AHPを用いた柔道選手の強さの推定

木下　栄蔵

本稿では，2004年アテネオリンピックの柔道女子選手の強さの推定にAHPを適用した事例を紹介する．また，実際のスポーツの結果推定や分析にもAHPが有効な手法であることを示す．

キーワード：AHP，スポーツ分析，柔道

1. はじめに

本稿では，柔道選手の強さの推定にAHPを適用した事例を紹介する．柔道はトーナメント方式を採用しており，勝者が勝ち進んでいき優勝者が決定する．そのため，トーナメント方式では，ある選手が自分以外のすべての選手と対戦するわけではない．また，勝敗の決定についても，一本勝ちの場合もあれば判定による場合もあり，勝ち方の種類もいくつかある．そこで，本稿では柔道における各選手の強さをAHPにおける一対比較行列の新しい重み導出法を適用することによって推定する．

2. 従来の重み導出法

AHPにおける一対比較行列の重み導出法については従来2つの手法がある．一つは固有ベクトル法であり，もう一つは幾何平均法である．そこで，本節では与えられた一対比較行列 $A=[a_{ij}]$ から，各評価項目の重要度 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ を推定する方法として上記の2つの方法を説明する．

2.1 固有ベクトル法

ここで，$w_1, w_2, \cdots, w_n$ が既知のとき $A=[a_{ij}]$ は次のように表現できる．

$$A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

ただし，$a_{ij}=w_i/w_j$，$a_{ji}=1/a_{ij}$，$W=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$，$i, j=1, 2, \cdots n$ である．

この場合すべての i，j，k について $a_{ij}\times a_{jk}=a_{ik}$ が成り立つ．このことは，意思決定者の判断が完全に首尾一貫していることを示している．ここで，この一対比較行列 A に重み列ベクトル W を掛けると，ベクトル $n\cdot W$ が得られる．すなわち，

$$A\cdot W=n\cdot W \tag{2}$$

となる．そして，この式は固有値問題

$$(A-n\cdot I)\cdot W=0 \tag{3}$$

に変形できる．ただし I は単位行列を意味している．

ここで $W\neq 0$ が成り立つためには，n が A の固有値にならなければならない．このとき W は A の固有ベクトルとなる．さらに，理論的には A の階数は1であるから固有値 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$ は1つだけが非零で他は零となる．また，A の主対角要素の和は n であるから，ただ1つ零でない λ_i を $\lambda_{\max}$ とすると，$\lambda_i=0$，$\lambda_{\max}=n$，$\lambda_i\neq\lambda_{\max}$ となる．

したがって，ベクトル W は A の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する正規化とした固有ベクトルとなる．ただし，文献[1]により均衡モデルから固有ベクトル法を導出する解釈も提案されている．

2.2 幾何平均法

実際の人間の意思決定には誤差が含まれることが多い．つまり，一対比較行列には誤差が存在するので，その誤差を最小にする値を一対比較行列のウェイトに採用するというのが誤差モデルである．すなわち，多少の誤差を許容し，重要度の近似値を与えるという考え方である．そこで，一対比較値 a_{ij} は本来あるべき真値である w_i/w_j に正の誤差 e_{ij} を乗じたものとして

きのした　えいぞう
名城大学 都市情報学部
〒509-0261 可児市虹ヶ丘4-3-3

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij} \tag{4}$$

と表現できる．簡単のため対数を数式の上部にドットで表現し，(4)式の両辺の対数をとると，

$$\dot{a}_{ij}=\dot{w}_i-\dot{w}_j+\dot{e}_{ij} \tag{5}$$

となる．ここで，誤差項の対数 e_{ij} の二乗和を最小にするような w_i を推定しようとするのが誤差モデルである．この方法は対数最小二乗法（logarithmic least square method）と呼ばれ，重要度 w_i は以下の最適化問題の解として与えられる．

$$\begin{aligned}&\min \sum_{i,j=1}(\dot{a}_{ij}-\dot{w}_i+\dot{w}_j)^2\\&\text{s.t.}\sum_{i=1}^{n}\dot{w}_i=0\end{aligned} \tag{6}$$

(6)の解を求め，対数を元に戻すと行列 A の各行の幾何平均，

$$w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{1/n} \tag{7}$$

となるのである．したがって，幾何平均法は，対数最小二乗法となるのである．

さて，一対比較行列の2つの重み導出法について説明したが，いずれの方法を用いても3行3列までの一対比較行列については同一のウェイトが導出される．例えば，一対比較行列

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\1/3 & 1 & 5\\1/7 & 1/5 & 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

はどのモデルを用いてもそのウェイトは

$$W^T=(0.649, 0.279, 0.072) \tag{13}$$

と導出されるのである．

3. 評価単価法による重み導出法[2]

本節では，本稿で紹介する柔道選手の強さの推定に適用したAHPにおける評価単価法による導出法について説明する．AHPにおいては一対比較行列を(14)式のように表現する．

$$A=\begin{bmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & 1 & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\a_{i1} & a_{i2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in}\\\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

一対比較行列においてある行の要素は列の要素と比較してどれだけ重要であるかを表現している．そのため最初に与えられたある一対比較行列 A を，

$$A=A_1=(a_1^1, a_1^2, \cdots, a_1^j, \cdots, a_1^n) \tag{15}$$

と表現すると，A_1 の各要素は

$$a_1^j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\\vdots\\1\\\vdots\\a_{ij}\\\vdots\\a_{nj}\end{bmatrix} \tag{16}$$

と表現できる．つまり，a_1^j は初期値である一対比較行列 A_1 における第 j 列目である．ここで，要素 j から要素 k への変換式として，$a_1^j\cdot\frac{1}{a_{kj}}$ を定義する．すると，A_1 は要素数が n 個存在するため，要素 j から要素 k へは手順として，

$$a_2^k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_1^j\cdot\frac{1}{a_{kj}} \tag{17}$$

が導かれる．この手順を繰り返し

$$a_{l+1}^k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_l^j\cdot\frac{1}{a_{kj}} \tag{18}$$

として導出でき，以下のように収束する．

$$a_{l+1}^k=a_l^k \tag{19}$$

したがって，(20)式のように表現できる．

$$A_n=A_{l+1}=(a_{l+1}^1, a_{l+1}^2, \cdots, a_{l+1}^j, \cdots, a_{l+1}^n) \tag{20}$$

そして，評価単価法によって収束した一対比較行列 A_n を正規化することによって一対比較行列の重みとして導出できる．すなわち，もともとの一対比較行列 A に対する重み w は

$$w=\frac{a_n^j}{\sum_{j=1}^{n}a_n^j} \tag{21}$$

として求められるのである．この評価単価法により先ほどの例を計算すると，(13)式と同じ結果になることがわかる．

一方，不完全一対比較行列における重み導出法はハーカー法（文献[3]参照）等があるが，ここでは評価単価法を用いて不完全一対比較行列の重みを導出する．

さて，不完全一対比較行列における列要素に欠落部分があり，完全な評価単価法を用いることができない場合，次のルールを適用する．

ルール①

欠落している部分からは評価値が導出できないため，本来その部分から得られるはずの評価値はそのまま空白にしておく．

ルール②

ステップごとの列の平均を取る場合，欠落により評価が導出できない個所があるため，そのときは複数の評価値の平均値を導出する．

以上のルールを適用することにより，評価単価法を不完全一対比較行列に適用することができる．

例えば，次のような不完全一対行列

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 2 & \square \\ 2 & 1/2 & 1 & \square \\ 1/2 & \square & \square & 1 \end{bmatrix}$$

の評価単価法による解は，

$W^T=(0.287, 0.254, 0.341, 0.118)$ となる．

4. 柔道選手の強さの推定

本節では前節で示した評価単価法により柔道選手の強さの推定を行う．2004年にアテネオリンピックで開催された柔道の女子のトーナメント表を図1に示す．

また，一回戦から決勝戦までの勝敗表を示す（表1～表6参照）．

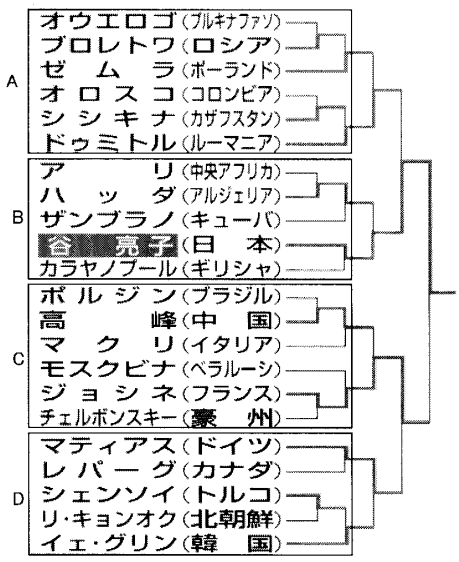

図1 2004年アテネ五輪柔道トーナメント表

表1 女子48 kg級 1回戦

選手名	勝敗／決まり手			選手名
ブロレトワ	○	技ありあわせて一本	●	オウエロゴ
シシキナ	○	優勢勝ち	●	オロスコ
ハッダ	○	一本	●	アリ
高峰	○	一本	●	ポルジン
ジョシネ	○	一本	●	チェルボンスキー
シェンソイ	○	優勢勝ち	●	リ・キョンオク

トーナメント表と表1～表6の勝敗表から各選手の一対比較表が作成できる．ただし，計算は各ブロック毎に行い，総合評価としては準決勝と決勝の結果を重んじることにする．

また，本稿では試合結果の判定については表7に示

表2 女子48 kg級 2回戦

選手名	勝敗／決まり手			選手名
ゼムラ	○	一本	●	ブロレトワ
ドゥミトル	○	一本	●	シシキナ
ハッダ	○	一本	●	ザンブラノ
谷 亮子	○	技ありあわせて一本	●	カラヤノプール
高峰	○	一本	●	マクリ
ジョシネ	○	一本	●	モスクビナ
マティアス	○	一本	●	レパーグ
シェンソイ	○	優勢勝ち	●	イェ・グリン

表3 女子48 kg級 3回戦

選手名	勝敗／決まり手			選手名
ドゥミトル	○	一本	●	ゼムラ
谷 亮子	○	一本	●	ハッダ
ジョシネ	○	優勢勝ち	●	高峰
マティアス	○	一本	●	イェ・グリン

表4 女子48 kg級 準決勝A

選手名	勝敗／決まり手			選手名
谷 亮子	○	技ありあわせて一本	●	ドゥミトル

表5 女子48 kg級 準決勝B

選手名	勝敗／決まり手			選手名
ジョシネ	○	一本	●	マティアス

表6 女子48 kg級 決勝

選手名	勝敗／決まり手			選手名
谷 亮子	○	優勢	●	ジョシネ

表7 重要性の尺度とその定義

重要性の尺度	定義
3	優勢勝ち
5	技ありあわせて一本
7	一本

表8　ブロックAの不完全一対比較表

	オウエゴロ	ブロレトワ	ゼムラ	オロスコ	シシキナ	ドゥミトル	重み
オウエゴロ	1	1／5	□	□	□	□	0.003
ブロレトワ	5	1	1／7	□	□	□	0.015
ゼムラ	□	7	1	□	□	1／7	0.105
オロスコ	□	□	□	1	1／3	□	0.035
シシキナ	□	□	□	3	1	1／7	0.105
ドゥミトル	□	□	7	□	7	1	0.736

表9　ブロックBの不完全一対比較表

	アリ	ハッダ	ザンブラノ	谷　亮子	カラヤノプール	重み
アリ	1	1／7	□	□	□	0.015
ハッダ	7	1	7	1／7	□	0.103
ザンブラノ	□	1／7	1	□	□	0.015
谷　亮子	□	7	□	1	5	0.723
カラヤノプール	□	□	□	1／5	1	0.145

表10　ブロックCの不完全一対比較表

	ポルジン	高峰	マクリ	モスクビナ	ジョシネ	チェルボンスキー	重み
ポルジン	1	1／7	□	□	□	□	0.028
高峰	7	1	7	□	1／3	□	0.194
マクリ	□	1／7	1	□	□	□	0.028
モスクビナ	□	□	□	1	1／7	□	0.083
ジョシネ	□	3	□	7	1	7	0.583
チェルボンスキー	□	□	□	□	1／7	1	0.083

表11　ブロックDの不完全一対比較表

	マティアス	レパーグ	シェンソイ	リ・キョンオク	イェ・グリン	重み
マティアス	1	7	□	□	7	0.746
レパーグ	1／7	1	□	□	□	0.107
シェンソイ	□	□	1	7	1／3	0.036
リ・キョンオク	□	□	1／7	1	□	0.005
イェ・グリン	1／7	□	3	□	1	0.107

表12　ブロックAとブロックBの一対比較表

	ドゥミトル	谷亮子	重み
ドゥミトル	1	1/5	0.167
谷亮子	5	1	0.833

表13　ブロックCとブロックDの一対比較表

	ジョシネ	マティアス	重み
ジョシネ	1	7	0.875
マティアス	1/7	1	0.125

すような重みを定義している．

つまり，表8と表9の結果の重みに表12の重みをかけ，表10と表11の結果の重みに表13の結果の重みをかけ，最終的に表14の結果の重みをかけることにより各選手の総合評価値が得られる（表15参照）．

表14　決勝の一対比較表

	谷亮子	ジョシネ	重み
谷亮子	1	3	0.75
ジョシネ	1/3	1	0.25

表 15　総合評価値

選手	重み
谷　亮子	0.192120621
高峰	0.174949200
ジョシネ	0.052574940
ドゥミトル	0.039237632
カラヤノプール	0.038530415
ハッダ	0.027369881
マティアス	0.009592814
モスクビナ	0.007484940
チェルボンスキー	0.007484940
ゼムラ	0.005597760
シシキナ	0.005597760
アリ	0.003985905
ザンブラノ	0.003985905
ポルジン	0.002525040
マクリ	0.002525040
オロスコ	0.001865920
レパーグ	0.001375913
イェグリン	0.001375913
ブロレトワ	0.000799680
シェンソイ	0.000462924
オウエゴロ	0.000159936
リキョンオク	0.000064295

表 16　実際の試合結果

実際の結果	
金メダル	谷　亮子
銀メダル	ジョシネ
銅メダル	ドゥミトル・マティアス

表 17　計算結果

計算結果	
金メダル	谷　亮子
銀メダル	ジョシネ
銅メダル	ドゥミトル

実際の試合結果と本稿での計算結果を表 16 と表 17 に示す．

実際の試合結果ではドゥミトル・マティアスの両名が銅メダルになっているが，計算結果では金メダルを取った谷亮子に敗れたドゥミトルが単独 3 位となっている．金メダル・銀メダルについては実際の結果と同様の結果が得られている．実際の柔道の試合結果では優勢勝ち，技ありあわせて一本，一本の 3 パターンにより表現されるが，AHP における重み導出法を用いることで，各選手の総合評価値を記述的ではなく規範的な数値として得ることができる．

5.　おわりに

本稿では，AHP における評価単価法による重み導出法を用いて，2004 年アテネオリンピックの女子柔道の結果から選手の強さを推定した．その結果，実際の成績に合致する結果が得られ，AHP モデルが有効な手法であることを示した．また，筆者は野球において，OERA モデルを適用した分析を行っている[4]（詳しくはオペレーションズ・リサーチ 2006 年 2 月号参照）．今後もさまざまなスポーツにおいて，OR 的手法が貢献できるものと考えられる．AHP をはじめ多くの OR 手法が既存の分野だけでなくスポーツ分析など多くの局面に有効であることを主張し本稿を終えることとする．

謝辞　本稿を作成するにあたり，名城大学大学院生杉浦伸君，ならびに名城大学生山田慎也君に計算の協力をしていただいた．感謝する次第である．

参考文献

[1] Sekitani, K. and Yamaki, N., "A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, " *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42, 219-222 (1999).

[2] 杉浦伸・木下栄蔵："評価単価法の提案とその適用," オペレーションズ・リサーチ学会誌論文研究ノート（投稿中）.

[3] 木下栄蔵：よくわかる AHP 孫子の兵法の戦略モデル, オーム社, 2006 年 1 月.

[4] 木下栄蔵：阪神はなぜ優勝したか, オペレーションズ・リサーチ学会誌, 2006 年 2 月号.