# 段ボール製造スケジューリング問題のアルゴリズムと計算の複雑さに関する研究

松本　一輝
(関西学院大学理工学部情報科学学科　現所属・京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻)
指導教員　茨木俊秀 教授

## 1. はじめに

段ボールは，通常上中下（つまり表中裏）の3種類の紙を貼り合せて作られる．1つの注文では，これら3種類の紙の種類，幅と長さが指定される．これらの注文は，何種類かの標準幅のいずれかに割付けられたのち，コルゲータという機械を用いて，対応する3ロール原紙から引き出しつつ連続的に貼り合わせて製造されるが，このとき，ロール原紙の全長の最小化に加え，幅の不整合によって生じる紙のロス，および製造工程におけるロールの交換手間を最小化することが求められる．

本研究では，標準幅への割付けを整数計画問題に定式化した後，各標準幅における処理順序を決定するスケジューリング問題を解く．この問題はNP困難であり，それを解くための近似アルゴリズムを構成した．

## 2. 段ボールの製造工程とスケジューリング

### 2.1 注文の定義と標準幅への割付け

注文 $j=1,\dots,n$ は次のデータによって定義される．

注文 $j$：長さ $l_j$，幅 $w_j$，および上中下の紙質 $a_j$，$b_j$，$c_j$．

ただし，$a_j \in A(=\{A_0, A_1, \dots, A_{k_1}\})$，$b_j \in B(=\{B_0, B_1, \dots, B_{k_2}\})$，$c_j \in C(=\{C_0, C_1, \dots, C_{k_3}\})$ であって，$A$，$B$，$C$ はそれぞれ上，中，下の使用可能な紙質の集合を表す．各注文は，ロールの標準幅 $W_i(i=1,2,\dots,m)$ のいずれかに割付けられる．一般に各注文 $j$ は，割り当てられる標準幅に応じて多重化して処理されるため，注文 $j$ を標準幅 $W_i$ に割り当てたとき，多重化後の長さを $l_{ij}$ とする．

### 2.2 $L^*$ 制約

次に製造工程における $L^*$ 制約を説明する．表1に示すように，ある標準幅 $W_i$ に注文1~7が割り当てられたとする．注文は1から7まで左から順に処理されるとして，上紙に着目してみる．同じ紙質が連続して処理されるときには長さをまとめると，$A_1$ が160，$A_2$ が630，$A_0$ が1670，$A_2$ が210，$A_1$ が650という順になる．このとき「各紙質の長さが $L^*$ 以上なければならない」というのが $L^*$ 制約である．長さが短いと，ロールの切り替えが間に合わないため，機械を停止させねばならないからである．例として，$L^*=400$ とすると，表1のスケジュールでは，上ロールに関して，注文1と2，5と6の間で機械が止まる．$L^*$ 制約は中ロール，下ロールにも適用される．中ロールでは注文2と3，6と7の間，下ロールでは注文1と2の間で機械が止まるので，上中下すべてを考えると，機械を4回止めなくてはならない．この $L^*$ 制約による停止回数を少なくするように，注文の処理順序を決定する必要がある．

表1　標準幅に割付けられた注文例

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_{ij}$ | 160 | 180 | 450 | 1670 | 210 | 200 | 450 |
| $a_j$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_0$ | $A_2$ | $A_1$ | $A_1$ |
| $b_j$ | $B_1$ | $B_1$ | $B_0$ | $B_2$ | $B_2$ | $B_1$ | $B_0$ |
| $c_j$ | $C_0$ | $C_2$ | $C_2$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ |

## 3. ロール割付けの整数計画問題による定式化

注文の標準幅への割付けにおいて，注文幅と標準幅の違いにより，紙のロスが生じるため，ロスを最小化する必要がある．次に，各注文は割付ける標準幅によって長さが異るが，全標準幅で使用されるロールの長さの合計値は，1日の作業時間にほぼ比例するため，ロールの全長の最小化が求められる．また前述の通り，各標準幅に注文を割り付けた後，注文の処理順序を求める際に $L^*$ 制約を満たす必要がある．このため，一つの標準幅には，同じ紙質をもつ注文をまとめて割付けるのが望ましい．

本論文では，この問題を複数の目的関数の重み和を

最小化する整数計画問題[1]に定式化し，汎用ソルバー CPLEX によって解を求めた．

## 4. 標準幅 $W_i$ 上での近似解法

### 4.1 $L^*$ 制約下での順序付け問題

整数計画問題によって，標準幅 $W_i$ に割付ける注文の集合が定まった後，$L^*$ 制約を満たす順列が存在するかどうかを判定する問題を 3-PATCH と命名し，以下のように定義する．

3-PATCH

**入力**：$a_j \in A,\ b_j \in B,\ c_j \in C,\ l_j \in Z^+,\ j=1,2,\ldots,n$ および $L^* \in Z^+$.

**出力**：$\{1,\ldots,n\}$ のある順列 $\sigma=(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ が，$L^*$ 制約を満たすならば YES，さもなければ NO.

この 3-PATCH は，NP 完全[2]であることを示すことができる．証明は，3-PARTITION および PARTITION[2]からの帰着によって行った．

これは，各標準幅での順序付けのために，現実的には近似解法が必要となることを示している．そこで，以下に述べる接合集合という概念を用いて順列の列挙を効率化する．

**接合集合** $L^*$ 制約を満たすために，必ず連続しなくてはならない注文集合．

詳細は省略するが，すべての接合集合を列挙する計算は，線形時間で可能である．例えば表1では，注文{1, 6, 7}は接合集合となる．つまり表1の全部で 7！通りある順列の中で注文{1, 6, 7}が連続する順列のみを考慮すればよい．これにより，順列の候補数を削減できる．

### 4.2 機械停止回数の最小化問題

実行可能でない接合集合（どのような順序で接合集合内の注文集合を並べても，$L^*$ 制約が満たされない）が存在する場合，機械停止が必要となり，停止回数の最小化をはかりたい．このとき，実行可能でない接合集合内の注文で，少なくとも1回機械を停止させなければならないことに着目すると，多項式時間で，停止回数の下界値を求めることができる．

このように，接合集合を用いて順列の候補数を限定し，機械停止回数の下界値を計算した後は，欲張り法に基づく近似アルゴリズムを用いて，順列を出力する．

## 5. 計算実験

表2に，現実のデータとして得られた270個の注文を，18個の標準幅に割付けたのち，製造順列を求めるという問題例に対し，熟練者によるスケジュール結果と本論文のアルゴリズムとの比較結果を示す．

表2 270個の注文例に対する計算結果

| | 熟練者の方法 | 本論文の方法 |
|---|---|---|
| ロールの全長 | 44787$m$ | 42439$m$ |
| ロス面積の割合 | 2.50842 % | 3.25157 % |
| 機械停止回数 | 20 | 1 |

本論文のアルゴリズムによる計算では，全ロール長の最小化に重点を置いて，標準幅への割付けを行っている．その結果，表2にあるように，ロール全長が約 2300 $m$ 減少している．特に注目すべきは，機械停止回数が20回から1回に減少していることで，整数計画問題とその後のスケジューリングアルゴリズムの効果を示している．反面，紙のロス面積は，約0.75%増加している．なお，本論文の数値実験に用いたPCは，Pentium 4，CPU 2.60 GHz，メモリ 780 MB であり，整数計画問題を解くために要した計算時間は数秒，その後のスケジューリングには，0.012秒要している．

これら以外にも，いくつかのデータ例に対し，計算を行ったが，いずれもほぼ同様の結果が得られ，実用上十分有効であることが実証された．

## 6. むすび

実際の製造現場では，1つの標準幅 $W_i$ で処理される注文数は，10〜30程度であるが，理論上は，更に多くの注文を処理しなくてはならない場合も考えられる．このような場合における本論文のアルゴリズムには，改善の余地が残されており，今後更なる技能向上を目指す．

なお，今回の研究は，セッツカートン株式会社の協力の下で行われた．貴重なデータおよびスケジュール例を提供していただいたことを深く感謝いたします．

最後に，論文を執筆するにあたって誤りや多くの改善点を指摘してくださいました指導教官の茨木俊秀教授，巳波弘佳助教授に深く感謝いたします．

### 参考文献

[1] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey: Integer and Combinational Optimization, John Wiley, 1988.

[2] G. L. Garey and D. S. Johnson: Computers and Intractability, W. H. Freeman and Company, 1979.