最適化と非線形方程式

陳　小君

キーワード：最適化，数値解析，非線形方程式

私は主に $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ を未知数とする連立非線形方程式

$$F(x)=\begin{pmatrix} F_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}=O \tag{1}$$

を研究している．連立非線形方程式は理工学や経済学における様々な問題から生じる．特に連立非線形方程式は多くの最適化問題を統一的に取り扱うことができる．また，連立非線形方程式に対するNewton型反復法を用いて，大域収束性と局所2次あるいは超1次収束性をもつ最適化アルゴリズムを開発することができる．さらに，連立非線形方程式に基づいて，数値解の誤差を評価することができる．

最適化問題からの非線形方程式は微分不可能な項をもつ場合が多い．近年，その方程式に対する平滑化法(smoothing method)と半平滑法(semismooth method)が注目されている．以下に私が近年研究してきた最適化問題から生じる連立非線形方程式について述べる．

1．微分不可能制約なし最適化問題

実数値関数 f の値 $f(x)$ が R^n において最小となるベクトル x^* を見つける問題は制約なし最適化問題と呼ばれ，

$$\min_{x\in R^n} f(x) \tag{2}$$

と書く．目的関数 f は微分可能ならば，x^* が(2)の局所的最適解であるための必要条件は x^* が非線形方程式

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T=0 \tag{3}$$

の解であることである．さらに f が凸関数ならば，x^* が(2)の大域的最適解であるための必要十分条件は x^* が(3)の解であることである．

目的関数 f は微分不可能な凸関数とする．(2)を次の微分可能な制約なし凸最適化問題

$$\min_{x\in R^n} f_\mu(x) \tag{4}$$

に書き直すことができる．ただし

$$f_\mu(x)=\min\{f(y)+\frac{1}{2}\mu\|y-x\|^2|y\in R^n\}. \tag{5}$$

ここで，μ は正定数，$\|\cdot\|$ はEuclideanノルムである．関数 f_μ は微分可能な凸関数であり，f のMoreau-Yosida正則化と呼ばれる．特に関数 f の凸性により，(2)と(4)の解集合は一致する．$p(x)$ を(5)における最適化問題の唯一最小点とすれば，f_μ の微分は

$$\nabla f_\mu(x)=\mu(x-p(x))\in\partial f(p(x))$$

となる．ただし，∂f は f の劣微分(subdifferential)である．したがって，微分不可能制約なし凸最適化問題(2)と非線形方程式

$$\nabla f_\mu(x)=0 \tag{6}$$

とは等価である．さらに関数 $\nabla f_\mu(x)$ はつぎの大域的なLipschitz条件を満たす．

$$\|\nabla f_\mu(x)-\nabla f_\mu(y)\|\leq\mu\|x-y\|,\ x,y\in R^n$$

私は京都大学福島教授と香港理工大学Qi教授とともに，非線形方程式(6)を用いて，微分不可能な制約なし凸最適化問題に対して，超1次収束性をもつNewton型法とQuasi-Newton法を提案した[11, 19]．

2．制約条件付き最適化問題

ベクトル値関数

$$G(x)=(G_1(x),\cdots,G_k(x))^T,$$
$$H(x)=(H_1(x),\cdots,H_l(x))^T$$

によって定められた制約条件 $G(x)\geq 0$，$H(x)=0$ を満たす x のなかで，目的関数 f の値 $f(x)$ を最小とするベクトル x^* を見つける問題を制約付き最適化問題

ちん　しょうくん
弘前大学 理工学部
〒036-8560 弘前市文京町1

と呼び，

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } G(x)\geq 0,\ H(x)=0 \tag{7}$$

と書く．ただし，関数 f，G，H は微分可能とする．x^* が(7)の局所的最適解であり，x^* における有効制約の勾配ベクトルが1次独立ならば，(x^*, λ^*, μ^*) が非線形方程式

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x)-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla G_i(x)+\sum_{i=1}^{l}\mu_i\nabla H_i(x) \\ \min(\lambda, G(x)) \\ H(x) \end{pmatrix}=0 \tag{8}$$

の解となるラグランジュ乗数 $\lambda^*\in R^k$，$\mu^*\in R^l$ が存在する．(8)は制約つき最適化問題(7)に対する最適性の1次の必要条件であり，Karush-Kuhn-Tucker 条件と呼ばれている．さらに関数 f，$G_i(i=1,2,\cdots,k)$ が凸関数，H が線形関数ならば，x^* が(7)の大域的最適解であるための必要十分条件は，(x^*, λ^*, μ^*) が非線形方程式(8)の解となる $\lambda^*\in R^k$，$\mu^*\in R^l$ が存在することである．私は非線形凸制約付き最適化問題に対して，はじめて f の2回微分可能性を仮定することなく，BFGS 法の大域収束性を証明した[20]．さらに，分離可能な非線形制約付き最適化問題に対して，f の2回微分可能性を仮定することなく，Inexact Uzawa 法を提案し，その大域収束性と局所的超1次収束性を証明した[15]．

3．相補性問題

ベクトル値関数 $P: R^n\to R^n$ に対して，次の条件を満たすベクトル x を求める問題を相補性問題あるいは非線形相補性問題という．

$$x\geq 0,\ P(x)\geq 0,\ x^TP(x)=0 \tag{9}$$

特に，関数 P が n 次行列 M と n 次元ベクトル q を用いて $P(x)=Mx+q$ と表されるとき，(9)を線形相補性問題という．相補性問題に対して，NCP 関数による非線形方程式再定式化が近年に活発に研究されている．関数 $\phi: R^2\to R$ が次の条件を満たすとき，ϕ は相補性問題の NCP 関数と呼ばれる．

$$\phi(a, b)=0, \Longleftrightarrow a\geq 0, b\geq, ab=0$$

NCP 関数 ϕ を用いて，関数 $\Phi: R^n\to R^n$ を

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \phi(x_1, P_1(x)) \\ \vdots \\ \phi(x_n, P_n(x)) \end{pmatrix}$$

と定義する．相補性問題(9)は非線形方程式

$$\Phi(x)=0 \tag{10}$$

と等価である．すなわち，x^* が相補性問題(9)の解であるための必要十分条件は x^* が非線形方程式(10)の解であることである．多くの NCP 関数が定義されている．よく利用される NCP 関数は以下の "min" 関数と Fischer-Burmeister 関数である．

$$\phi(a, b)=\min(a, b),\ \tilde{\phi}(a, b)=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$$

私は Stanford 大学 Ye 教授，Washington 州立大学 Chen 教授，Wurzburg 大学 Kanzow 教授などとともに，相補性問題を滑らかでない方程式に再定式化し，その方程式に対する平滑化近似関数についての幾つかの重要な性質を見出すとともに，大域収束性を持つ効率的な平滑化アルゴリズムを開発した．また Central Florida 大学 Nashed 教授，香港理工大学 Qi 教授などとともに，Banach 空間における微分不可能な関数の Slant 微分の概念を導入し，それを用いて，Newton 型解法の局所超1次収束性を証明した．それらの研究成果は国際誌[7，8，9，14，17]に発表した．また，Karlsruhe 大学 Alefeld 教授と Maryland 大学 Potra 教授とともに，相補性問題を微分不可能な方程式に再定式化し，それを用いて，与えられた問題が解をもつか否かを検証する方法を提案した[6，13，18]．最近，日本学術振興会の長期研究員として弘前大学に滞在していた中南大学向教授とともに，線形相補性問題に対して簡単に計算できる誤差限界を与えた．これはよく知られた Mathias-Pang の誤差限界を大きく改良した[1]．

4．変分不等式問題

ベクトル値関数 $P: D\subseteq R^n\to R^n$ と閉凸集合 $S\subseteq D$ に対して，次の不等式を満たすベクトル $x^*\in S$ を求める問題を変分不等式問題という．

$$(x-x^*)^TP(x)\geq 0,\ x\in S \tag{11}$$

関数 P がある微分可能関数 $f: D\subseteq R^n\to R$ の勾配関数 ∇f として与えられるとき，問題(11)は以下の最小化問題の停留点を求める問題となる．

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t } x\in S \tag{12}$$

さらに，f が凸関数のときには，最小化問題(12)と変分不等式問題(11)は等価である．特に，$S=R^n$ のとき，変分不等式問題(11)は非線形方程式

$$P(x)=0$$

に帰着する．また，$S=R^n_+:=\{x\in R^n|x\geq 0\}$ のとき，変分不等式問題(11)は相補問題(9)に帰着する．変分不等式問題(11)と次の非線形方程式は等価である．

$$\Phi(x)=x-\Pi_S(x-P(x))=0 \tag{13}$$

ただし，Π_Sは集合Sへの射影を表す．特に，$l\leq u$を満たすベクトルl，$u\in R^n$により定義される集合

$$S=\{x|l\leq x\leq u\}$$

に対して，(13)は非線形方程式

$$\Phi(x)=x-\mathrm{mid}(l, x-P(x), u)=0 \tag{14}$$

となる．ただし，"mid" 関数の各成分は次のように定義される．

$$(\mathrm{mid}(l, x-P(x), u))_i = \begin{cases} l_i & (x-P(x))_i\leq l_i \\ (x-P(x))_i & l_i\leq(x-P(x))_i\leq u_i \\ u_i & (x-P(x))_i\geq u_i \end{cases}$$

私は香港理工大学Qi教授，Stanford大学Ye教授，Singapore国立大学Sun博士などとともに，変分不等式問題から生じる滑らかでない方程式の性質を考察し，変分不等式問題に対する大域収束性と局所超1次収束性を持つ効率的な平滑化アルゴリズムを開発した[12, 16]．

5. 最適制御問題

空でない有界開凸集合$\Omega\subset R^2$，関数z_d，$u_d\in L^2(\Omega)$，$\phi\in C(\Omega\times R^2)$，および実数$\alpha>0$に対して，次の最適化問題の解$y$，$u\in L^2(\Omega)$を求める問題を最適制御問題（optimal control problem）という．

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\int_\Omega(y-z_d)^2d_\omega+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega(u-u_d)^2d_\omega \\ &\text{s.t } -\Delta y+\phi(x, y, u)=0 \text{ in } \Omega, \\ &\qquad y=0 \text{ on } \Gamma \\ &\qquad u\in\mathcal{U} \end{aligned} \tag{15}$$

ただし，$q\in L^\infty(\Omega)$，ΓはΩの境界であり，集合$\mathcal{U}$はつぎのように定義される．

$$\mathcal{U}=\{u\in L^2(\Omega)|u(x)\leq q(x)\text{a.e. in }\Omega\}.$$

有限要素法あるいは有限差分法の離散近似により，(15)から次の有限次元空間における制約条件付き最適化問題を導く．

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}y^THy+\frac{\alpha}{2}u^TMu+a^Ty+c^Tu \\ &\text{s.t. } Ay+g(y, u)=0 \\ &\qquad u\leq b. \end{aligned} \tag{16}$$

ここで，行列$H\in R^{n\times n}$，$M\in R^{m\times m}$，$A\in R^{n\times n}$は対称正定値行列である．関数ϕがy，uに関して，微分可能ならば，関数gはy，uにつき微分可能である．この場合には，問題(16)は(7)の特別な場合として考えられる．しかし，ϕが微分不可能であるような場合が実際問題にしばしば現れる．例えば，次の関数ϕは障碍物のある最適制御問題に見出される．

$$\phi(x, y, u)=\beta\max(0, y)-u.$$

ただし，βは与えられた正定数である．この関数ϕに対応する有限差分近似による得られる関数gは次式で定義される．

$$g(y, u)=D\max(0, y)-Nu$$

ただし，$D\in R^{n\times n}$は対角行列，$N\in R^{n\times m}$である．この関数gをもつ最適化問題(16)に対して，次の非線形方程式が生じる．

$$\begin{pmatrix} Hy+a+A\mu+DE(y)\mu \\ \alpha Mu+c+N^T\mu-\lambda \\ Ay+D\max(0, y)-Nu \\ \min(\lambda, b-u) \end{pmatrix}=0 \tag{17}$$

ここで，$E(y)$は対角行列であり，その対角成分は次式で定義される．

$$E_{ii}(y)=\begin{cases} 1, & y_i\geq 0 \\ 0, & y_i<0 \end{cases}$$

このとき，ある条件のもとで，(y^*, u^*)が(16)の解であるための必要十分条件は$(y^*, u^*, \lambda^*, \mu^*)$が(17)の解となるベクトル$\lambda^*$，$\mu^*$が存在することであることが証明された[4]．さらに，(15)の差分離散から生じる(16)の近似誤差を解析した[3]．

6. 確率的2レベル2次計画問題

行列$H\in R^{n\times n}$，$M\in R^{m\times m}$はそれぞれ対称半正定値，対称正定値と仮定する．確率的2レベル2次計画問題（two-stage stochastic quadratic program）は次のように表される．

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}x^THx+c^Tx+\phi(y) \\ &\text{s.t. } Ax\leq b \\ &\qquad Tx-y=0 \end{aligned} \tag{18}$$

ただし

$$\phi(y)=\int_\Omega g(y, \omega)\rho(\omega)d\omega$$

$$\begin{aligned} g(y, \omega)=&\max_{z\in R^m} -\frac{1}{2}z^TMz+z^T(h(\omega)-y) \\ &\text{s.t. } Wz\leq q. \end{aligned}$$

ここで，$c\in R^n$，$A\in R^{r\times n}$，$b\in R^r$，$T\in R^{m\times n}$，$q\in R^{m_1}$，$W\in R^{m_1\times m}$は与えられたベクトルあるいは行列である．また，$\omega\in\Omega\subseteq R^{m_2}$は乱数ベクトル，$\rho$は確率密度関数である．任意の乱数ベクトル$\omega\in\Omega$に対して，関数$g(\cdot, \omega)$は連続微分可能な凸関数であることより，最適化問題(18)と次の非線形方程式は等価であ

ることが証明された[22].

$$\begin{pmatrix} Hx+c+A^T\lambda+T\mu \\ \nabla\phi(y)-\mu \\ Tx-y \\ \min(\lambda, b-Ax) \end{pmatrix}=0 \tag{19}$$

ここで，$\lambda\in R^r$，$\mu\in R^m$ はラグランジュ乗数であり，

$$\nabla\phi(y)=\int_\Omega \frac{\partial g(y,\omega)}{\partial y}\rho(\omega)d\omega$$

$$\frac{\partial g(y,\omega)}{\partial y}=-\mathrm{argmax}\{-\frac{1}{2}z^TMz+z^T(h(\omega)-y)\}$$

さらに，New South Wales 大学 Womersley 教授とともに，確率的な2レベル2次計画問題に対して並列アルゴリズムの有効性を検証するテスト問題と並列計算機上の Fortran 90 プログラムを与えた[10]．このプログラムは2004年に Stanford 大学の Shanbhag, Infanger, Glynn によって PC 上の Matlab プログラムに移植された．

7. 確率的線形相補性問題

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．確率的線形相補性問題（stochastic linear complementarity problem）

$$x\geq 0,\ M(\omega)x+q(\omega)\geq 0$$
$$x^T(M(\omega)x+q(\omega))=0 \tag{20}$$

に対して京都大学福島教授とともに次の期待残差最小 (expected residual minimization) という新しい定式化を提案した．

$$\min_{x\in R_+^n} E[\|\Phi(x,\omega)\|^2] \tag{21}$$

ここで，E は期待値を表し，関数 Φ は相補性問題の NCP 関数によって定義される．

$$\Phi(x,\omega)=\begin{pmatrix} \phi(x_1,(M(\omega)x+q(\omega))_1) \\ \vdots \\ \phi(x_n,(M(\omega)x+q(\omega))_n) \end{pmatrix}$$

(21)は従来の期待値（expected value）を用いた定式化，

$$x\geq 0, F_\infty(x):=E[M(\omega)x+q(\omega)]\geq 0$$
$$x^TF_\infty(x)=0 \tag{22}$$

より，ロバスト性が高いことが示された[2]．さらに，(21)が Fischer-Burmeister 関数によって定義されるとき，$E[\|\Phi(x,\omega)\|^2]$ は微分可能関数であり，(21)の最適性の1次の必要条件は次の非線形方程式によって定義される．

$$\min(x, E[\nabla\|\Phi(x,\omega)\|^2])=0 \tag{23}$$

多くの最適化問題は線形相補性問題に書き直すことができる．同様に，多くの確率的な最適化問題は確率的線形相補性問題に書き直すことができる．ちなみに，多くの確率的な最適化問題は非線形方程式に書き直すことができる．

8. 球面上でのデザイン

空間 R^3 の単位球面

$$S^2=\{y\in R^3: \|y\|_2=1\}$$

上の有限個の点 $\{y^1,\cdots,y^N\}$ からなる集合 Y で「良い」性質を持つものを見つけるために，つぎの最大補間行列式（maximum determinant of interpolation matrix）という最適化問題が研究されてきた．

$$\max_{Y\subset S^2} \log\det(G(Y)) \tag{24}$$

補間行列 $G(Y)$ の元は次の式で定義される．

$$G(Y)_{i,j}:=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{t}(2k+1)L_k((y^i)^T(y^j))$$

ここで，L_k は k 次 Legendre 多項式である．行列 $G(Y)$ が正則ならば，関数

$$g_i(y)=J_t(y^Ty^i),\ i=1,2,\cdots,N:=(t+1)^2$$

は球面 S^2 上の高々 t 次の多項式空間 P_t の基底関数である．最適化問題(24)は球面 S^2 上の t デザイン (spherical t-design) と緊密な関係がある．集合 $Y\subset S^2$ に対して，高々 t-次の任意の多項式 $p(y)$ が

$$\int_{S^2} p(y)dy=\frac{4\pi}{N}\sum_{i=1}^{N}p(y^i)$$

を満たすときに集合 Y を球面 S^2 上の t デザインという．任意の正整数に対して，t デザインの存在性が知られている．けれども集合 Y の点の個数と位置に関してまだたくさんの未解決問題が残っている．

$$y^1=(0,0,1)^T,\ y^2=(\sin x_1, 0, \cos x_1)^T$$
$$y^{i+1}=(\sin x_i\cos x_j, \sin x_i\sin x_j, \cos x_i)^T,$$
$$j=N+i-2, i=2,3,\cdots,N-1$$

とする．変数変換により，補間行列 $G(Y)$ が $\tilde{G}(x)$ となるとき，球面 S^2 上の t デザイン問題とつぎの非線形方程式は等価であることが示された（[5]）．

$$F(x):=E\tilde{G}(x)e=0 \tag{25}$$

ただし $e=(1,1,\cdots,1)\in R^N$,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0\dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$F: R^{2N-3}\to R^{N-1}$ となるので，(25)は劣決定非線形方程式である．劣決定非線形方程式に対する Newton 型法の収束性は論文[17, 23]で考察されている．

著者の最適化と非線形方程式に関する主な論文

[1] X. Chen and S. Xiang, Computational error bounds for linear complementarity problems, Math. Programming, 106 (2006) 513-525.

[2] X. Chen and M. Fukushima, Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problems, Math. Oper. Res., 30 (2005) 1-17.

[3] X. Chen, Finite Difference Smoothing Solution of Nonsmooth Constrained Optimal Control Problems, Numer. Funct. Anal. Optim., 26 (2005) 49-68.

[4] X. Chen, First order conditions for nonsmooth discretized constrained optimal control problems, SIAM J. Control Optim., 42 (2004) 2004-2015.

[5] X. Chen and R. S. Womersley, Existence of solution to systems of underdetermined equations and spherical designs, to appear in SIAM J. Numer. Anal. (2006).

[6] G. E. Alefeld, X. Chen, F. A. Potra, Numerical validation of solutions of complementarity problems: the nonlinear case, Numer. Math., 92 (2002) 1-16.

[7] X. Chen, Z. Nashed and L. Qi, Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations, SIAM J. Numer. Anal., 38 (2000) 1200-1216.

[8] X. Chen and Y. Ye, On smoothing methods for the P_0 matrix linear complementarity problems, SIAM J. Optim., 11 (2000) 341-363.

[9] B. Chen, X. Chen and C. Kanzow, A penalized Fischer-Burmeister NCP-function, Math. Programming, 88 (2000) 211-216.

[10] X. Chen and R. Womersley, Random test problems and parallel methods for quadratic programs and quadratic stochastic programs, Optim. Meth. Softwr., 13 (2000) 275-306.

[11] X. Chen and M. Fukushima, Proximal quasi-Newton methods for nondifferentiable convex optimization, Math. Programming, 85 (1999) 313-334.

[12] X. Chen and Y. Ye, On homotopy-smoothing methods for box-constrained variational inequalities, SIAM J. Control Optim., 37 (1999) 589-616.

[13] G. E. Alefeld, X. Chen and F. A. Potra, Numerical validation of solutions of linear complementarity problems, Numer. Math., 83 (1999) 1-23.

[14] B. Chen and X. Chen, A global and local superlinear continuation-smoothing method for P_0 and R_0 NCP or monotone NCP, SIAM J. Optim., 9 (1999) 624-645.

[15] X. Chen, Global and superlinear convergence of inexact Uzawa methods for saddle point problems with nondifferentiable mappings, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998) 1130-1148.

[16] X. Chen, L. Qi and D. Sun, Global and superlinear convergence of the smoothing Newton method and its application to general box constrained variational inequalities, Math. Comp., 67 (1998) 519-540.

[17] X. Chen, M. Z. Nashed and L. Qi, Convergence of Newton's method for singular smooth and nonsmooth equations using adaptive outer inverses, SIAM J. Optim., 7 (1997) 445-462.

[18] X. Chen, A verification method for solutions of nonsmooth equations, Computing, 58 (1997) 281-294.

[19] L. Qi and X. Chen, A preconditioning proximal Newton method for nondifferentiable convex optimization, Math. Programming, 76 (1997) 411-429.

[20] X. Chen, Convergence of the BFGS method for LC^1 convex constrained optimization, SIAM J. Control Optim., 34 (1996) 2051-2063.

[21] L. Qi and X. Chen, A globally convergent successive approximation method for nonsmooth equations, SIAM J. Control Optim., 33 (1995), 402-418.

[22] X. Chen, L. Qi and R. Womersley, Newton's method for quadratic stochastic programs with recourse, J. Comp. Appl. Math., 60 (1995), 29-46.

[23] M. Z. Nashed and X. Chen, Convergence of Newton-like methods for singular operator equations using outer inverses, Numer. Math., 66 (1993), 235-257.

[24] X. Chen, On the convergence of Broyden-like methods for nonlinear equations with nondifferentiable terms, Ann. Inst. Stat. Math., 42 (1990), 387-401.

[25] X. Chen and T. Yamamoto, Convergence domains of certain iterative methods for solving nonlinear equations, Numer. Funct. Anal. Optim., 10 (1989), 37-48.

付記

私の最適化と数値解析の道

私は中国河南省に生まれ，生後まもなく天津に移り，そこで育ちました．小学3年の時，文化大革命が始まり，大学への入学試験が廃止され，以後10年間入学試験は行われませんでした．その間，工場，農村，軍

隊から推薦された工農兵学員達が大学生となりました．1976年私は天津重型機械技工学校を卒業後，天津工程機械研究所に勤め，微積分と計算機プログラミングの勉強を天津市河北区業余学校（仕事以外の時間に開設されていた学校）で始めました．そこで南開大学沈啓均教授（計算数学）の講義を聴き，同教授の紹介で，南開大学の聴講生となり，工農兵学員と共に数学の授業を受けました．

1977年大学の入学試験が復活し，翌年，大学院修士課程の入学試験が中国全土で初めて実施されましたが，当時，南開大学には計算数学専攻の修士課程がなく，私は1980年西安交通大学の修士課程に入学しました．私はクラスの中で一番若く，同級生の多くは30才以上で，文化大革命前に大学生だった人達でした．私は游兆永教授の下で，最適化の勉強を始め，大規模な線形計画問題の並列計算法に関する修士論文を書きました．その後，1983年成都科学技術大学に就職し，計算数学と数理計画の授業を担当しました．1984年西安交通大学を含む5重点大学と研究所に計算数学専攻の博士課程が設置されましたので，私は生後8ヶ月の娘を抱えて，西安交通大学博士課程に進学しました．1987年連立非線形方程式の区間反復法に関する研究で理学博士の学位を得ました．この分野では女性として初の学位取得者でしたので，中国計算数学専攻の第1号女性博士と呼ばれました．

1987年5月游教授は愛媛大学山本哲朗教授などの国内外の著名研究者を招き，計算数学研究会を西安交通大学で開催し，これが縁で，私は同年秋日本国文部省の国費研究留学生として愛媛大学に入学し，山本教授の指導を受けることになりました．以後，同教授から与えられた研究テーマ「微分不可能な項をもつ非線形方程式に対するNewton型反復解法」について研究し，いくつかの論文を国際誌に発表しました．当時，愛媛大学理学部，工学部には博士課程がなく，山本先生と岡山理科大学仁木滉先生のお世話で，岡山理科大学に論文を提出し，1990年3月同大学理学博士の学位を得ました．その年の夏世界数学者会議が京都で開かれ，そのサテライト会議として日本で最初の計算数学国際会議が山本教授を実行委員長として松山で開かれましたので，私もそこで初めて英語で講演することができました．この会議には20名を超える著名外国人研究者が招かれ，私はドイツKarlsruhe大学G. Alefeld教授，アメリカDelaware大学M. Z. Nashed教授などに会う機会に恵まれました．1991年Nashed教授の招きにより渡米，Delaware大学に6ヶ月間滞在しました．さらに同年末オーストラリアNew South Wales大学L. Qi（祁力群）教授の招きにより，同大学Research Associateになりました．1995年元旦からAustralia Research CouncilのAustralian Research Fellowになり，New South Wales大学で，初めて大学院の指導教員になりました．そしてstochastic programの講義を担当し，修士学生2名を指導しました．1995年奈良先端科学技術大学院大学の福島雅夫教授がNew South Wales大学を訪問され，同教授との共同研究を開始しました．

その後1998年4月島根大学総合理工学部数理分野応用解析講座助教授として再来日し，2002年4月には弘前大学理工学部数理システム科学科最適システム講座教授に就任しました．そして同年春に夫と娘はオーストラリアから日本に移りました．以来，私は弘前大学で，最適化と数値解析の教育と研究を楽しんでいます．現在，5名の博士・修士課程学生（日本人学生2名，中国，エジプト，ホンジュラスからの政府奨学金留学生3名）を指導していますが，弘前大学学長指定重点研究「自然災害と経済リスクを考慮した資産管理の最適化法の開発」の研究代表者も務め，工学者，経済学者および青森県内企業との共同研究を行っています．また，国際誌「Numerical Functional Analysis and Optimization」，「Numerical Algorithms」の編集委員でもあります．

振り返ってみれば，今日まで多くの方々のお世話になりました．この機会をお借りして，厚くお礼を申し上げます．特に私を最適化と数値解析研究分野に導いて下さった西安交通大学故游兆永教授，現早稲田大学山本哲朗教授，現香港理工大学祁力群教授，現京都大学福島雅夫教授に対して，深い感謝を捧げます．