計算幾何学における最適化問題

今井　桂子

キーワード：幾何的最適化問題，幾何的マッチング，ラベル配置，計算幾何学

1．はじめに

最近では日常生活の中で幾何的データに出会う機会が非常に増えている．画面に表示された地図において目的地に最も近い駅を見つけたり，部屋のなかで見えている家具を列挙するという問題は，人間にとっては，それまで蓄積してきた知識と直感によってそんなに難しいことではないのかもしれない．しかし，コンピュータによってこのような問題を解くためには，幾何学的問題に適したデータ構造とアルゴリズムを開発する必要がある．さらに，実際に扱うデータは膨大な量となることが予想されるので，高速かつ効率よく解くことが求められる．このように幾何学に計算の複雑さの理論を導入して，初等ユークリッド幾何学的な問題をコンピュータで効率よく処理するアルゴリズムを開発し，その限界を究明する研究分野が計算幾何学であるといえる．

このような研究分野である計算幾何学を中心に研究を行っているので，数理計画法のような最適化の王道で最適化の研究を行っているわけではないが，計算幾何学の中にも多くの最適化問題が存在する．ここでは，計算幾何学における最適化問題のいくつかを紹介しながら，これまで，どのようなことを最適化しようと思ってきたかを書いていこうと思う．

最初に計算幾何学における最適化問題に出会ったのは，球面上のミニマックス型の施設配置問題における代数計算木の元での計算量の下限を求めるというものであった[5]．計算量の自明でない下限が分かっている問題はそう多くはないが，代数計算木のもとでは，判定問題のイエスと等価になるような集合の連結成分の数を数えることで，下限を計算することができる[2]．当時，計算機科学の知識がなかったからだろうが，代数的に定義した集合の連結成分の個数と計算複雑度の下限に関係があるということに，新鮮な驚きを感じたことを覚えている．

2．点集合の幾何的マッチング問題

ピングリッドアレイ型LSIの位置決め問題から派生して生まれた，対応の与えられた2つの点集合を回転・平行移動によって，なるべく重ね合わせるという幾何的マッチング問題も最適化問題として定式化できる．

与えられた2つの点集合を $S=\{s_j=(x_j, y_j)|j=1, 2, \cdots, n\}$，$T=\{t_j=(u_j, v_j)|j=1, 2, \cdots, n\}$ とし，s_j と t_j が対応していると仮定する．平面上の点を複素平面の点とみなし，s_j，t_j をそれぞれ $x_j+\mathrm{i}y_j$，$u_j+\mathrm{i}v_j$ と同一視する．集合 S を角度 $\theta(0\leq\theta<2\pi)$ 回転し，原点を $z=x+\mathrm{i}y$ に移動すると，S の点は $s_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z$ となる．ここで，e は自然対数の底であり，i は虚数単位である．したがって，移動した後の s_j と t_j の L_2 距離は $\|s_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-t_j-z\|_2$ と書ける．このようにして，幾何的マッチング問題は次のような式で表せる．

$$\min_{z, 0\leq\theta<2\pi} \max_{j=1,2,\cdots,n} \|s_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-t_j-z\|_2$$

$p_j(\theta)=x_j(\theta)+\mathrm{i}y_j(\theta)$ を

$$x_j(\theta)=x_j\cos\theta-y_j\sin\theta-u_j$$
$$y_j(\theta)=x_j\sin\theta+y_j\cos\theta-v_j$$

で定義すれば，問題は次のように書き換えられる．

$$\min_{0\leq\theta<2\pi}\left(\min_{z} \max_{j=1,2,\cdots,n} \|p_j(\theta)-z\|_2\right)$$

これは，n 個の実3変数関数の最大値をとる関数の最小化問題であるが，外側の min における θ を固定した問題は，その θ に対する点 $p_j(\theta)(j=1, \cdots, n)$ の最小包含円問題になっており，z は最小包含円の中心に他ならない．この部分問題は線形計画問題に対するアルゴリズムを容易に適用でき，線形時間で解ける．し

いまい　けいこ
中央大学 理工学部情報工学科
〒112-8551 文京区春日 1-13-27

かし，それらのアプローチは動的環境では，点が動的に動くことにより，θ に関して凸性が成立しないことから有効ではない．静的な問題に対する解法に，最遠Voronoi図を用いるものがあり，このアプローチでは，静的問題に対しても $O(n \log n)$ 時間かかるものの，動的な枠組でも下側エンベロープに関する問題としてうまく扱えることが分かった．実際，このアプローチを追求して，Davenport-Schinzel列の議論（[1]参照）を用いることによって，幾何的マッチング問題が $O(n^2\lambda_8(n))$ の組合せ的複雑度をもつことがわかる[6]．一般に，$\lambda_s(n)$ は n に関してほとんど線形な関数であることがわかっている[1]．

計算幾何学における多くの問題に，Voronoi図が役立つことは良く知られている．幾何的マッチング問題の解法は，実は動的Voronoi図を構成していることに他ならないので，動的Voronoi図の構成法が得られたことから，Voronoi図を用いて解ける問題の動的な場合の問題が解けることになった．

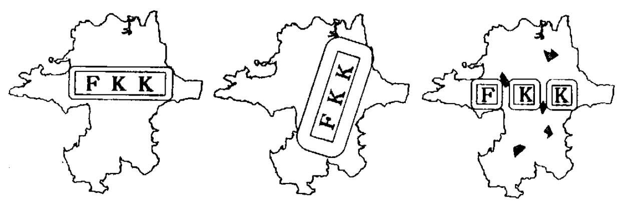
3. ラベル配置問題

幾何的マッチング問題の次に遭遇したのは，領域内に地名を配置する問題であった．これは，地図データベースにおいて，縮尺や用途に応じて図形と文字を選択し合成するという利用者インタフェースを実現する上での重要な問題として現れた．地図や平面上に描画されたグラフに必要な情報を文字として付加するためには，表示したい文字情報（ラベル）を適切な位置に，読みやすい大きさで配置する必要がある．グラフに対するラベル配置はグラフの自動描画と関連して研究が盛んに行われている．しかし，ラベル配置問題の多くはNP困難であり，問題は分かりやすいのだが，一般に解くのは難しい．ラベル配置問題に関する多くの文献が[12]に載っている．領域に対するラベル配置から出発し，いろいろな場合に対する問題を考えてきた．それを紹介したい．

3.1 領域に対するラベル配置

ラベル配置問題では，文字列は長方形で表されることが多い．領域は多角形で表現され，多角形領域 Q 内へ凸多角形 P を配置するという多角形配置問題と考えられる．モーションプラニングとも関係があり多くの研究がなされてきた．[4]では次のような3つの最適化問題(P 1)，(P 2)，(P 3)を考えた．

(P 1)　平行移動だけを用いて P の任意の点と Q の任意の点とのEuclid距離の最小値が最大となるように凸多角形 P を多角形領域 Q の内部に置く（図1(a)参照）．



(a)　問題（P 1）　(b)　問題（P 2）　(c)　問題（P 3）

図1　地図に地名を配置する問題

(P 2)　回転と平行移動によって P の任意の点と Q の任意の点とのEuclid距離の最小値が最大になるように凸多角形 P を多角形領域 Q 内に配置せよ（図1(b)参照）．

(P 1)は新しいVoronoi図を定義し，(P 2)ではそのVoronoi図の動的な場合を考えることにより，それぞれ，$O(mn \log mn)$，$O(m^4 n\lambda_{16}(mn) \log mn)$ の手間で解くことができる．ここで，P は m 個の辺を持つ凸多角形，Q は n 個の辺を持つ多角形（または多角形領域）としている．(P 2)においても，幾何的マッチングの場合とは別の動的Voronoi図に出会うことになった．

(P 3)　Q 内に P の k 個のコピーを次のように配置する．P のコピーは水平線上に並び，コピー間の距離 h と，P の任意の点と Q の任意の点の間の距離の最小値が最大となるようにする．ここで，h は与えられた定数 $h_0>0$ 以上であるような変数である（図1(c)参照）．

(P 3)は1文字ずつを文字間を取って配置するという問題であり，これも m，n に関する多項式時間で解ける．

3.2 点に対するラベル配置

点に対してラベルをつける問題は点ラベル配置問題と呼ばれ，地図上の点を，ラベルを表す長方形のどこと一致させるかによっていろいろなモデルが考えられている．ラベルを配置するための基本的な規則は次のものが考えられる．

- ラベルが指し示す対象物が明白である．
- ラベルは他のラベルや対象物と重なってはいけない．

離散的なモデルとして固定位置モデルがある．これは長方形の境界上にある有限個の点集合の中の1点とラベルを配置したい点とが一致するように長方形を平行移動させるものである．同じ大きさの正方形のラベ

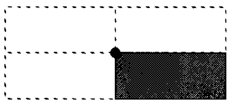


図 2　4-position model

ルの場合でも，ラベルを付けたい点と一致させる点のラベル上の候補の数が 3 以上の場合には，重ならないように配置できるかどうかを判定する問題が NP 完全であることが知られている[3, 8]．点とラベル上の 1 点または 2 点のうちの 1 点と一致させる場合には，重ならないように配置する決定問題がラベルの大きさや形が異なっても，多項式時間で解くことができる[3]．図 2 はラベルの候補位置が 4 つなので 4-position model と呼ばれる．

ラベル配置問題の最適化問題は大きく分けて，2 種類存在する．1 つは，ラベルの大きさを固定して，重ならないようになるべく多くのラベルを配置するというラベル数最大化問題である．いくらでもラベルを小さくして良いのであればすべての点にラベルを配置できるので，もう一つの最適化問題はすべての点に配置できる最大の大きさを求める，ラベルサイズ最大化問題である．

ラベルを配置する候補位置が連続的であるモデルも存在する．それがスライダーモデル（Slider Model）である．これはラベルを配置したい点を長方形のいくつかの辺上の任意の点と一致させるものである．スライダーモデルのラベル数最大化問題も NP 困難であり，少なくとも最適配置の半分のラベル数が得られる $O(n \log n)$ 時間の近似アルゴリズムが知られている[11]．

実際の地図データに，固定位置モデル・スライダーモデルや引出し線を用いたモデルなどを用いて，ラベルを配置する試みを行ってきたので，そのうちのいくつかを紹介する．

3.2.1　路線図への応用

東京 23 区内の路線図を正確な位置情報に基づいて，A 4 の紙に表示しようとすると駅が密集して文字を配置するのが難しそうなのは想像できるだろう．また，数値地図では路線は多くの補間点を結ぶ折れ線（曲線に見える）で構成されており，路線名は長方形として配置するよりも折れ線に沿って配置する方が自然である．このような観点から，駅名と路線名にラベルを配置する方法を[7]では提案している．そこでは，文字の大きさは固定しているので，ラベル数最大化問題を解いていることになる．それまでのラベル数最大化問題の解法は，なるべくラベルを詰めて配置し，多くのラベルが配置されるようにするもので，読みやすさを考慮していなかった．実用面からは，配置できたとしても読めなければ困るので，[7]では，なるべく周囲のラベルとの距離が大きくなるような位置を探している．図 3 は東京 23 区内の地下鉄路線図に対する解の一部を切り取ったものであり，ラベル間に隙間があることが分かるであろう．しかし，配置できていない駅が存在している．

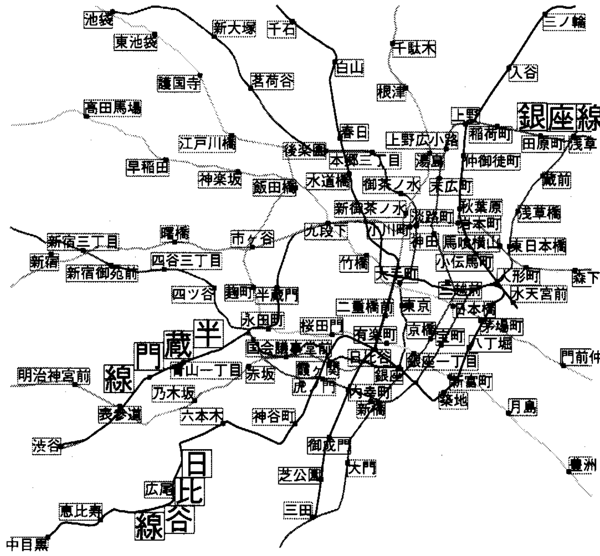


図 3　東京 23 区内の地下鉄路線図（一部）

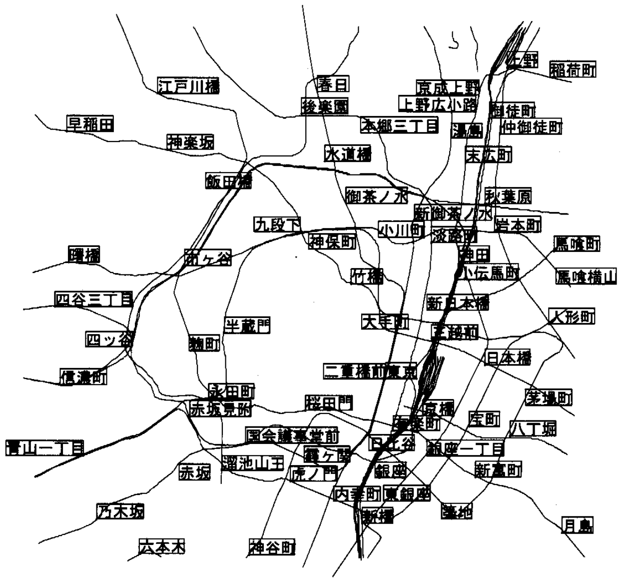


図 4　路線図におけるラベルサイズ最大化

3.2.2　ラベルサイズ最大化問題

4-position model の場合，ラベルサイズを最大化する問題は NP－困難であるが，すべてのラベルの大き

さが一定である場合には近似アルゴリズムが存在する．実際の地図では地名の表す文字数は一定ではないので，[9]では，ラベル毎に文字数が異なる場合にも，実用的な時間で解を出力する解法を提案し，計算機実験を行った．図4は，東京の地下鉄・JR・私鉄の409駅に対して行った実験結果の一部分を表示したものである．計算機実験の結果，理論的に推定するサイズに殆ど一致する解が得られることが分かった．

また，知らない場所へ行く際にはWebで地図を表示し，位置や最寄り駅からの道を確認する方も多いだろう．その際，駅が表示範囲になかったり，道路の詳細な情報が欲しかったりすれば，地図の拡大や縮小が頻繁に行われる．それに伴って，文字の大きさも見やすい大きさに自動的に，瞬時に変化することが必要であり，[10]においては，[9]の手法の高速化を図り，このような状況に対応できる解法を提案・実装した．

4. さいごに

これまでに研究してきた幾何的な最適化問題のいくつかを紹介してきた．"最適化問題を見つけて解こう"としたわけではなく，解きたい問題を定式化したら最適化問題になったという方が正しいかもしれない．計算幾何学には他にも多くの最適化問題があり，ここでは，少しでも，その雰囲気を感じて頂けたら幸いである．

参考文献

[1] P. K. Agarwal, M. Sharir and P. Shor : Sharp Upper and Lower Bounds for the Length of General Davenport-Schinzel Sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Vol. 52 (1989), pp. 228-274.

[2] M. Ben-Or : Lower Bounds for algebraic computation trees. *Proc. 15th ACM Annual Symp. on Theory of Computing*, 1983, pp. 80-86.

[3] M. Formann and F. Wagner : A Packing Problem with Applications to Lettering of Maps. *Proceedings of the 7th ACM Symposium on Computational Geometry*, 1991, pp. 281-290.

[4] K. Imai, H. Imai and T. Tokuyama : Maximin location of convex objects in a polygon and related dynamic Voronoi diagrams. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 42, No. 1 (1999), pp. 45-58.

[5] 今井浩, 炭野重雄, 今井桂子 : 球面上のミニマクス施設配置問題の計算複雑度. 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J 71-D, No. 6 (1988), pp. 1155-1158.

[6] K. Imai, S. Sumino and H. Imai : Minimax Geometric Fitting of Two Corresponding Sets of Points. *Proceedings of the 5 th Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, 1989, pp. 266-275.

[7] T. Kameda and K. Imai : Map Label Placement for Points and Curves. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E 86-A, No. 4 (2003), pp. 835-840.

[8] K. Kato : Studies on the Geometric Location Problems, L_1 Approximation and Character Placing. *Master's Thesis, Kyushu University*, 1989.

[9] S. Toriumi, H. Endo and K. Imai : Label Size Maximization for Rectangular Node Labels. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E 89-A, No. 4 (2006), pp. 1035-1041.

[10] 鳥海重喜, 今井桂子 : 地図の拡大・縮小表示を念頭に置いたNLP問題に対するラベルサイズ最大化. 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2005年秋季研究発表会アブストラクト集, 2005, pp. 198-199.

[11] M. van Kreveld, T. Strijk and A. Wolff : Point Set Labeling with Sliding Lables. *Proceedings of the 7 th ACM Symposium on Computational Geometry*, 1998, pp. 337-346.

[12] A. Wolff : The Map Labeling Bibliography. http://i11www.iti.uni-karlsruhe.de/map-labeling/bibliography/