成人を迎えた主双対内点法

吉瀬　章子

キーワード：最適化，線形計画問題，内点法

1.　はじめに

1984年のKarmarkarの論文以来20年以上が経過し，内点法は大規模な線形計画問題に対する解法としてすっかり定着している．一口に内点法と言っても数多くの解法が提案されているが，現在もっとも広く用いられている解法は主双対内点法である．筆者は主双対内点法の研究グループの末席に座しつつその誕生と普及の様子を目の当たりにし，現在もこの解法の拡張と改良を研究課題の1つとしている．

この稿では，筆者が主双対内点法の研究に参加させて頂いた経緯とその後の進展，そして最後に現在の研究状況について簡単に紹介させて頂こうと思う．他にも多くの重要な成果が示されているが，誌面の関係から割愛させて頂いていることをなにとぞお許し頂きたい．なお以下で参照する研究成果は，論文がリサーチレポートとして公開された年月をもとに記述している．参考文献には学術雑誌に掲載された年月を記しているため，文中と1,2年の差が生じていることをお断りしておく．

2.　Karmarkar法との出会い

1985年3月，東京工業大学経営システム工学科で森雅夫先生（現慶応大学），鈴木久敏先生（現筑波大学）の手厚いご指導にもかかわらず，私は自身の力不足で満足な卒業研究に至らなかった．多少暗い気持ちで迎えた春休みだったが，この間に研究室仲間の1人でもその論文に興味をもったならば，現在のように研究を続けることも，この原稿を書かせて頂くこともなかったに違いない．

それは前年4月のシンポジウムで発表されたKarmarkar法の最初の論文[14]で，すでに何度もコピーされた後らしく，今見返しても文字がかすれていてかなり読みにくい．プロセス工学を学ぶ先輩から「新しい線形計画法の解法らしいが，読んで説明してほしい」と持ち込まれたものの，各自の研究テーマに忙しい先輩友人らの関心を引くことなく，結局私の机の上に置かれることになった．

心機一転とばかり読み始めたものの，単体法とは全く違う内容に驚かされた．線形計画問題

(P) 最小化 $c^T x$ 制約 $Ax=b,\ x\geq 0$

(ただし A は $m\times n$ 行列，b は m 次元ベクトル，c は n 次元ベクトル）を多項式時間で解くKarmarkarアルゴリズムの特徴は以下の3点にまとめられる．

1. 問題(P)の許容解集合 $\{x:\ Ax=b, x\geq 0\}$ は線形空間と単体の共通部分として与えられ，特に正領域と交わりをもつ．
2. 目的関数 $c^T x$ の代わりに，正領域で定義されるポテンシャル関数 $(n+1)\ln(c^T x - z^*) - \sum_{j=1}^{n} \ln x_j$ を尺度関数とする（ただし z^* は問題(P)の最適値）．
3. 各反復でポテンシャル関数を一定量減少させるため，「射影変換」によってスケーリングした空間で次の点を探索する．

かなり強い仮定が置かれているが，問題の変形や下界値の代用などで一般性は失われない．Karmarkar法の謎解きに苦心していた矢先，本誌で埼玉大学の刀根薫先生（現政策研究大学院大学）による解説講座記事が掲載された[42]．3変数の問題に限定した大変解りやすい解説を与えて頂いたことにより，各特徴の直感的な理解を得ることができた．

当時夏休みには若いOR研究者によるセミナーSSORが開かれていた．大学院1年の夏，第19回SSORに参加し，何ら目新しいことはないもののKarmarkar法を紹介する発表をさせて頂いた．ここ

よしせ　あきこ
筑波大学　システム情報工学研究科
〒305-8573 つくば市天王台1-1-1

で東京工業大学情報科学科（当時）の小島政和先生にお目にかかり，以後ゼミに参加させて頂くことになる．

3. Karmarkar法から主双対内点法へ

Karmarkar法に関する研究は破竹の勢いで展開されていたが，そのほとんどは「3つの特徴のうち多項式時間性の本質はどれか」という疑問に基づいていた．早々に特徴1ではないことが示されたが，他の2つの特徴を手放した多項式時間のアルゴリズムはなかなか現れなかった．非線形計画法として定着していたSUMT法は対数障壁関数を用いる点でポテンシャル関数と関連があるが，それまでの解析方法では多項式時間性は得られない．またロシアで発表されたアフィン変換法[4]は射影変換を簡便化したスケーリングと考えられるが，このスケーリングを用いたアルゴリズムの多項式時間性も未だに得られていない．

多項式時間性の本質を明らかにする意味において，1986年は飛躍的な年だった．1983年にSmaleの下で学位を取得したRenegarが，「対数障壁関数」と「Newton法」という馴染みのある道具のみを用いて，Karmarkar法を上回る計算複雑度のアルゴリズムを構築した[35]．同時にSonnevendは対数障壁関数の最小点として多面体の「解析的中心」を定義し，数々の興味深い性質を明らかにした[37]（結果の一部は拙稿[44]でも紹介している）．集合 $\{x:\ Ax=b,\ x>0\}$ が非空であるとする．パラメータ $\mu>0$ を導入して以下の対数障壁関数を考える．

$$c^T x-\mu\sum_{j=1}^{n}\log x_j \qquad (1)$$

この関数は上記の集合上で唯一の最小解 $x(\mu)$ をもつ．さらに $\mu\to 0$ とすることで，問題(P)の最適解に収束する「中心パス」$\{x(\mu):\mu>0\}$ が得られる．関数(1)のヘッセ行列による「適切なスケーリング」を用いて「中心パス」を近似する点列を生成することにより，多項式時間で問題(P)の最適解が得られる．

多項式時間性は「中心パス」と「適切なスケーリング」で説明することができる—この事実は内点法の研究を急激に多様化した．主双対内点法もこの研究の流れから誕生したアルゴリズムである．

問題(P)の双対問題は

$$\text{(D)}\quad \text{最大化}\ b^T y\quad \text{制約}\ A^T y+s=c,\ s\geq 0$$

で与えられる．それまでの内点法は，主問題，双対問題どちらか一方の空間に点列を生成させ，他方の問題は上界値あるいは下界値の情報のみを与える．私の修士論文のテーマは，主問題，双対問題双方に同時に点列を生成させ，より多くの情報を利用したアルゴリズムの構築だった．論文を書く上で，私はこの上なく恵まれた環境にあった．小島先生，刀根先生，当時経営工学科の助手だった水野眞治さん，防衛庁から総合理工学研究科に出向していた野間俊人さん，当時の森研究室，森村・小島研究室のメンバーなど，多くの方々との充実したゼミにいつでも参加することができた．1986年の12月頃，主問題と双対問題それぞれの「中心パス」を与える条件式を研究室でながめていた時，水野さんが「この式は簡単になるよ」と言いながら，不要な変数を除去した簡潔な式を見せてくださった．主双対内点法で必ず登場する「緩和された相補性条件式」

$$Ax=b,\ A^T y+s=c,\ x_j s_j=\mu\ (j=1,2,\cdots,n) \qquad (2)$$

だった．簡潔な形は「何かできるのではないか」と思わせるのに十分だった．早速小島先生と，この方程式に関するゼミを行うことになった．開口一番の言葉は「その式，Megiddoがこの間の数理計画特設研究部会（現RAMPシンポジウム）で話してたよ」だった．Megiddoはすでにその前年に[26]を発表していた．ああ，やはりすでに誰かが見つけてしまっているのだ！「解析的中心」の登場で内点法の研究は一層速度を増していた．Kranichによる内点法研究の論文目録[22]をみれば，このころから年間の論文数が100の大台に乗り始めていることがわかる[1]．しかし小島先生の言葉には続きがあった．「その式を使ったアルゴリズムが作れないかな」

問題は「適切なスケーリング」を見つけることにあった．ああでもないと議論するうちに，いわゆる「主双対スケーリングベクトル」（$\sqrt{x_j/s_j}$ を第 j 要素とするベクトル）で問題をスケーリングすると見通しがよさそうだ，という結論を得てその日のゼミを終えた．6節で述べるように，このスケーリングベクトルは20年後の錐計画問題の研究でもアルゴリズムの鍵となっている．

この結果を主双対内点法として論文[15]に示し，1987年3月，統計数理研究所の土谷隆さんが準備された研究集会「線形計画問題の新解法」で発表を行った[2]．

この会では，田辺國士先生による中心化ニュートン法とその基本的性質も発表された[41]．中心化ニュー

[1] この後この論文目録の役割は[13]（2001まで）と[32]（現在まで）に引き継がれている．

トン法は非線形方程式系を解くために提案された解法であるが，線形計画問題に適用すると主双対内点法と一致する．同年6月には，Monteiro と Adler が線形計画問題と凸2次計画問題に対する主双対内点法を提案している[29]．同時期に独立した3つのグループが同じ解法を模索していたことは，主双対内点法が研究の自然な進展の中から誕生したことを意味すると共に，大変競争的な状態であったことも物語っている．小島先生はこの状況を把握し常に先を見ておられたが，私は小島先生の研究スピードに何とか遅れまいとするだけで精一杯だった．実際には相当遅かったので，小島先生はさぞ歯がゆい思いをされていたと思う．

4. 理論から実用ソフトウェアへ

1987年の春から，小島先生と水野さんは多くの海外の会議に参加し主双対内点法を紹介された．内点法研究の中心は米国であったため，ともすればアジア発の研究成果は埋没してしまう恐れがあった．一方，少なくとも私の周囲では国内で学ぶ学生が海外で研究発表を行うことは現在ほど一般的ではなかった．そんな1988年の夏，国際数理計画学会（ISMP）が東京で開催された．最適化を学ぶ学生にとっては千載一遇のチャンスだった．Dantzig 教授をはじめ多くの著名な研究者の話を間近で聞くことができ，さらに幸運に恵まれれば自身の発表を聞いてもらうことができる．今野浩先生が本誌の連載あるいは[21]でお書きのように，準備に携わられた先生方は大変なご苦労をされたと伺っている．しかしそのご尽力のお陰で，学生は言葉に尽くせないほど多くの経験をさせて頂いた．

1989年も私にとって忘れられない1年となった．この年の7月から2ヶ月間，小島先生と Megiddo 博士のご配慮で，野間さんと共に IBM Almaden 研究所に夏季研修生として滞在した．短い滞在であったが，小島先生，Megiddo 博士，野間さんと連日文字通り朝から夜まで研究を共にさせて頂くことができた．この滞在中に，現在 ILOG の Manager であり当時 Princeton 大学の助手だった Lustig 博士の訪問を受けた．挨拶も早々ゼミになり，Lustig 博士が用いている主双対内点法と，そのアルゴリズムが大規模な線形計画問題に有効であること，しかし収束性が理論的に保証できていないとの説明を受けた．Lustig 博士の主双対内点法は，論文[25]と同様，緩和された相補性条件式(2)内のパラメータ μ を最初から小さな値に設定し，ステップ幅を理論値よりはるかに大きな比率に固定する，かなり貪欲なアルゴリズムだった．

Karmarkar 法のように主問題のみを対象とする主内点法と比べ，主双対内点法はどうしても1反復あたりの計算の手間が大きくなる．それまで実装に関する研究を十分行っていなかったこともあり，主双対内点法を提案したものの，その実用性を明確に主張することは難しかった．Lustig 博士の訪問で私たちは大変励まされ，早速そのアルゴリズムの収束性に関する解析に取り組んだ．IBM 研究所の滞在中に得られた結果をまとめた論文[16]の6章では，主双対内点法が大域的収束するための十分条件を導出しているが，これはこの収束性を示すことで訪問に報いたいとの思いから導出した結果である[3]．一方 Lustig らは上記のアルゴリズムをベースとするソフトウェア OB1を開発し，さらに1990年には Mizuno，Todd，Ye[28]と Mehrotra[27]が独立に主双対予測子・修正子法を提案し，特に後者は OB1の2倍を上回る計算速度で解が得られるとの実験結果を示した．これらの結果は多くの商用ソフトウェアに影響を与え，特に OB1はその後 ILOG 社の CPLEX Barrier として受け継がれた．

5. 線形計画問題から半正定値計画問題へ

1990年代に線形計画問題に対する内点法が理論と実用の双方において成熟期を迎えると，対象となる問題をより一般的な問題へと拡張する研究が急速に進展する．

その発端は1989年に Nesterov と Nemirovskii によって始めて導入された自己整合障壁関数の概念である．3節で述べたように，内点法の理論を飛躍的に発展させた「解析的中心」は対数障壁関数の最小解として特徴づけられ，Newton 法で効率よく求められることから多項式時間性が導かれる．Nesterov と Nemirovskii はこの「Newton 法で効率よく求められる」性質に着目し，対数障壁関数を一般化する形で自己整合障壁関数の概念を構築した．この概念により，それまで線形計画問題に対して行われてきた内点法の議論は，

[2] この研究集会は「最適化：モデルとアルゴリズム」に姿を変え，土谷隆さんの長年のご尽力により，今年で20年目（！）を迎えている．

[3] この後 Lustig, Marsten, Shanno の研究チームと共に論文[16]は1992年度の米国 OR 学会（INFORMS）計算部門賞を頂いた．またこの論文を含む一連の研究により，小島，水野，Megiddo，野間，吉瀬は1992年度 INFORMS Lanchester 賞を頂いた．

非負領域を閉凸錐に一般化した問題に拡張可能となり，これらの問題に対する「アルゴリズムの多項式時間性」が議論されるようになった．

ここでの「アルゴリズムの多項式時間性」は，1980年代から内点法の分野で用いられてきたように，「ε-近似解を得るために必要となる反復回数の上限が，$O(f(n)\ln(1/\epsilon))$（ただしfは多項式）であること」を意味する．最適解をもつ線形計画問題に対しては，入力サイズLに対して$\epsilon=2^{-O(L)}$とすれば，ε-近似解から多項式時間の手間で最適基底が得られることがわかっているので，線形計画問題に対しては通常の「アルゴリズムの多項式時間性」と同じ意味をもつ．

1993年に出版された[30]においてNesterovとNemirovskiiは，以下で述べる半正定値計画問題等に主内点法を応用するアイディアは，1980年来著者らが発表した一連の論文にすべて記されていると述べている．ただしロシア語の論文であったり，少し難解であったりといったことから，自己整合関数の意義が広く認識され始めたのは1993年以降であったように思う．

Alizadehは1991年の自身の学位論文[1]で，自己整合関数の理論とは独立に，半正定値計画問題に対する独自の多項式主内点法を提案した．半正定値計画問題（SDP）は，線形計画問題におけるベクトル変数を実対称行列変数に，非負制約を半正定値制約に置き換えた最適化問題である．AlizadehがSDPを取り上げた動機は，組合せ最適化問題に対するSDP緩和[10]を用いて，内点法で近似解を求めることだった．さらに[2]では，SDPに対する主双対内点法も提案されている．なお，より一般的な整数計画問題に対するSDP緩和については，[18]に解説が与えられている．

SDPはこの後少なくとも3つの契機によって，一層主要な最適化問題として定着する．

1つ目の契機は，Boydらが線形行列不等式付き最適化問題[5]をSDPに帰着させ，ロバスト制御など制御分野におけるSDPの有効性を示したことである．1993年には線形行列不等式付き最適化問題に対する主双対内点法も提案している[43]．これらの結果は，数値最適化を用いた新しい制御系設計法としてこの分野で注目を集める．この年私は筑波大学の山本芳嗣先生を介して大阪大学の小原敦美さんから上記の論文を頂き，初めてSDPの存在を知った．

2つ目の契機は，GoemansとWilliamsonが1994年に発表した，最大カット問題に対するSDPを用いた近似解法である[9]．すでに組合せ最適化に対するSDP緩和手法は知られていたが，GoemansとWilliamsonはNP-困難である最大カット問題に対して，SDPの緩和解を用いて確率的アルゴリズムを行うと，0.878の近似比率が得られることを示した．SDPに対する内点法は上述の意味において「多項式時間性」を有するので，Goemansらの結果は安定した計算時間で精度のよい近似解が得られることを意味している．以後組合せ最適化，連続最適化双方の分野で，このアルゴリズムの精度の改良が行われている．なお[24]に大変わかりやすい解説が与えられている．

3つ目の，おそらく最も重要な契機は，数多くの実用的なソフトウェアが開発されたことである．例えば，東京工業大学の藤澤克樹さん（現東京電機大学）らによるSDPA[38, 8]（1995年より），Todd，Toh，TütüncüによるSDPT3[39]（1996年より），2003年に夭逝したSturmによるSeDuMi[40]（1998年より）等々，それぞれ特徴を持ちながら，10年前には考えられないほど高速化したソフトウェアが無償で提供されている．

2000年に入ってからは，SDPの新しい応用例として，多変数からなる多項式関数の最小値を求める問題も盛んに研究されている[23, 33, 34]．言うまでもなく幅広い分野で応用例をもつ問題であるが，SDP緩和の妥当性がHilbertの第17問題（Artinの定理）によって裏付けられるなど，数学的な側面からも注目されている．多項式最適化問題については[20]も参照されたい．

6. 半正定値計画問題から錐計画問題へ

Aをn次元空間からm次元空間への線形写像，b，cをそれぞれm次元ベクトル，n次元ベクトル，$\langle , \rangle$を$\mathcal{R}^n$（あるいは$\mathcal{R}^m$）上の適当な内積，A^*をこの内積に関する随伴行列とする．$K \subseteq \mathcal{R}^n$を閉凸錐，$K^*$をその双対錐$K^* := \{s : \forall x \in K, \langle x, s \rangle \geq 0\}$とするとき，錐計画問題（PC）とその双対問題（DC）は以下のように与えられる．

(PC) 最小化 $\langle c, x \rangle$ 制約 $Ax=b, x \in K$,

(DC) 最大化 $\langle b, y \rangle$ 制約 $A^*y+s=c, s \in K^*$.

Kを非負領域あるいは半正定値実対称行列全体からなる錐とすれば，適当な内積に対して$K=K^*$であり，(PC)はそれぞれ線形計画問題，半正定値計画問題となる．双対錐の定義よりただちに(PC)と(DC)の間に弱双対定理が成り立つことがわかる．線形計画問

題との共通点も多いが，錐計画問題として改めて議論すべき点も多々ある．

よく知られるように，線形計画問題に対しては強双対定理がなりたつ．多面体である非負領域Kに線形変換を行った像$A(K)$が閉凸集合となり，よって分離超平面定理によりFarkasの補題が得られるためである．一方，Kが半正定値対称行列全体の集合であるとき$A(K)$は必ずしも閉とはならず，このため問題（PC）の（下限値としての）最適値が存在しても最適解は存在しないなど，一般に強双対定理はなりたたない．強双対定理がなりたつ十分条件として，問題（PC）と（DC）が共に内点をもつ（すなわち

$$Ax=b,\ x\in \mathrm{int}\, K,\ A^*y+s=c,\ s\in \mathrm{int}\, K^*$$

をみたす(x, y, s)が存在する）ことが知られている．なお問題（PC）自体は凸解析で70年代から扱われている問題であり，双対性に関して多くの結果が得られている[36]．

NesterovとToddは，自己整合障壁関数の理論を錐計画問題における錐の性質として記述し直し，自己尺度化錐（self-scaled cone）の特徴づけを行った[31]．自己尺度化錐を簡単に述べるならば，その内部を障壁関数の定義域としたとき，主問題（PC）と双対問題（DC）それぞれに対する障壁関数が対称で同様に好ましい性質をもつ錐である．非負領域，半正定値実対称行列全体からなる錐はともに自己尺度化錐である．

錐計画問題が線形計画問題と大きく異なるもう1つの性質は，(2)に対するNewton方程式が解をもつとは限らず，そのままでは必ずしも主双対内点法が適用できない点である．しかし錐Kが自己尺度化錐であるならば，「任意の$x, s\in$ int に対して唯一の$w\in$ int Kが存在して$H(w)x=s$をみたす」自己同型群Hが存在し，このwで問題をスケーリングすることによってNewton方程式の解の存在が保証され，主双対内点法を適用することができる．線形計画問題の場合，$w_j=\sqrt{x_j/s_j}(j=1, 2, \cdots, n)$となり「主双対スケーリングベクトル」に一致する．主双対内点法を錐計画問題に拡張することにより，「適切なスケーリング」の存在がさらに重要な要素となった．

「自己尺度化錐」はNesterovとToddによって見いだされた錐であったが，2001年にHauserとGülerにより，実は1990年代から研究されてきたEuclid的Jordan代数における「対称錐」と一致することが示された[6, 12]．このことにより「自己尺度化錐」は，特に要素を実数に限定するのであれば，$n\times n$半正定値実対称行列全体からなる錐とn次元の2次錐$\{x\in \mathcal{R}^n : \sqrt{x_1^2+\cdots x_{n-1}^2}\leq x_n^2\}$，そしてその直積のみであることが明らかになった（$n$次元非負領域は，1×1半正定値実対称行列全体からなる錐のn個の直積で与えられる）．2次錐は線形計画問題に対するロバスト最適化[3]等多くの応用例をもつ錐であり，この錐が半正定値対称行列錐と同じ枠組みで議論できるのであれば無用な議論を避けることができる．しかし正直なところ，自己尺度化錐の例は案外少ないという印象も否めない．こうしたことからGülerらは，さらに一般的な錐への拡張も試みている[11]．

7. おわりに

20年目を迎えた主双対内点法の変遷のごく一部を紹介させて頂いた．より詳しくは，応用例豊かな[3]や和書[19]を参照されたい．主双対線形計画問題は，凸計画問題の最適性の条件を記述する相補性問題と深い関連をもつ．今回触れる事ができなかったが，上述の結果の多くは相補性問題に拡張されている．半正定値行列に対する相補性問題[17]，対称錐上の相補性問題[7]等も研究されており，現在筆者は後者の問題の理論的性質とその応用を課題としている[45]．

最後にこの原稿の執筆を勧めてくださった成蹊大学池上敦子さんに深く感謝したい．参考文献を見直してみて改めて，多くの素晴しい学位論文が内点法の研究を牽引したことに気づかされた．微力ながら学生を指導させて頂く者として心に留めておきたいと思う．

参考文献

[1] Alizadeh, F., “Combinatorial optimization with interior point methods and semi-definite matrices,” Ph. D. thesis, University of Minnesota (1991).

[2] Alizadeh, F., “Optimization over the positive-definite cone: interior point methods and combinatorial applications,” in P. Pardalos, ed., *Advances in Optimization and Parallel Computing*, North-Holland (1992).

[3] Ben-Tal, A. and A. Nemirovskii, *Lectures on Modern Convex Optimization, Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, SIAM Publications (2001).

[4] Dikin, I. I., “Iterative solution of problems of linear and quadratic programming,” *Soviet Mathematics Doklady* 8 (1967), 674-675.

[5] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics 15 (1994).

[6] Faraut, J. and A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford University Press (1994).

[7] Faibusovich, L., "Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms," *Positivity* 1 (1997), 331-357.

[8] 藤澤克樹:「SDPA (半正定値計画問題に対するソフトウェア)」, オペレーションズ・リサーチ 45 (2000), 125-131.

[9] Goemans, M. X., and D. P. Williamson, "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming," *Journal of Association for Computing Machinery* 42 (1995), 1115-1145.

[10] Grötschel, M., L. Lovâsz and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer Verlag (1988).

[11] Güler, O., "Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming," *Mathematics of Operations Research* 22 (1997), 350-377.

[12] Hauser, R. A. and O. Güler, "Self-scaled barrier functions on symmetric cones and their classification," *Fadations of Computational Mathematics* 2 (2002), 121-143.

[13] Interior point online, http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/InteriorPoint/

[14] Karmarkar, N., "A new polynomial-time algorithm for linear programming," *Proceedings of 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (1984).

[15] Kojima, M., S. Mizuno and A. Yoshise, "A primal-dual interior-point algorithm for linear programming," in N. Megiddo, ed., *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods*, 29-47, Springer-Verlag (1989).

[16] Kojima, M., N. Megiddo, T. Noma and A. Yoshise, "A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems," *Lecture Notes in Computer Science* 538, Springer-Verlag (1991).

[17] Kojima, M., S. Shindoh and S. Hara, "Interior-point methods for the monotone linear complementarity problem in symmetric matrices," *SIAM Journal on Optimization* 7 (1997) 86-125.

[18] 小島政和:「半正定値計画の組み合わせ最適化への応用に向けて」, オペレーションズ・リサーチ 42 (1997), 216-221.

[19] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博:「内点法」, 朝倉書店 (2001).

[20] 小島政和, 脇隼人:「多項式最適化問題に対する半正定値計画緩和」, システム/制御/情報 48 (2004), 477-482.

[21] 今野浩:『役に立つ一次式—整数計画法「気まぐれな王女」の 50 年』, 日本評論社 (2005).

[22] Kranich, E., "Bibliography on interior point methods for mathematical programming," http://www.netlib.org/bib/ipmbib.bib

[23] Lasserre, J. B., "Global optimization with polynomials and the problem of moments," *SIAM Journal on Optimization* 11 (2001), 796-817.

[24] 松井知己:「半正定値計画を用いた最大カット問題の 0.878 近似解法」, オペレーションズ・リサーチ 33 (2000), 140-145.

[25] Marsten, R., R. Subramanian, M. Saltzman, I. Lustig and D. Shanno, "Interior point methods for linear programming: Just call Newton, Lagrange, and Fiacco and McCormick!," *Interfaces* 20 (1990), 105-116.

[26] Megiddo, N., "Pathways to the optimal set in linear programming," in N. Megiddo, ed., *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods*, 131-158, Springer-Verlag (1989).

[27] Mehrotra, S., "On the implementation of a primal-dual interior point method," *SIAM Journal on Optimization* 2 (1992), 575-601.

[28] Mizuno, S., M. J. Todd and Y. Ye, "On adaptive-step primal-dual interior-point algorithms for linear programming", *Mathematics of Operations Research* 18 (1993), 964-981.

[29] Monteiro, R. D. C. and I. Adler, "Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear programming, Part II: Convex quadratic programming," *Mathematical Programming* 44 (1989), 27-41, 43-66.

[30] Nesterov, Y. E. and A. S. Nemirovski, *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM Publications (1993).

[31] Nesterov, Y. E. and M. J. Todd, "Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming," *Mathematics of Operations Research* 22 (1997), 1-42.

[32] Optimization online, http://www.optimization-online.org/

[33] Parrilo, P. A., "Structured semidefinite programs

and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization," PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 2000.

[34] Parrilo, P. A., "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems," *Mathematical Programming* 96 (2003), 293-320.

[35] Renegar, J., "A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming," *Mathematical Programming* 40 (1988), 59-93.

[36] Rockafellar, R. T., *Conjugate Duality and Optimzation*, SIAM (1974).

[37] Sonnevend, G., "An 'analytical center' for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming," in: *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 84 (1985), 866-876.

[38] SDPA Online, http://grid.r.dendai.ac.jp/sdpa/

[39] SDPT 3, http://www.math.nus.edu. sg/~mattohkc/sdpt 3.html

[40] SeDuMi Home, http://sedumi.mcmaster.ca/

[41] Tanabe, K., "Centered Newton method for mathematical programming," in: M. Iri and K. Yajima, eds., *System Modeling and Optimization*, Springer-Verlag (1988), 197-206.

[42] 刀根薫:「Karmarkarの新LP解法(1)-(2)」, オペレーションズ・リサーチ 30 (1985), 215-220, 271-277.

[43] Vandenberghe, L. and S. Boyd, "A primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities," *Mathematical Programming* 69 (1995), 205-236.

[44] 吉瀬章子:「相補性問題, 2次計画問題への内点法の応用—解析的中心とそのまわりの楕円体」, オペレーションズ・リサーチ 34 (1989), 129-134.

[45] A. Yoshise, "Interior point trajectories and a homogeneous model for nonlinear complementarity problems over symmetric cones," to appear in *SIAM Journal on Optimization*.