

冒険と OR

松井 泰子

キーワード：整数計画問題，グレブナー基底，テスト集合

1. はじめに

元来向こう見ずで鈍い性分ゆえ，自分の能力を考えずに新しい事に挑戦することがある。チャレンジの結果，思いがけず良い成果をもたらされ，新しい分野を切り拓くヒントが得られることがあるからだ。それゆえ，失敗しても懲りずにまた挑戦を繰り返してしまう。「失敗は成功の母」などと開き直るから始末が悪い。

私は近年，二つの事に挑戦した。「数学者の勉強会に入れて頂いた」事と，「海外滞在中の出産」という経験である。前者は現在進行中で先行きは見えない。後者は，初めての長期滞在中のハプニングであったが，周囲の協力で無事に乗り切ることが出来た。どちらも無謀な挑戦であるが，自分の行き当たりばったりの経験がいずれどなたかのお役に立つかもしれないと考え，批判を承知でこの場で書かせて頂こうと思う。

本稿では，「整数計画問題とグレブナー基底」という研究の話題と「カナダ滞在中の医療面」という生活の話題に絞り，御紹介したい。

2. 整数計画問題とグレブナー基底

最適化問題は，社会における応用と数学による理論的裏付けが混在した魅力ある問題であり，多くの実用的なソフトウェアが提供されている。最適化問題の一つである整数計画問題に対するソフトウェアには，現在，分枝限定法が実装されているのは周知の事実である。分枝限定法は列挙を基本とした，現時点で最強な手法である。その一方で，純粋数学からアプローチされた解法が近年提案され，その実用性が注目されるようになってきた。それは「グレブナー基底」という代数の概念を道具とした解法である。数年前，偶然にも

計算幾何学の講演でグレブナー基底を知った私は，ワクワクする何かを導く糸口を見つけたという予感から，グレブナー基底を勉強したいという強い衝動に駆られた。

グレブナー基底とは，大雑把に言うと多項式の集合である。1964年に広中平祐，1965年に B. Buchberger によって独立に発見され，広中標準基底ともよばれる。B. Buchberger は指導教授の W. Gröbner の名前をとって「グレブナー基底」と名付けている。グレブナー基底は代数幾何と可換代数の発展に関与し，近年，コンピュータの性能の飛躍的進歩に伴って，計算代数のアルゴリズムの道具としても大きな役割を果たしている。

一見，整数計画問題とは無関係に思えるグレブナー基底を用いて，1991年に，P. Conti と C. Traverso は整数計画問題に対する解法を発表し，整数計画の研究者に大きな衝撃を与えた。その後，B. Sturmfels や R. R. Thomas らにより展開された研究成果は広く発展しながら現在に至っている。整数計画問題の制約式が方程式系であることから，代数の視点から解くというのはごく自然な流れである。

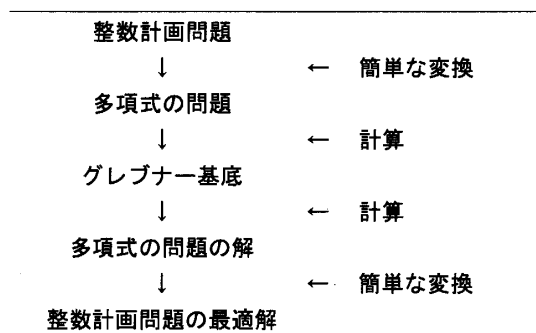
本節では，以降，グレブナー基底を用いて整数計画法を解くアルゴリズムの概要を直感的に御紹介しようと思う。なお，数学的記述を避けて表現しようと思うので，正確さに欠けることをご承知おき頂きたい。

グレブナー基底を用いた整数計画問題の求解の手順は，大雑把に次のような流れである。まず整数計画問題を多項式の問題に変換し，関連したグレブナー基底を計算して多項式の問題の解を求め，得られた解を変換して整数計画問題の解を求めるのである。

多項式環とそのイデアルについて具体的な計算アルゴリズムを持つグレブナー基底は，強力で便利な道具であるが，代数の諸知識をバックグラウンドとするため，その理解に時間を要するという短所がある。しか

まつい やすこ
東海大学 理学部情報数理学科
〒259-1292 平塚市北金目 1117

表1 グレブナー基底を用いた整数計画問題の求解の流れ



しながら、Conti と Traverso のアルゴリズムは、線形計画問題に対する単体法や内点法のような、美しい幾何的な振る舞いを見せてくれるという素晴らしい長所を持っている。

本稿では紙面の都合、詳細を正確に記述することが出来ないため、図による解釈の紹介に留めておこうと思う。さらに深く追求したい読者は参考文献を参照されたい。

単体法と内点法の挙動については、ここで述べるまでも無く、OR ワーカーは周知の通りであるが、簡単に触れておこう。単体法は、実行可能領域の任意の端点から出発し、実行可能領域の境界を通りながら最小解の端点に向かって隣接する端点をたどっていく解法である。内点法は、実行可能領域中の任意の内点から、最小解の端点に向かって実行可能領域の内点をたどっていく解法である。

一方、Conti と Traverso のアルゴリズムは、実行可能領域中の任意の整数点を初期点として、テスト集合と呼ばれる、グレブナー基底をもとに生成されるベクトル集合を用いることによって、整数点を經由しながら最適解にたどり着けるのである（最適解が一意でない場合は、そのうちの一つを見つける）。

さらに、文献[7]には、最適解から逆探索法を適用することによってテスト集合を利用した整数多面体中の整数点全列挙が紹介されていて興味深い。

偶然から始まった、私のグレブナー基底への関わりであるが、独学を進めるうちに、グレブナー基底の応用に関心を寄せておられる数学者の研究グループから、面識が無いにも関わらずお声を掛けて頂き、定期的に関われる研究集會に混ぜて頂いて今日に至る。2006年の8月末には、京都のRIMSで開催される「グレブナー基底 夏の学校」の講師の一人として講義をする予定である。数学者の懐の広さに感謝すると共に、グレブナー基底が取り持つ有難い御縁を大切にしたい

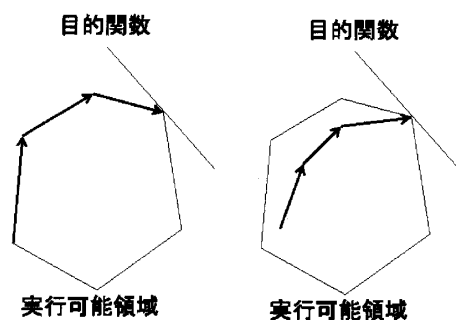


図1 単体法と内点法の挙動

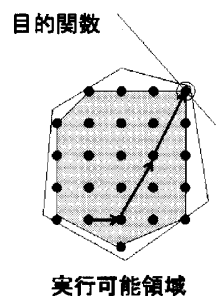


図2 Conti と Traverso の解法の挙動。灰色部分は整数多面体である

と思っている。

もともと数学の素養も無い自分が、グレブナー基底を知りたい一心で突き進んだのは無謀に他ならない。ハイキングの軽装で冬山登山に臨むようなものと自覚したのはつい最近である。グレブナー基底が作り出すアルゴリズムの美しい振る舞いに魅せられて、幻想を抱いているのかもしれない。

近年、グレブナー基底は、入門書やソフトウェアが充実してOR ワーカーの身近な存在になりつつあるように思う。今後、グレブナー基底に関心を持たれる方が益々増える事を願っている。

3. 長期海外滞在

2003年、夫婦でカナダ・モントリオール市のマギール大に滞在する機会を得た。派遣先は、カナダ東部、ケベック州の州都モントリオール市にあるマギール大学で、受け入れ先はコンピュータサイエンス学科のDavid Avis先生である。夫の知己は文科省の在外制度で、私は職場の海外派遣制度を利用して¹、各々10ヶ月と半年間、一緒に海外に出られることになった²。夫婦とも院生時代からお世話になっていたこともあり、Avis先生は夫婦での訪問というハプニングを喜んで

¹ 私の所属する学部は、学科ごとに毎年順番で海外派遣制度を利用出来るが、2003年度は偶然にも私の所属する学科だった。

(?) 下さった。しかし、この渡航に人生の運の大半を使ったと思われる。

ケベック州の州都であるモントリオール市は、人口170万人で、カナダではトロントに次いで第2の都市である。『北米のパリ』と言われる情緒溢れるモントリオールの公用語は、英語と仏語である。住人の多くはバイリンガルで、英語と仏語を自由に使い分けているようだった。

モントリオールには大勢の日本人が住んでいた。ワーキングホリデーの人、移民の人、留学している人、研究者として滞在している人等、滞在理由は様々だ。モントリオールの治安は良く、比較的安全な街であるという印象を受けた。

3.1 アカデミー会

マギール大は医学部が特に有名で、多くの日本人研究者が医学部に滞在していた。医学部の研究者は2年間滞在する方が多く、また在モントリオール日本人研究者の8割位が医師であったため、医学部に滞在する研究者の家族を中心としたコミュニティ「アカデミー会」の活動があった。会自体は、年に2回の食事会を行うだけだが、アカデミー会の名簿と、アカデミー会の発行しているガイドブックが充実していて助かったのを覚えている。アカデミー会の名簿には、専門分野の記載があった。モントリオール市内には、日本語の話せる医師がいないため、病気の不安があると、名簿を頼りに医師に電話で問い合わせる方もあったようだ(なかには、簡単に診察して下さる方もいらしたようだ)。ガイドブックには、引越し・医療・日本食の買える店・子供の学校の手続き等の日常的な情報が詳細に書かれていた。このガイドブックは、宮本という日本食材店で安価で購入できた。

3.2 医療保険とホームドクター

海外滞在中で一番気になるのは、医療費の事ではないだろうか。言葉が十分に通じない上に、多額な診療費を請求されるかもしれないので、準備を入念に行う必要がある。

国立大学に職を持つ人は、海外での医療費も日本にいたのと同様、文科省で負担されるので、帰国後、所定の書類を提出すれば、立替分の医療費が返還されるようだ。しかし、滞在中に全ての医療費を一時立て替

えることは、病気によっては大金³を要することを考えると、事前に海外医療保険に加入しておくのが安心だ。ただし海外医療保険では、歯科と産科はカバーされないことを心に留めておいた方が良さそう。

カナダでは、風邪程度の病気はホームドクターの診察を受ける。「ホームドクター探しは大変だった」と在外経験者は口を揃える。医師不足が原因らしい。クリニックを訪れても、「うちはもう患者が一杯だから、新規の患者は取らない」等の理由で断られる事が多いが、そこを簡単に引き下がらずに、執拗に交渉を続けてようやく受け付けてもらえる。

カナダ人は生まれた時からメディケアカード(医療カード)を持っている。メディケアカードがあると、歯科・薬を除いた医療費がほぼ無料となるため病院はいつも混んでいたが、医療費を払わなくて良いというのは、高い税金の見返り⁴として、とても魅力的な制度だと思う。カナダの社会福祉制度は、「北米のスウェーデン」と揶揄される程、行き届いていると聞く。メディケアカードは、在外で滞在中の研究者は、申請すれば取得することができるという事実は案外知られていないようだ⁵。この事実を私達は渡航してしばらく経って知った。州によって多少制度に違いはあるが、少なくとも2003年の時点では、ケベック州とオンタリオ州では取得できた。ケベック州では申請してから3ヶ月後にメディケアカードが発行される。申請中に診察が必要な場合は、申請中だと伝え、後で払い戻しの手続きができる場合があるようだ。また妊婦と結核患者は、申請中でもただちに利用可能となると聞いている。しかし、念のために渡航前に、各自任意で3ヶ月間の保険に加入しておいた方が良さそう。

後日入手したアカデミー会のガイドブックに、「メディケアカードは入国してすぐに申請に行きなさい」と書かれているのを見つけ、自分の横着を大いに反省した。

肝心の出産は、経験談(京都大の山下信雄氏と電通大の村松正和氏)を参考にしながら、カナダの医療レ

³ 万が一病院に入院した場合は、カナダでは1泊20万円(!)もかかる。もし盲腸で入院したら、100万円以上の大金を一時立て替えなければならない。

⁴ カナダの連邦消費税(GST)は7%で、ケベック州では別に州税が7.5%である。

⁵ 今回の滞在中で私達が取得した査証は就労査証だった。滞在先の大学に雇って頂く訳では無いが、客員研究員は就労査証で入国することになっているのだ(詳細はカナダ大使館のWebページを参照)。就労査証を持っていると、申請すればメディケアカードを取得できる。

² 職場の先生が、他大学にお勤めの奥様と一緒に海外に行かれたとの話(奥様が先に行かれ、半年後にお子さんを連れて合流された)を伺っていた事もあり、可能ならばトライしてみたいと考えていた。

ベルの高さを一番の理由に、モントリオールでの出産に踏み切った。出産までは近所のクリニックに通い、担当医師が非常勤で勤務する総合病院で出産するというのが一般的なようであった。出産直後、娘にトラブルがあったが、マギール大の高度な医療技術の御蔭で事なきを得た。今は元気に保育園に通っている。産後2泊で退院させられたのには閉口したが、医療費が無料であったことを考えると何か言える立場では無かった。

4. おわりに

冒険にはリスクは付き物である。しかし、ORで最適化しながら、重症な痛手を負わない程度にリスクを押さえ、新たな発見を期待しながら冒険を続けていきたい。

参考文献

- [1] W. Adams and P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics, 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [2] P. Conti and C. Traverso, Buchberger algorithm and integer programming, in *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-correcting codes (AAECC-9)*

(H. Mattson, T. Mora and T. Rao, eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, New York, 539 (1991), pp. 130-139.

- [3] 日比孝之, 「グレブナー基底」, 野海正俊・日比孝之編, *すうがくの風景* 8, 朝倉書店, 2003.
- [4] S. Hosten and R. R. Thomas, *Gröbner bases and integer programming*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 251 (1998), pp. 144-158.
- [5] 日比孝之編, 松井泰子他, 「グレブナー基底の現在 (いま)」, 数学書房, 2006 (近刊).
- [6] 大杉英史, 北村知徳, 日比孝之共訳, 「グレブナー基底 1, 2」, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000 (原著: D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998).
- [7] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Notes Series, 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [8] R. R. Thomas, A geometric Buchberger algorithm for integer programming, *Mathematics of Operations Research*, 20 (1995), pp. 864-884.
- [9] R. R. Thomas, Gröbner bases in integer programming, *Handbook of Combinatorial Optimization*, Vol. 1 D.-Z. Du and P. M. Pardalos (Eds.) Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 533-572.