ネットワーク流と時の流れ

繁野　麻衣子

キーワード：ネットワーク流，動的流，アルゴリズム

1．ネットワーク最適化の時流

『ネットワーク』での最適化というと，ORの教科書では最短路問題，最大流問題，最小費用流問題などの『ネットワーク流』問題が馴染みである．これらのネットワーク流問題に対しては，1980～90年代にかけて，様々なタイプの多項式時間アルゴリズムの構築が精力的になされてきた．スケーリング法を主軸にしたアルゴリズムの開発，データ構造の改良やランダム化手法の導入など，より高速にそしてよりエレガントに解くための競争が展開されていた．

近年，ネットワークの最適化では信頼性や連結性に関連したネットワークデザイン，通信ネットワークの性能解析や構成，配置問題に対する研究が目立っている．その中で，ネットワーク流として躍進を遂げているのが，『多品種流』，『利得付きネットワーク流』，『動的流』などである．動的流は，時間の流れを考慮したネットワーク流であり，交通管理，生産スケジューリング，避難計画，インターネット通信制御などに応用をもつ．60年代のFord-Fulkersonによるネットワーク流のパイオニア書[2]でも紹介されており，広く研究され続けてきた．ところが，ネットワーク流を扱った教科書にはあまり登場していない．そこで，本稿では動的流について紹介しよう．

2．時間付きネットワーク流

頂点集合 V，有向枝集合 A からなる有向ネットワーク，すなわち，図1に示すような結合部（頂点）とリンク（有向枝）によってモデル化された構造を考える．例えば，道路網は交差点を頂点で，道路を有向枝によって有向ネットワークとしてモデル化できる．他にも情報網，パイプライン，製品の流れなどを有向ネットワークによりモデル化できる．このモデル化されたシステムのなかを流れる“モノ”（交通，情報，商品など）を考える．この流れる“モノ”をフローと呼ぶ．フローは有向枝に沿って流れ，頂点で分岐や合流をする．ただし，各有向枝 a を流れるフロー量はその有向枝の容量 $u(a)$ を超えられない．教科書に良く登場する最大流問題とは，システムの入口と出口に対応する頂点間になるべくたくさんのフローを流す問題である．

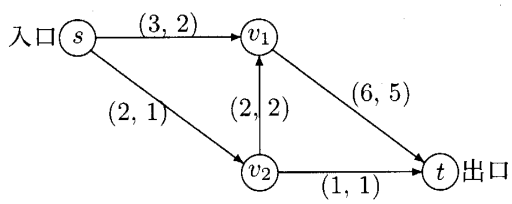

図1　時間付きネットワークの例．有向枝上の数字はその有向枝の（容量 $u(a)$，通過時間 $\tau(a)$）を表す

動的流（dynamic flow）では，この有向ネットワークに時間も考慮する．時間の導入方法として，(a)各有向枝 a をフローが通過する時間 $\tau(a)$ を考慮する，(b)ネットワークが携える量（容量，通過時間など）が時間とともに変化する，の2通りがある．前者はFord-Fulkerson[2]に端を発する研究の流れである．後者は例えば交通網において渋滞の有無で通過時間が変わったり，信号の待ち時間を考慮したネットワークを表現する場合に用いられる．さらに，近年，ネットワークが携える量がオンラインで変化する問題も議論されている．ちなみに，“動的”という用語は，オンラインでデータが変化する問題に対して使われることが多く，通過時間を導入したフローと区別するために，動的流という用語が避けられる傾向にある．以下では，主に(a)の通過時間を導入した有向ネットワークを扱う．

また，動的流には離散的に時間を導入する離散時間

しげの　まいこ
筑波大学 システム情報工学研究科
〒305-8573 つくば市天王台1-1-1

モデルと，連続的に時間を扱う連続時間モデルがある．離散時間モデルでは，フローはタイムスタンプごと，つまり，写真の連写モードの一コマごとのように決まる．他にも，中間頂点でフローの滞在を許すかどうか，許す場合には，滞在できる量に上限を設けるかどうかなどで様々な設定がある．

2.1 時間付きネットワーク流の問題例

ここで，通過時間を導入した問題の例をみてみよう．例えば，図1が避難経路を表しているとしよう．入口に b 人いるときに，なるべく速く全員を出口まで避難させたい．ただし，有向枝（通路）の容量は，各時間にその有向枝に流入することのできる量（人数）の上限を表す．よって，ある時間に有向枝 a を通過中の最大合計量は $u(a)\times\tau(a)$ となる．

さて，図1では，s-v_1-t の経路は一度に通ることのできる容量は大きいが，通過時間が合計で7単位時間かかる．一方，s-v_2-t の経路は通過時間が2単位時間であるが，v_2-t の容量1がネックとなり，この経路に沿っては，1ずつしか通過できない．よって，有向枝の容量と通過時間の兼ね合いからうまく，経路を決定しなければならない．実際，この問題例の答えは表1に示すように b の値によって，使用経路が異なる．ただし，ここでは離散型モデルとして扱っている．表1の使用経路は，示した経路に沿って（ ）内のフロー量を可能な限り同時に流しつづけることを示す．

この例からも分かるように，経路の容量はその経路に含まれる有向枝の容量の最小値，経路の通過時間はその経路に含まれる有向枝の通過時間の合計で与えられる．以下，経路 P の容量を $u(P)$，通過時間を $\tau(P)$ と書く．

通信においても同じような問題例がある．ネットワークが通信網を表しているとき，入口に b 単位のデータがあり，それをなるべく速く出口に転送したいという問題も考えられる．このように，与えられた量をなるべく速く出口に流す問題を最速フロー問題（quickest flow problem）と呼ぶ．データを転送するとき，1つの経路のみ許される場合と複数経路を経由できる場合が考えられる．特に，単一経路に限られている最速フロー問題を最速路問題（quickest path problem）ともいう．

逆に，決められた時間 T 内に入口から出口へなるべく多くフローを流す問題もあり，これは最大動的流問題（maximum dynamic flow problem）と呼ばれている．最速フロー問題と最大動的流問題は表裏の関係にある．ここで，図1の問題例において，時間 T に対する動的流の最大流量を図2に示す．一般的に最大流量は区分線形な増加関数となることが知られている．この関係が得られると，逆に流量 b を送る最速フロー問題では，b を達成する時間をみつければよい．言い換えると，最速フロー問題では，時間 T をパラメータにして，最大流量が b を超えるような最小の T を探せばよい．そこで，以下では図2を得る方法，つまり，最大動的流の解き方について解説しよう．

2.2 時間付きネットワーク流に対する道具1

時間を考慮したネットワーク問題を扱う際の常套手段として，時間軸を設けたネットワークへの変換がある．まず，頂点を各時間毎にコピーする．そして，もとのネットワークの有向枝 a が頂点 v から頂点 v' に向かっているとき，各時間 θ にコピーされた頂点 v から時間 $\theta+\tau(a)$ にコピーされた頂点 v' に向かって，容量 $u(a)$ の有向枝を設ける．頂点 v を時間 θ に出発したフローは時間 $\theta+\tau(a)$ に頂点 v' に到着するので，時間で引き延ばしたネットワークといえよう．図3は，図1に対してこのように構築した時間軸を設けたネットワークである．

決められた時間 T 内に入口から出口へなるべく多くフローを流す最大動的流問題は時間 T 分の時間軸を設けたネットワーク上で入口に対応するすべての頂

表1 図1の時間付きネットワークの問題例の解

避難人数	$0<b<6$	$6\le b<13$	$13\le b$
必要最小時間	$\lceil b-1\rceil+2$	$\lceil\frac{b-9}{4}\rceil+7$	$\lceil\frac{b-14}{5}\rceil+8$
使用経路	s-v_2-t (1)	s-v_2-t (1) s-v_1-t (3)	s-v_2-t (1) s-v_1-t (3) s-v_2-v_1-t(1)

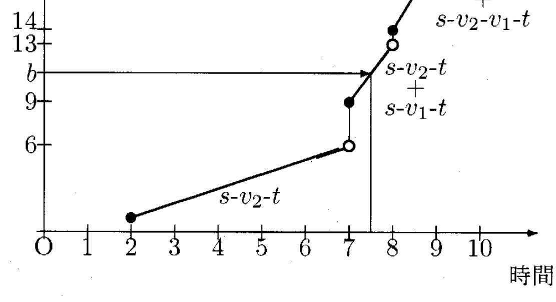

図2 時間 T に対する最大動的流の流量

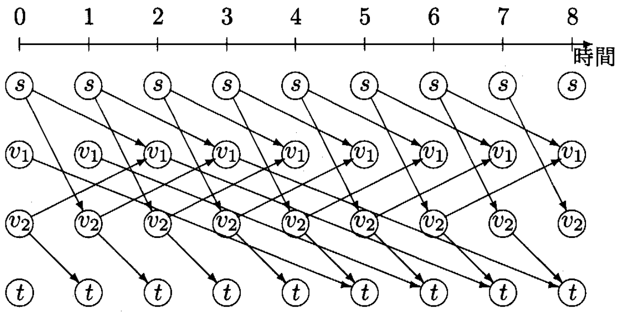

図3　時間軸を設けたネットワークへの変換．$T=8$ まで時間を設定

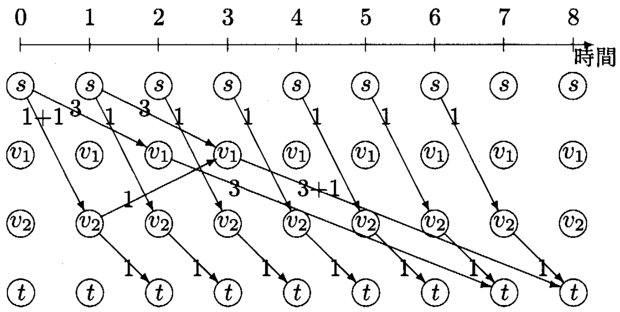

図4　$T=8$ のときの最大動的流問題の解．有向枝上の数字がフロー量を表す

点から出口に対応するすべての項点への最大流問題を解けばよい．図1の例で $T=8$ のときの最大動的流は，図4に示すように14単位のフローを流すことができる．

この時間軸を設けたネットワークへの変換は，有向枝に費用が付加している場合も同様に扱える．また，容量，通過時間が時間毎に変化する場合にも，あらかじめその量が分かっていればこの時間軸を設けたネットワークは対応できる．よって，時間付きネットワーク上の問題は時間軸を設けたネットワークへの変換によって，時間なしのネットワーク上の問題に帰着できる．しかし，時間軸を設けたネットワークへの変換には重大な欠点がある．まず，時間 T が非常に大きいと時間軸を設けたネットワークが莫大なサイズになってしまうことである．そして，なにより，離散時間の場合しか扱えない．そこで，時間軸を設けたネットワークに頼らない方法を次に紹介しよう．

2.3　時間付きネットワーク流に対する道具2

図4で示した最大動的流では，経路 s-v_2-t に沿って，1ずつ流し続け，経路 s-v_1-t に沿っても，出口 t へ到達する時間が $T=8$ を超えない限り同じフロー量3を流し続けている．このように，最大動的流問題では時間毎に流す経路や量を変えなくとも，最初に経路ごとに流す流量を決定しその流量を可能な時間流し続けることで最適解が得られる．可能な時間とは，出口に到達する時間が T を超えない限りということである．よって，最大動的流問題は各経路に流す流量を決定する問題とみなせる．各経路 P に流す流量を x_P とすると，経路 P の通過時間 $\tau(P)$ が時間 T 以下のとき P に沿って $\sum_{\theta=0}^{T-\tau(P)} x_P=(T+1-\tau(P))x_P$（連続時間モデルだと，$\int_0^{T-\tau(P)} x_P d\theta=(T-\tau(P))x_P$）だけ流すことができる．これをすべての経路について足し合わせた流量を最大化すればよい．ただし，各時間ごとにフロー量が有向枝の容量を超えないようにしないといけない．これには，各有向枝 a ごとにその有向枝を使う経路の流量の和が容量 $u(a)$ を超えないようにすれば十分である．入口から出口へのすべての経路の集合を $\mathcal{P}$ とすると，この問題は

$$\begin{array}{lll} \text{最大化} & \sum_{P\in\mathcal{P}}(T+1-\tau(P))x_P & \\ \text{条　件} & x_P\geq 0 & (P\in\mathcal{P}) \\ & \sum\{x_P \mid P\in\mathcal{P},\ P\text{ は }a\text{ を含む}\}\leq u(a) & (a\in A) \end{array}$$

と書ける．目的関数の係数に -1 を掛けて最小化問題とみると，この問題は最小費用流問題となる．つまり，与えられたネットワークに出口から入口へ，容量が無限大の有向枝を加え，この有向枝の通過時間を $-(T+1)$ としたネットワークを作り，通過時間を費用とした最小費用循環流（各項点の正味流入量が0）を求めればよい．

以上で紹介した時間付きネットワークに対する2つの道具はFord-Fulkersonの本[2]で述べられており，目新しいアイデアではない．しかし，特に2番目の経路ごとのフローを扱う方法は離散型，連続型どちらにも対応し，後で述べる他の時間付きネットワーク流問題に対するアルゴリズムでも有用な道具となっている．

2.4　時間付きネットワーク流の基本性質

さて，時間を考えない最大流問題に対しては，有名な最大流最小カット定理があり，幅広い応用をもっている．次に，この定理の動的流版を連続型モデルで紹介しよう．動的流に対する時間付きカットは，項点に $[0, T]$ 間の数を対応させた $\alpha\in[0, T]^V$ によって決まる．ただし，$\alpha_{入口}=0$, $\alpha_{出口}=T$ を満たすとする．このとき，時間付きカットは各項点 v と時間 θ のペア (v, θ) の集合，

$$C_\alpha=\{(v, \theta) \mid v\in V, \theta\in[0, T], \theta\geq\alpha_v\}$$

で定義される．離散型の動的流に対しては，α_v と時間 θ はすべて整数をとる．すると，C_α は，時間軸を設けたネットワーク上のカットに対応する．さて，こ

の時間付きカット C_α の容量を，

$$\sum_{\{a=(v,w)\in A|\alpha_v+\tau(a)\leq\alpha_w\}}\int_{\alpha_v}^{\alpha_w-\tau(a)}u(a)d\theta$$

とする．離散型では，まさに，時間軸を設けたネットワーク上のカット容量となっている．このとき，任意の動的流の流量は任意の α によって決まるカットの容量を超えることはなく，さらに，最大動的流量と一致するカット容量を決める α も存在する．連続型モデルは変数が無限個ある問題であるが，この最大流最小カット定理の動的流版によって，最適性の保証が容易にできるようになる．

2.5 時間付きネットワーク流のいろいろ

以上，主に最大動的流問題の解き方，性質について述べてきたが，ここでは他の時間付きネットワーク上の最適化問題について紹介しよう．

最大動的流問題の変種として，どの時間 $\theta\in[0,T]$ においても入口からの流出量と出口への流入量のどちらも同時に最大化する問題もあり，多項式時間の近似アルゴリズムが知られている．

与えられた量 b をなるべく速く入口から出口に流す最速フロー問題は既に述べたように，時間 T をパラメータとして最大動的流問題を解き，最大流量が b を超える最小の時間 T をみつければよい．パラメトリックサーチの手法によりこの問題は強多項式時間で解けることが知られている．一方，避難経路の問題のように各経路を流れるフロー量（人数）は整数に限られる場合もある．フロー量を整数に限定した最速フロー問題はNP-困難となる．

最速フロー問題の拡張として，入口に対応する頂点や出口に対応する頂点が複数ある問題も考えられる．時間を考慮しない場合は入口や出口が複数あっても，それらの頂点を1つにまとめて，入口1つ，出口1つのネットワークで議論できるが，通過時間を考慮するとそうはいかない．入口，出口が複数あっても多項式時間で解けることが知られているが，さらに効率よいアルゴリズムの出現が期待されている．

単一経路に限られた最速フロー問題である最速路問題では，フロー量 b を経路 P に沿って流すと，$\left\lceil\frac{v}{u(P)}\right\rceil+\tau(P)$ だけ時間がかかるのでこの値が最小となる経路をみつければよい．この問題に対してはいくつかの多項式時間アルゴリズムが提案されている．

費用を考えた動的流問題もある．各有向枝にフローを1単位流すときの費用も分かっているとする．時間 T とフロー量 b が与えられているとき，時間 T 以内で入口から出口へ b だけ流すとき，フローを流すのにかかる総費用を最小化する問題は，たとえ，b が T に対する最大動的流問題のフロー量であっても，または，T が b だけ流す最速フロー問題の最適時間であってもNP-困難となる．他にも，フローが頂点に滞ることを許し，滞る時間に応じた費用を導入した問題もある．

また，これまで有向ネットワーク中を流れるフローは一品種であったが，複数品種のフローを流す多品種流問題もある．時間を導入することにより，最小費用流問題や多品種流問題はNP-困難となってしまう．これらの問題に対しては近似解法がさかんに開発されている．近似解法の多くも道具2で紹介した経路に分けたフローを基にしている．

3. 淀みない流れをめざして

本稿で紹介した時間を導入した動的流に対する道具や性質はどれも20世紀の結果であり，最新の研究やサーベイは例えば文献[1]などを参照されたい．特集で取り上げた理由の一つとして，[1]の参考文献から女性研究者が活躍している分野であることも分かって頂けるであろう．本稿は，あまり教科書に登場しないネットワーク流を少しでも知ってもらうためのものであり，今後も多くの研究者がネットワーク流の魅力に引き寄せられ，より実用的なモデルの上で淀みない研究の流れを遂行する一つの糧になればと思う．

参考文献

[1] L. Fleischer and M. Skutella. "Quickest flows over time," to appear in *SIMA J. Computing*.
[2] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962.