最適停止構造をもつ経路依存型オプションの価格評価

菊地　一哲
（北海道大学大学院経済学研究科現代経済経営専攻　現所属・㈱三井住友銀行）
指導教員　木村俊一 教授

1. はじめに

最適停止構造をもつ経路依存型オプションとは，満期以前に行使や解約が可能なオプションや，ペイオフ関数が原資産価格の経路に依存し，かつ早期行使可能なオプションのことである．実務上および理論上の両面から重要であるにもかかわらず，その価格評価に対しては，これまでにいくつかの数値解法が提案されるに留まっている．

ラプラス変換アプローチは，オプション価格評価問題をラプラス逆変換問題に帰着させるものであり，ラティス法，有限差分法，そしてモンテカルロ法などの数値解法と同様に汎用的な方法である．しかし，ファイナンスの分野には，ラプラス変換法を駆使できる素養をもつ研究者が比較的限られていることや，数値的逆変換の不安定性に起因して，このアプローチによるオプション価格評価の研究が必ずしも十分に行われてきたとはいえない．とりわけ，最適停止構造をもつオプションへの応用研究は極めて少なく，アメリカ型バニラ・オプションに対して開発された確率化法（Carr[2]，Kimura[3]）が存在しているのみである．本論文の目的は，ラプラス変換アプローチを用いて，ヨーロッパ型とアメリカ型連続インストールメント・オプション，およびアメリカ型変動ストライク・ルックバック・オプションの価格評価を統一的に行い，本解法の有効性や問題点を明らかにすることである．同様のアプローチで残りのオプションも計算可能なので，ヨーロッパ型連続インストールメント・オプションの価格評価について述べる．

連続インストールメント・オプション（Alobaidi *et al.*[1]）とは，購入時に一括でそのプレミアムを支払うのではなく，少額の初期プレミアムを支払ってから，オプション契約を維持するために必要な金額を，ある単位時間当たり一定の率に従って分割で支払い続けるという経路依存型オプションである．オプション保有者は，満期以前に分割払いを続けるのか，あるいは支払いを止めて契約を解約するのかを選択できる．解約時点のペイオフはゼロである．満期時点のペイオフは，バニラ・オプションと同じであるが，満期まで分割払いを行ってはじめて，そのペイオフを享受できる点が異なる．

2. 偏微分方程式による定式化

市場は完備で無裁定であると仮定する．$(W_t)_{t\geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上の標準ウィーナー過程とするとき，原資産価格過程 $(S_t)_{t\geq 0}$ はリスク中立化された確率微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=(r-\delta)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t,\ t\geq 0,$$

に従うと仮定する．ここで，$r>0$ は安全利子率，$\delta\geq 0$ は原資産の配当率，そして，$\sigma>0$ は原資産のボラティリティであり，それぞれ定数とする．

$T>0$ を満期，K を行使価格とし，$q>0$ は連続支払い率とする．このとき，時刻 t におけるヨーロッパ型連続インストールメント・コール価格を $c(t, S_t; q)$ と定義する．満期時点 T のペイオフ関数は，$(S_T-K)^+$ で与えられる．ここで，$(x)^+=x\vee 0$ とする．

無裁定価格理論から，コール価格 $c(t, S_t; q)$ は $t\in[0, T]$ に対して，最適停止問題

$$c(t, S_t; q)=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in[t,T]}\mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}-\frac{q}{r}(1-e^{-r(\tau\wedge T-t)})|\mathcal{F}_t]$$

の解として与えられる．ここで，τ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ に関する停止時刻であり，条件付き期待値はリスク中立確率測度 $\mathbb{P}$ の下で計算されている．

コール保有者が満期以前に解約を行った方が有利になるような原資産価格の臨界値，すなわち停止境界を $(\underline{S}_t)_{t\in[0,T]}$ と定義する．このとき，原資産価格 $S\equiv S_t$ とコール価格 $c\equiv c(t, S; q)$ から構成される裁定ポートフォリオの考え方より，コール価格が以下の非同次ブラック・ショールズ・マートン偏微分方程式を満たすことを示すことができる．

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}+(r-\delta)S\frac{\partial c}{\partial S}+\frac{\partial c}{\partial t}-rc=q,\ S>\underline{S}_t$$

ただし，終端条件は

$$c(T,S;\ q)=(S-K)^+$$

であり，境界条件は

$$\lim_{S\downarrow\underline{S}_t} c(t,S;\ q)=0,\ \lim_{S\downarrow\underline{S}_t}\frac{\partial c}{\partial S}=0,\ \lim_{S\uparrow\infty}\frac{\partial c}{\partial S}<\infty$$

で与えられる．

3. ラプラス変換による価格評価

残存時間 $\tau=T-t\geq 0$ に対して，時間を逆向きにしたコール価格と停止境界をそれぞれ $\tilde{c}(\tau,S;\ q)=c(T-\tau,S;\ q)$, $\underline{\tilde{S}}_\tau=\underline{S}_{T-\tau}$ とする．このとき，実数 $\lambda>0$ に対して，コール価格 $\tilde{c}(\tau,S;\ q)$ と停止境界 $\underline{\tilde{S}}_\tau$ のラプラス・カールソン変換（LCT）をそれぞれ

$$c^*(\lambda,S;\ q)=\mathcal{LC}[\tilde{c}(\tau,S;\ q)]$$
$$\equiv\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\tilde{c}(\tau,S;\ q)\mathrm{d}\tau,$$
$$\underline{S}^*(\lambda)=\mathcal{LC}[\underline{\tilde{S}}_\tau]$$

と定義する．

$\underline{S}^*\equiv\underline{S}^*(\lambda)$ とし，領域 $\mathcal{D}_1=(K,\infty)$, $\mathcal{D}_2=(\underline{S}^*,K]$, $\mathcal{D}_3=[0,\underline{S}^*]$ を定義する．このとき，

定理 1 実数 $\lambda>0$ に対して，コール価格の LCT は

$$c^*(\lambda,S;\ q)=\begin{cases} a_2\left(\dfrac{S}{K}\right)^{\theta_2}+\dfrac{\lambda S}{\lambda+\delta}-\dfrac{\lambda K+q}{\lambda+r}, & S\in\mathcal{D}_1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}a_{i+2}\left(\frac{S}{K}\right)^{\theta_i}-\frac{q}{\lambda+r}, & S\in\mathcal{D}_2, \\ 0, & S\in\mathcal{D}_3 \end{cases}$$

で与えられる．ここで，未知パラメータ $\theta_1\equiv\theta_1(\lambda)>0$ と $\theta_2\equiv\theta_2(\lambda)<0$ は 2 次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2+(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)\theta-(\lambda+r)=0$$

の実根であり，係数 $a_i(i=2,3,4)$ は，それぞれ

$$a_2=\gamma_1-\gamma_2\frac{\theta_1}{\theta_2}\left(\frac{\underline{S}^*}{K}\right)^{\theta_1-\theta_2},\ a_3=\gamma_2,\ a_4=a_2-\gamma_2$$

で与えられる．ここで，$\gamma_i(i=1,2)$ は

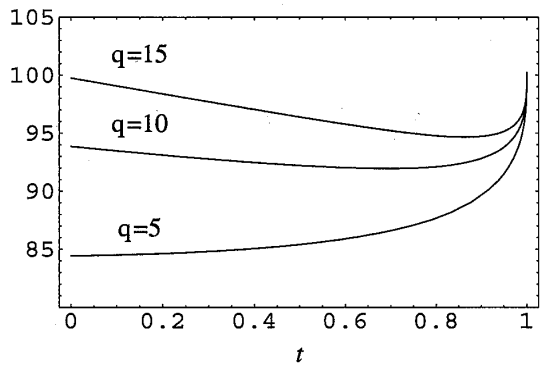

図 1 インストールメント・コールの停止境界（$T=1.0$, $K=100$, $\sigma=0.2$, $r=0.05$, $\delta=0.04$）

$$\gamma_i=\frac{K}{\theta_1-\theta_2}\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left(1-\frac{r-\delta}{\lambda+r}\theta_i\right)$$

で定義される．さらに，停止境界の LCT $\underline{S}^*$ は

$$\underline{S}^*(\lambda)=\left[\frac{2(\lambda+\delta)q}{\lambda(1-\theta_2)K\sigma^2}\right]^{\theta_1^{-1}}K$$

で与えられる．

4. 数値実験

図 1 は，オイラー法を用いて，停止境界を連続支払い率 $q\in\{5,10,15\}$ を変化させながら時刻についてプロットしたものである．連続支払い率 q が大きくなるにつれて，停止境界は単調に増加する．これは，（期待される）満期時点のペイオフに占める支払い分の割合が増加するため，コールを満期以前に解約する確率が高くなることを意味し，直感と整合的である．

参考文献

[1] Alobaidi, G., Mallier, R. and Deakin, S., "Laplace transforms and installment options," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14 (2004) 1167-1189.

[2] Carr, P., "Randomization and the American put," *Review of Financial Studies*, 11 (1998) 597-626.

[3] Kimura, T., "Alternative randomization for valuing American options," Discussion Paper Series A, No. 2004-131, Hokkaido University, 2004.