ハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の近似解法

岩佐　大
（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・㈱みずほコーポレート銀行）
指導教員　松井知己 教授，杉原厚吉 教授

1. 概要

航空会社にとって，ハブ空港を中心としたネットワークを適切に構築することは重要な課題である．米国では1978年の航空規制緩和をきっかけに，O'Kelly[3]をはじめとする多くの研究がハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題に対して行われてきた．近年になりSohn and Park[4]は，ハブ空港の配置が既知であるとき，非ハブ空港からハブ空港への接続を決定する問題を2次整数計画問題として定式化している．ハブ空港数が3つ以上のとき，この問題はNP困難であるが，現在まで精度保証付き近似解法は知られていなかった．本論文では，Sohn and Park[4]により定式化された問題に対する精度保証付き近似解法を提案する．具体的には，ハブ空港数が一般の場合に対してロバストな3-近似解法と独立ラウンディングに基づく2-近似解法を提案し，ハブ空港数が3つの場合に対しては(5/4)-近似解法を提案する．

本論文ではまた，Kleinberg and Tardos[2]により定義されたメトリックラベリング問題に対して，ラベル数が3つの場合に適用できる(4/3)-近似解法を提案する．本論文ではさらに，メトリックラベリング問題の特殊ケースであるユニフォームラベリング問題に対して，ラベル数が4つの場合に適用できる(5/3)-近似解法を提案する．これにより，ラベル数が4つのユニフォームラベリング問題に対する現在の最善の近似率11/6を改善することができる．

2. 問題の定義および定式化

h個のハブ空港とn個の非ハブ空港，および各空港間の輸送量と単位輸送コストが与えられているものとする．非ハブ空港は唯一のハブ空港に接続し，非ハブ空港間の輸送はハブ空港を経由して行われる．また，各ハブ空港間は直行便をもち，乗り換えは2回までとする．本論文では，以上の条件の下で，総輸送コストを最小化するように非ハブ空港からハブ空港への接続を決定する問題を扱う（図1）．

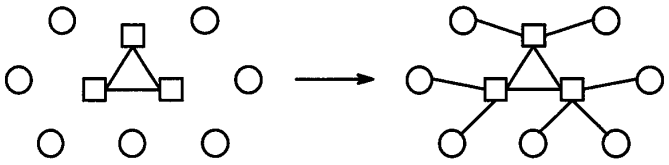

図1　非ハブ空港からハブ空港への接続例（□はハブ空港，○は非ハブ空港を表す）

h個のハブ空港の集合を$H:=\{1,2,\cdots,h\}$，n個の非ハブ空港の集合を$N:=\{1,2,\cdots,n\}$，空港iからjへの輸送量と単位輸送コストをそれぞれ$w_{ij}(\geq 0)$，$c_{ij}(\geq 0)$とする．

仮定2.1　単位輸送コストは，次の条件を満たす．

(i)　$c_{ii}=0(\forall i\in H\cup N)$.

(ii)　$c_{ij}=c_{ji}(\forall(i,j)\in(H\times H)\cup(H\times N)\cup(N\times H))$.

(iii)　$c_{ij}\leq c_{ik}+c_{kj}\ (\forall(i,j,k)\in H^3)$.　□

いくつかの近似解法においては，次の条件も仮定する．この仮定は，ハブ空港間の輸送における規模の経済に由来するものである．

仮定2.2　$c_{ij}\leq c_{pi}+c_{pj}\ (\forall(p,i,j)\in N\times H^2)$.　□

この問題は，2次整数計画問題として定式化することができるが，式変形により等価な混合整数計画問題として，次のように表現する方法も知られている：

$$
\begin{aligned}
\text{min.}\ & \textstyle\sum_{p\in N}\sum_{q\in N}w_{pq}\Big(\sum_{i\in H}c_{pi}x_{pi}\\
&\quad+\textstyle\sum_{i\in H}\sum_{j\in H}c_{ij}y_{piqj}+\sum_{j\in H}c_{jq}x_{qj}\Big)\\
\text{s.t.}\ & \textstyle\sum_{i\in H}x_{pi}=1 && (\forall p\in N),\\
& \textstyle\sum_{j\in H}y_{piqj}=x_{pi} && (\forall(p,q)\in N^2,\ \forall i\in H),\\
& \textstyle\sum_{i\in H}y_{piqj}=x_{qj} && (\forall(p,q)\in N^2,\ \forall j\in H),\\
& x_{pi}\in\{0,1\} && (\forall(p,i)\in N\times H),\\
& y_{piqj}>0 && (\forall(p,q)\in N^2,\ \forall(i,j)\in H^2).
\end{aligned}
$$

ただし，x_{pi}は，非ハブ空港pをハブ空港iに接続するときに1の値をとり，接続しないときに0の値をとる．またy_{piqj}は，$y_{piqj}:=x_{pi}x_{qj}$を満たす変数である．本論文では，この混合整数計画問題の整数制約を連続緩和することにより得られる線形緩和問題を

LPRと名付けた．そして，LPRに基づく近似解法を提案し，解法により得られる2次整数計画問題の許容解における，目的関数値の上界を理論的に保証した．

3. ハブ空港数が一般の場合に対する解法

本節では，ハブ空港数が一般の場合に対する3-近似解法と2-近似解法を提案する．

解法3.1（3-近似解法） 各非ハブ空港を，最も単位輸送コストが小さいハブ空港に接続する．

解法3.1は，確定的な解法であり，非常にシンプルであることが特徴である．また，各空港間の輸送量に依存せず，輸送量の変化に対してロバストな解法となっている．

定理3.2 仮定2.1と仮定2.2の下で，解法3.1は，ハブ空港数が一般の場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の3-近似解法である．

次に，2-近似解法を提案する．この解法は，基本的な確率的解法であり，独立ラウンディングと呼ばれる手法に基づくものである．

解法3.3（2-近似解法）

1．線形緩和問題LPRを解き，最適解$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$を得る．

2．各非ハブ空港$p \in N$を独立に，最適解x^*_{pi}の値と同じ確率でハブ空港$i \in H$に接続する．

定理3.4 仮定2.1と仮定2.2の下で，解法3.3は，ハブ空港数が一般の場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の2-近似解法である．

4. ハブ空港数が3つの場合に対する解法

本節では，ハブ空港数が3つの場合に対する(4/3)-近似解法と(5/4)-近似解法を提案する．(4/3)-近似解法は，Bertsimasら[1]により近年提案された従属ラウンディングと呼ばれる手法に基づくものである．

本稿では以降，ハブ空港間の単位輸送コストを$a := c_{12}, b := c_{23}, c := c_{13}$と表す．また，ハブ空港の順列全体の集合を$\Pi$と表す．LPRの実行可能解が与えられたとき，任意の順列$\pi \in \Pi$に対して次の手続きを定める．

従属ラウンディングπ

1．区間$[0, 1)$で一様分布に従う確率変数Uを1つ生成する．

2．各非ハブ空港$p \in N$を，ハブ空港$\pi(i)$に接続する．ただし，$i \in \{1, 2, \cdots, h\}$は$U < x_{p\pi(1)} + \cdots + x_{p\pi(i)}$を満たす最小の番号である． □

ここで，ハブ空港の順列$(2, 1, 3)$，$(3, 2, 1)$，$(1, 3, 2)$をそれぞれ，π^1，π^2，π^3と表す．本論文では，3種類の従属ラウンディングπを用いる枠組みを導入することにより，近似率4/3を達成できることを示した．

解法4.1（(4/3)-近似解法）

1．線形緩和問題LPRを解き，最適解$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$を得る．

2．従属ラウンディングπ^1，π^2，π^3を，α_1，α_2，α_3の確率でそれぞれ実行する．ただし，確率α_1，α_2，α_3は次のように与えられる：

$$\alpha_1 = b(b+c-a)(a+b-c)/M,$$
$$\alpha_2 = c(c+a-b)(b+c-a)/M,$$
$$\alpha_3 = a(a+b-c)(c+a-b)/M,$$
$$M = 4abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

定理4.2 仮定2.1の下で，解法4.1は，ハブ空港数が3つの場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の(4/3)-近似解法である．

最後に，(5/4)-近似解法を提案する．この解法は，これまでに提案した2-近似解法と(4/3)-近似解法を併用することにより，近似率を改善するものである．

解法4.3（(5/4)-近似解法） 2-近似解法と(4/3)-近似解法を実行し，目的関数値が小さい方の解を出力する．

定理4.4 仮定2.1と仮定2.2の下で，解法4.3は，ハブ空港数が3つの場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の(5/4)-近似解法である．

本稿で提案した近似解法の枠組みは，メトリックラベリング問題に対する近似解法の設計にも応用することができる．

参考文献

[1] D. Bertsimas, C. Teo and R. Vohra, "On dependent randomized rounding algorithms," Operations Research Letters, 24 (1999), pp. 105-114.

[2] J. Kleinberg and E. Tardos, "Approximation algorithms for classification problems with pairwise relationships," Journal of the ACM, 49 (2002), pp. 616-630.

[3] M. O'Kelly, "A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities," European Journal of Operational Research, 32 (1987), pp. 393-404.

[4] J. Sohn and S. Park, "The single allocation problem in the interacting three-hub network," Networks, 35 (2000), pp. 17-25.