。この問題(SP)（および(P)）が、浮上式鉄道車両の磁気シールド重量最小化問題のモデルとして適切であるかどうかの考察は、別途必要となります。この最適化問題(SP)が、離散化の出発点となりますが、これは2次錐計画問題という数理計画問題の連続版（離散化前の形式）になっています[5]。ま

たその最適解は $\partial\Omega$ 上の測地線となります[3]。

後はこの最適化問題を有限要素法を用いて離散化するだけですので、その詳細は省略いたします。この離散化後の最適化問題は2次錐計画問題という代表的な凸計画問題の一つとなります。

なおここで述べたような基本的な考え方自体は古くから存在し、2次元問題や軸対称問題など限られた単純な配置に対し適用されてきました（ただしその場合 F の自由度がないので最適化問題とはなりません）[6]。本件のような3次元問題への適用により、初めて最適化問題が現れその処理が必要になったと言えます。

4. 計算結果と試験結果

ここでは計算結果と試験結果の概略を記します[3]。車体とSCMの概略位置関係を図3に示します。図に示した部分は超電導リニアの車両の一部分で、レーストラック形状のSCMが8個取り付けられた連接台車とその周辺に相当します。SCM上の細長い部分は、乗客の通り抜けのための通路であり貫通路と称します。客室が貫通路の両端に接します。磁気シールドは大体この図に示した部分（貫通路および客室部のうち台車に近い部分）に施されます。

車両左右方向、車両進行方向の対称性を利用して全体の1/4のみを計算し示します。図4左に、 Bs を1.5(T)とした場合の最適化されたシールド板厚み（貫通路部分のみ）を示します。厚みの単位はmmです。底板の厚い部分は案内方向の磁束を流すため、側板の厚い部分は車両進行方向の磁束を流すためのものです。図4右に最適化計算結果図4を基に、所内試験用に試作した貫通路部磁気シールド板を示します（最大厚みに対する割合(%)で表示)。この製作した磁気

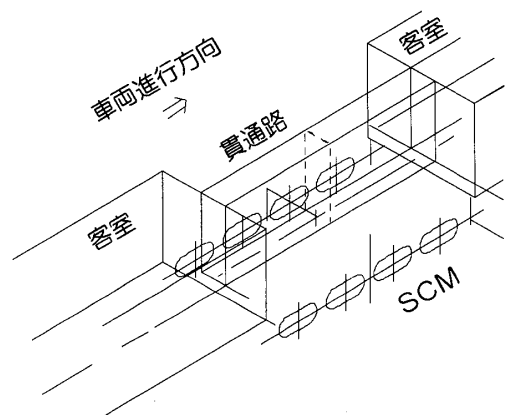
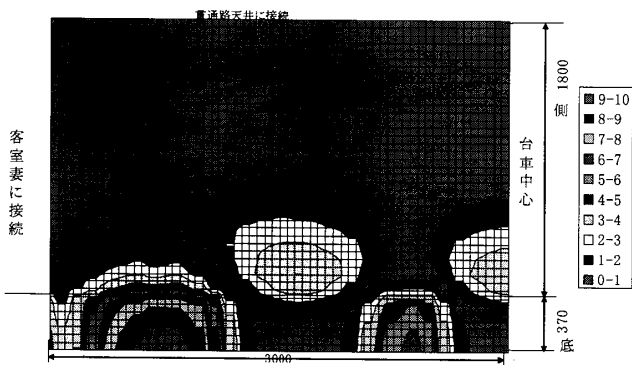
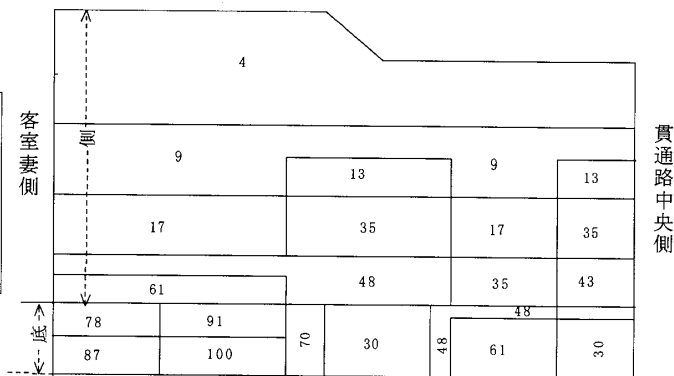


図3 SCMと磁気シールド板の位置関係概略図



最適設計結果



試作磁気シールド板

図4 最適化されたシールド厚み (左, 単位: mm) と実際に試作した磁気シールド板 (右, 単位: %)

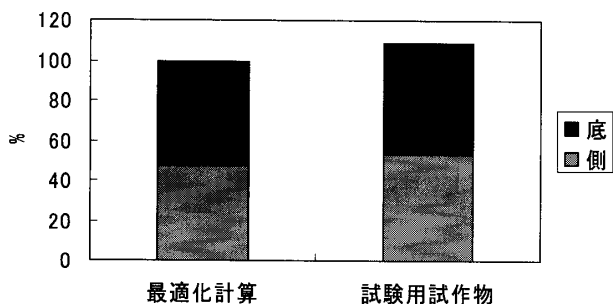


図5 最適化計算結果と試作物重量の比較 (最適化計算結果で規格化)

シールド板は仕様値 20 Gauss 以下を満たすものであり, またほぼ最適計算結果に近い重量のものでした (図 5)。

なお例えばある領域の磁気シールドの板厚みの上限や下限がさらに指定されるような場合があります。この場合 2 次錐不等号制約にさらに線形不等号制約が加わりますが, このような複雑な状況でも現在の主双対内点法では容易に処理することができます。

5. おわりに

超電導リニアの磁気シールド板の設計法の考え方を紹介しました。簡略化を施すことにより, 超電導リニアのような開空間に非一様に広がった強磁界の磁気シールドの一つの合理的な設計と評価が可能となりました。一方これら簡略化が現実的に妥当なものかどうかは, 個々の例で検証を要する問題ですが, 本件の場合 4 節で示しましたように概ね妥当な結果を示していると考えられます。本方法は超電導リニアの磁気シールド板の設計を念頭において開発しましたが, 強磁界シールドを必要とする他の分野でもこのような考え方は (第 1 近似として) 有効であると考えます。

さてモデリングは, 現象のモデル化 (物理モデリン

グ), さらに数理計画法を適用するためのモデル化 (数理モデリング), 有限要素法など数値計算を行う場合のモデル化 (数値モデリング) など様々な例において様々なレベルで行われていると思いますが, 本稿で紹介したのは主に数理モデリングでした。その際利用されるのは, 物理の基本法則・数理計画法・有限要素法などの知識や技術です。さらに本稿では省略いたしましたが, 計測という行為も広い意味で大なり小なりモデリングの一つではないかと考えております。

線形計画法が 2 次計画法や半正定値計画法に拡張されたお陰でモデリングの自由度が高まり, かなり広い事象が最適化の枠組みに組み込まれてきました。2 次推計画法を利用する本稿も, その一例と考えられます。なお本稿で扱ったものは電気工学からの話題でしたが, 工学全般への数理計画法の応用例は [7] に数多く挙げられていますので, 興味のある方はどうかご参照下さい。本稿が OR 学会の方々の参考になれば幸いです。

最後になりますが, 本稿の後半部 (3.5 節以降) は統計数理研究所の土谷隆教授との共同研究に基づいています。また東京大学情報理工学系研究科室田一雄先生には, 種々のご指導を頂きましたので, ここで記して感謝いたします。なお, 磁気シールドモックアップ試験は運輸省 (当時) の国庫補助対象事業の一環として行いました。

参考文献

- [1] 伊理正夫: モデリング, ビット臨時増刊コンピューティングと数学 (浦昭二他編), 共立出版 (1983), pp. 174-179.
- [2] 鉄道総合技術研究所編: 『ここまで来た! 超電導リニアモーターカー』, 交通新聞社, 2006.
- [3] T. Sasakawa, N. Tagawa, T. Herai and M.

- Tomita : Preliminary Design of Magnetic Shielding by FEM, *IEEE Trans. on Mag.*, Vol. 33, No. 2 (1997), pp. 1951-1954.
- [4] T. Sasakawa and T. Tsuchiya : Optimal Magnetic Shield Design with Second-Order Cone Programming, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 24 (2003), pp. 1930-1950.
- [5] 土谷隆 : 最適化アルゴリズムの新展開—内点法とその周辺 (連載), システム/制御/情報, Vol. 42 (1998), pp. 218-226, 334-343, 460-469, 550-559, 677-686.
- [6] Y. Iwasa : Magnetic Shielding for Magnetically Levitated Vehicles, *Proceedings of IEEE*, Vol. 61, No. 5 (1973), pp. 598-603.
- [7] A. Ben-Tal and A. Nemirovski : *Lectures on Modern Convex Optimization—Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, MPS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia, (2001).