「モデル」についての一数学者の雑感

深谷　賢治

1.

数学は実世界を表す言葉である，というのはよく言われるし，多くの数学者の信念でもある．本特集のテーマ「モデル」を使えば，数学は，世界のモデルを作るための道具である，とも言い換えることができる．「現実」とその数学的な表現の関係は，多くの数学者が気にかけ，それに対する考えは数学者によっていろいろ変わる．

ある数学的な体系が，実世界のモデルであるというのは，どういう事だろうか．その尺度は，一つは予言可能性であり，もう一つはモデルそのものの整合性である．予言可能性は分かりやすい尺度であり，私のようなものがなにか述べる必要はあるまい．モデルに従い何か現象を予言し，それを現実によって検証することは，科学の基本的な方法である．モデルという言葉が，比較的限定的な，状況がはっきりした問題に対して使われるときは，これが多くの場合十分な尺度であろう．

内的整合性と呼ぶべき，第2の原理が意味を持つ状況は，それとは異なる．例えば，物理現象全体の統一的モデルを考えるとか，人間の思考一般のモデルを考えるとかいった，非常に規模が大きい問題を考える場合などが，そのような状況の1つの典型であろう．そのような規模の問題を，100年単位の長期的な展望で考えるとき，結論に至るまでの長い間の思考を支える何らかの原理がない限り，意味深い研究の継続すら怪しい．そのとき使える尺度が，モデルそのものの内的整合性である．ユークリッド幾何学は，平面の幾何学の一つのモデルと考えられる．その記述様式は，内的整合性を表現するのに最適に工夫されている．そこでは，モデルは簡潔な方がよい，といった教訓が，哲学的な原理にまで高められていて，公理からの演繹に全体を還元できる事そのもの，すなわち内的整合性が，正当性の根拠を与えている．

第2の原理の，もう一つの意味は，理解可能性である．予言可能性の方が，「答えを出す」という，プラグマティックな意味を強く持っているのに対して，理解可能性は，「世界を分かりたい」という，知的好奇心を根源に持っている．この2つの対立は，おそらく，「モデルが実験・現実と合う」ということと「モデルが世界を正しく表現している」という事の相克に関わっていて，モデルとは何かという問題に関わっていると思われる．

2.

コンピュータと数学の関係が論じられたとき聞いた，一つの「数学者の悪夢」がある．

ある時，計算能力の大変高いコンピュータが作られ，数学者がそれに向かって，(今のところ数学の最大の難問の一つとされている) リーマン予想について，質問した．コンピュータはしばし考えて，YES，と答えた．数学者は理由を知りたかったが，計算機の管理者は，このコンピュータは答えを出すようには設計されているが，その理由を説明するようには設計されていない．答えは絶対に正しいから安心しなさい，と答えた．

これが悪夢であるのは，このYESという答えは，数学の進歩になにものもたらさないからである．大きな問題の解決は，必ずそこに至る過程で，新しい考え方や概念の発見を伴い，それを元にそこから先への発展の芽が生まれる．ブラックボックスであるコンピュータから得られた単なるYESという答えは，何も生み出さない．

答えだけをだすブラックボックスが重要である状況はあり得る．実際に応用される問題そのものを聞き，その答えが返ってくれば，その通りの適用をすれば，問題が解決する場合もあろう．しかし，それにも限界

ふかや　けんじ
京都大学 大学院理学研究科
〒606-8502 京都市左京区北白川追分町

がある．限界は早晩，例えば，正しい問題をブラックボックスに問うことができなくなる，という形で現れる．

モデルが，現実に対して，理解可能で整合的な像（イメージ）を提出しない限り，現実に対する次のアプローチのやり方そのものを考えることができなくなる．モデルは現実を思考する手段でもあるからである．リーマン予想が（人間によって）証明されるならば，その過程で，（リーマン予想が扱っている）ゼータ関数や素数について，新しいイメージが提出され，それに基づいて，より進んだ予想や考え方が生まれてくる．それを解く過程で再び，新しいイメージが生まれる．これが，リーマン予想の証明に対して，数学者が期待することであり，また，数学が進歩してきた過程である．ブラックボックスから返ってきたYESという答えは，この連鎖を断ち切る．

もちろん以上の記述は偏りすぎていて，正しいかどうかの答えを聞きながら，理解を修正し，正しい理解に至ったとき簡潔な内的整合性も同時に得られる，というのが，科学の多くの場合のストーリーであるのだけれど．

3.

しかし，ここでは，モデルの理解の手段としての側面について，話を進めたい．モデルを考えることによって理解をするというのはどういう事なのだろうか．

結論が数学的に組み立てられている限り，それがあっているか，というのが，明確に曖昧なく定まるのに対して，モデルによって世界を理解するというのは，より曖昧である．

あるいくつかの量が現実に現れ，その関係を考えるとき，それが量の間の式として表されているとする．しかし，その式がかなり複雑であった場合，それによって，何らかの予言は行うことができるし，それが正しければ有用である．しかし，だからといって，その式だけによって量の間の関係を理解したとは考えられないであろう．理解するためには，それらの量が関係するメカニズムを考え，そのメカニズムによって，その複雑な式が，導出されることがしめされれば，量の関係を説明するモデルができたと考えるであろう．

（その意味では，「結論の式」と「それを説明するメカニズム」の関係は，数学での，「結論となる（数学的）事実」と「それを説明あるいは証明するための概念装置」の関係に近い．）

しかし，よく考えると，メカニズムとは何なのかは，かなり曖昧である．例えば，2つの量 A, B の間の関係が $A=B$ であれば，この式そのもので理解はすでにできていると考えるべきであろう．一方，結論となる関係式が複雑な場合でも，それを説明するメカニズムが，それに輪をかけて複雑だとしたら，果たして説明になっているのか，怪しい．

こんな事を書くのは，実は，筆者のような数学者が考える「モデル」は，非常に抽象的である意味で複雑なものであり，普通に考えると，それで物事が簡単になったとはいえない場合が多いからである．にもかかわらず，数学者は，しばしば平然とそのような概念構成に携わり，それを，数学的事実の理解の手段として行う．このことについて説明をしたい．

「事実」に対して，それを説明する「メカニズム」を考えるとき，通常は，すでに知られたいくつかの概念装置の「道具箱」から，どれかを持ってきて，説明をする．それらの概念が人々の間でしばしば使われ，理解が深まっていると，理解は得られやすい．

例えば，いくつかの点と線を結んだグラフを書いて，点のところに「量」を置き，線に沿って関係を決める，などとしてやれば，分かりやすい「メカニズム」が書ける．

しかし，次のようなメカニズムになるとどうであろうか．「4次元の図形を考え，点，線，面，正四面体（これを3次元単体という），4次元単体（正四面体の4次元版），のそれぞれに量を置き，点とそれが端点である辺，線とそれが辺である面，などの間に関係がある．」こうなると，慣れない人にとっては「メカニズム」そのものが難解で，何の説明にもなっていないと感じるのではないだろうか．しかし，上に述べたのは，4次元単体複体，というもので，幾何学では普通に出てくる自然な対象である．

概念装置の「道具箱」そのものを充実させていくのが，数学の使命である．だから，数学者の考える重要な問題の多くでは，それを理解するための概念装置がまだ存在しない場合が多い．意味深い概念装置を考え出す源泉となることそのものが，問題の重要性の理由であることがしばしばあるからである．

新しい概念は，それが獲得されてしまうまでは，いかに自然なものであっても，しばしば複雑かつ難解に見える．

しかし，話はそれだけでは終わらない．多くの場合，現代数学の構成する概念装置は，理解したあとでも，

決して，グラフのようには，単純で分かりやすいものにはならない．

4.

「モデル」の構成は，「現実」と「人間」と「論理」の3つの狭間でなされる．

現実とは説明されなければならない，客観的事実であり，あるいは操作されなければならない，対象である．

人間はそれを理解したいと考えるているか，あるいは，自分の目的に合わせて現実を操作したいと考えている．

論理は現実のモデルがそれに基づいて組み立てられる体系であって，論理に基づく数学がしばしばモデルの言葉を与える．

この3者は，それぞれの内的必然性を持って動いているが，その3者の内的必然性が一致すると考える根拠は特にない．数学者はそれでも，数学の内的必然性を支える「論理」が「現実」の内的必然性と一致すると信じている．これが，数学は実世界を表す言葉である，という冒頭に述べたことの意味である．しかし，世界を理解したい人間の立場が，それと一致するかについては，筆者はそれほど楽観的ではない．

筆者はプログラムを書く能力はないのだが，人間が普通の思考で考える事柄で，プログラムになりやすいことと，なりづらいことがあり，それは，人間にとって考えるのがたやすいか，難しいかとは，必ずしも一致しないことが多い，ということはわかる．

人間はたまたま育った環境や経験の影響下にある．様々な異なった人の間でも，共通部分は大きく，人間同士のコミュニケーションの大きな部分がこの語られる必要がない共通部分に依存している．例えば，仕事を人間に頼むとき，多くの事は言わなくても常識をわきまえた人間には周知である．一方で，同じ仕事をコンピュータにさせようとすると，この言わずとしれた共通項をあてにできず，それをいちいち具体的に指定しなければならない．

数学が論理のもとに現実から自立するとき，同じような事が起こる．論理と抽象性を武器に，人間のたまたまの現実の縛りを抜け出るのが，数学の自由さの源泉であり，その代償として，「語られる必要がない共通部分」は，出発点で捨て去られなければならない．

だから，人々の間の経験の共通部分がある故に，可能であったコミュニケーションが不可能になる一方，「論理」にあるいは「数学」にとっては，自然で重要なものが，「人間」にとってそうであるかどうかとは無関係に，しばしば現れてくる．

「論理」にとって自然で重要なものである限り，ある程度までは，専門家が，訓練を積み，人間にとって自然な思考をねじ曲げて「論理」に合わせて自己をゆがめることで，それを理解することは可能である．それが，数学の抽象化以後の進歩の実体であったように思われる．

ここまで述べると，理解のための道具としてのモデルを論理と数学の言葉で組み立てるということが，一見して感じられるほど，単純な事でないと，筆者が考える理由を分かって頂けるのではないだろうか．理解を可能にすること，というのは，普通に言う，分かりやすくすること，とは意味が必ずしも一致しない．その根拠は，「論理」の世界での内的必然性との一致であり，「人間」にとってのわかりやすさではない．

5.

ある小説の中で次のような疑問が書いてあった．

昔モーツアルトの音楽，特に後期の作品は，難解すぎるが故に，客離れを起こし，モーツアルトは，経済的に苦境にたった．当時の，一番の音楽通であった貴族たちでさえ，難しすぎるといって，演奏会の切符を買わなかった，モーツアルトの後期のピアノ協奏曲が，現代の必ずしも音楽の素養が深いとも限らない聴衆に，むしろクラッシック音楽の入門として，さして問題なく受け入れられるのはなぜなのだろうか．

同じ小説に書いてあった答えは，次の通りであった．

それは人々の美しい音楽という感性が進化したからだ．進化をさせたのは，例えば，モーツアルトの音楽そのものだ．新しく発見された美しい音楽の基準が，浸透し次第に人々の間で理解され，それによって，人々が日常的に聞く音楽が変わることによって，人々の音楽に関する感性が進化したのだ．

これを，勝手に当てはめると，数学の進化が，次第に人々のものの考え方を進化させ，前にはとても理解が難しいと思われた考え方まで，次の世代はいともたやすく理解するようになる，ということになるのだが，とても筆者はそこまでは楽観的になれない．

だからといって，重要な問題には，工夫さえすれば，誰でもわかりやすく，そして有用なモデルが作れると思います，などという，小学校の優等生のような回答が本当とは思われない．

6.

なんだか，本誌の他の記事とは離れた，中身のない随筆を書いてしまったようで気が引ける．筆者が研究している数学の内容に関わるようなことを，本誌に書けない理由は，この記事の中身を読めばご想像頂けるだろう．

わかりやすいなどとは言えないし，言う気もない，現代数学の高度に抽象化された概念装置が，現実のモデル化のための言葉として，それでも，いやそれだからこそ強力な道具なのだと，筆者が考える理由の一端をご理解頂ければ幸いである．