強連結有向グラフ上の整合円順列

松田　拓朗
（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・富士通㈱）
指導教員　岩田　覚 助教授

1. 要旨

強連結有向グラフの頂点はグラフの安定数以下の閉路で覆うことが出来るというGallai (1964) の予想が，Bessy-Thomassé (2004) によって肯定的に解決された．彼らは，整合円順列という概念を提案し，円順列が整合的であるときに成り立つ最大最小定理の系としてGallaiの予想を証明した．Sebö (2004) は整合円順列を求める多項式時間アルゴリズムを与えるとともに，整合円順列が与えられたグラフから最小費用流問題を解くことによってGallaiの予想を満たす安定集合と閉路被覆が得られることを示した．

本研究では，Knuth (1974) による強連結グラフの分解を用いて得られる結果から整合円順列を求める効率的なアルゴリズムが導かれることを示した．また，強連結グラフの耳分解を用いて整合円順列を求めるより高速なアルゴリズムを提案した．

2. Gallaiの予想

Bessy-Thomasséは，整合円順列という概念を導入し，全ての有向グラフに整合円順列が存在することを示した．さらに，整合円順列が与えられた強連結グラフにおける最大最小定理を示し，そこからGallai[2]の予想が正しいことを証明した．

定理1 (Bessy-Thomassé[1]，Gallai[2]の予想)
強連結グラフの頂点はグラフの安定数 α 個以下の閉路で覆うことができる．

さらにこの結果を受けてSebö[4]は，整合円順列を求める多項式時間アルゴリズムと，重みつきの場合も含むBessy-Thomasséの最大最小定理の最大値，最小値を達成する解を求めるアルゴリズムを提案した．

3. 円順列と整合性

V の線形順序 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ という関係に，v_1 が v_n の次に続くという関係を加えたものを V 上の**円順列**と呼ぶ．

円順列から n 通りの線形順序を得ることができる．線形順序は**前向き枝** (v_iv_j, $i<j$) と**後ろ向き枝** (v_jv_i, $i<j$) を持つ．ある円順列と有向グラフが与えられたとき，G のすべての閉路 C に対し，**回転数**が定義され，$\mathrm{ind}(C)$ で表す．回転数は G 上で閉路をたどったときに円順列を何周するかに対応し，円順列から得られる線形順序の後ろ向き枝の数と一致する．強連結有向グラフ $G=(V,A)$ の頂点集合 V 上に与えられた円順列が**整合円順列**であるとは，全ての枝 $a\in A$ に対し，$a\in C$ かつ $\mathrm{ind}(C)=1$ であるような閉路 C が存在するときをいう．Bessy-Thomassé[1]は全ての強連結有向グラフが整合円順列を持つことを示した．

4. 整合円順列を求めるアルゴリズム

これまでの先行研究ではSeböによる $O(n^2m^2)$ のアルゴリズムFASOが知られていた．本研究ではまず，Knuth[3]の強連結グラフの分解を用いて計算量 $O(m^2)$ のアルゴリズムKDOを得た．Knuthは全ての強連結グラフが $G_1, \cdots, G_k$ がそれぞれ強連結グラフになるように図1のように分解できることを示した．さらに，その分解を用いて次のように枝を2種類に分類できることを示した．

補題1 (Knuth[3]) 有限の強連結グラフ $G=(V,A)$ が与えられて，$v\in V$ を任意に選んだとき，以下の3つの条件を満たすように G の全ての枝を2種類（(f)と(b)）に分けることができる．

(i) (b)を通らない閉路はない．

(ii) 任意の $a\in A$ は，(b)が1つだけで残りは(f)の閉路に含まれる．

(iii) 任意の $v_0\in V\setminus\{v\}$ に対し，v_0 から v へ(f)の枝だけのパスがある．

(i)，(ii)を満たすように枝が分類されているときに，(iii)を満たすように(f)と(b)を順次入れ替える操作を枝操作と呼ぶ．本研究では，補題1を満たすように枝が分類された状態において，(f)の枝のみに対してトポロジカルソートを行うことで整合円順列が得られることを示

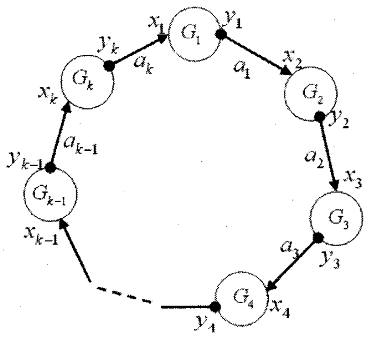

図1 Knuth 分解

し，計算量 $O(m^2)$ のアルゴリズムKDOを構成した．

さらに，枝の分類に耳分解を用いて整合円順列を求めるアルゴリズムEDOを提案した．

アルゴリズムEDO：

1. $D=(V(D), A(D))$ とし，1点 $v\in V$ を選び，$V(D)=\{v\}$, $A(D)=\emptyset$ とする．
2. $(A\setminus A(D))\cap\delta^+v\neq\emptyset$ な $v\in V(D)$ を選ぶ．そのような v がなければ4へ．
3. D において，v を中心に枝操作する．
   while$(A\setminus A(D))\cap\delta^+v\neq\emptyset$ *do*
   $a\in(A\setminus A(D))\cap\delta^+v$ を選び，a を(b)とする．
   $\partial^- a$ から $D(V)$ へのパス P をみつける．
   全ての $a\in A(P)$ を(f)とする．
   $V(D)\leftarrow D(V)\cup V(P)$, $A(D)\leftarrow A(D)\cup A(P)\cup\{a\}$ とする．
   2.へ戻る．
4. (f)の枝に対しトポロジカルソートを行う

計算量を評価すると，次の定理が成り立つ．

定理2 アルゴリズムEDOは計算量 $O(nm)$ で整合円順列を求める．

計算機実験により，アルゴリズムEDOで非常に高速に整合円順列が求められることが確認された．

5. 最大最小定理

Sebö[4]は，Bessy-Thomassé[1]の結果にさらに重みをつけた次の最大最小定理を示した．

定理3 (Sebö[4]) 整合円順列の与えられた強連結有向グラフ $G=(V, A)$ において，w: $V(G)\rightarrow \mathrm{N}$ とする．そのとき，$\max\{w(S): S$ は円安定集合$\}=\min\{\sum_{C\in\mathscr{C}}\mathrm{ind}(C): \mathscr{C}$ は w 被覆$\}$

この定理において任意の $v\in V$ に対して $w(v)=1$ の場合がGallaiの予想を含んでいる．

Sebö は，強連結グラフが与えられたときに定理3の等号を満たす解は次の2つのステップを行うことで求められることを示した．

Step 1 G に対して整合円順列を与える．

Step 2 G の補助グラフ．$\hat{G}$ を作り，最小費用流問題を解く．

$w=1$ としてこのアルゴリズムを実行すると定理1 (Gallaiの予想) を満たす閉路の集合と安定集合が得られる．Step 1の計算量は，これまでの先行研究では $O(n^2m^2)$ であったが，アルゴリズムEDOを用いることにより $O(nm)$ となる．Step 2は，Goldberg-Tarjanのアルゴリズムを用いて $O(nm\log(n^2/m)\log n)$ で解くことができる．よって，全体の計算量を $O(n^2m^2)$ から $O(nm\log(n^2/m)\log n)$ に改善することができた．

参考文献

[1] S. Bessy and S. Thomassé: Three min-max theorems concerning cyclic orders of strong digraphs. *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, LNCS 3064, Springer-Verlag, 2004, pp. 132-138.

[2] T. Gallai: Problem 15. *Theory of Graphs and its Applications*, M. Fiedler ed., Czech Acad. Sci. Prague, 1964, p. 161.

[3] D.E. Knuth: Wheels within wheels. *J. Combin. Theory*, Ser. B, 16 (1974), pp. 42-46.

[4] A. Sebö: Minmax relations for cyclically ordered digraphs. *Cahiers du Laboratoire Leibniz.*, Septembre 2004.