

ランチェスターモデルによる棒倒し競技の研究

小宮 享，牧 正人

運動会などでおなじみの棒倒しの試合では、対戦前にどちらのチームとも、まず全競技者を攻撃・防御担当に配分し、次に各担当ごとに作戦計画を立てると思う。例えば攻撃・防御とも、より細分して綿密な役割分担を決定したり、タイミングや攻撃方向を設定したりするかもしれません。本稿では、このような作戦が練られ統制のとれた棒倒しの対戦での双方のチームの消耗の様子をランチェスターモデルにより記述することを試みた。次に設定した棒倒しモデルにおいて、予め決められた試合時間をいくつかの時間帯に分け、各時間帯での最適な攻撃要員の配分や心理状況により攻撃配分が変化する様子を観察した。

キーワード：ランチェスターモデル、連立微分方程式、差分方程式

1. はじめに

「棒倒し」と聞くと、高校時代の体育祭を思い出される方も多いと思う。ご存知のように棒倒しは2本の太い丸太を使って繰り広げられる団体競技（格闘技？）で、1つのチームを、敵の棒を攻撃に行く攻撃担当者と自分のチームの棒を倒されないように防御する防御担当者に分けて戦い始める。攻撃担当は敵チームの棒ができるだけ早く倒すべく、様々な攻撃を仕掛けける。一方、防御担当は自分のチームの棒を敵の攻撃から守り、できるだけ長い時間倒されないようにする、という単純な競技である。単純とはいいつつも、やってみると結構熱くなり、男子高校出身の筆者も、その当時は熱く戦った思い出がある（女性の方は、イメージがわからないかもしれませんね。申し訳ありません）。

よき思い出だった「棒倒し」は、筆者が勤務する防衛大学校においては、毎年、秋の開校祭のメインイベントの1つとなっている。防大生は入学時より4つの学生大隊のいずれかに配属され、各大隊から選抜された猛者たちが大隊の意地と名誉をかけてトーナメント形式で棒倒しを戦うのである。優勝大隊は「棒倒し競技会優勝大隊」の看板を向う1年間、自分たちの学生舎の前に掲げられるという栄誉が与えられる。

こうした防衛大の特殊な事情はさておき、体育祭などで実施される一般的な棒倒しの試合でも、おそらくたいていの場合は試合前に入念に戦略が練られ、本番に臨むことが多いと思われる。敵の棒を攻撃に行くと

きに、やみくもに目の前の敵と戦うというよりも、例えば何人かの集団で右から回り込んで集中攻撃を仕掛けたり、フェイントをかけたりといった攻撃・防御方法をあらかじめいくつか設定しておいて、そうした戦術を組み合わせて戦うと思われる。

防衛大においても長年の経験から、攻撃担当と防御担当がさらに役割に応じて細分化されている。図1は毎年の開校祭パンフレットに載せられている図であるが、攻撃担当は遊撃、スクラム、突攻という3種類に、防御担当もキラー、サークル、上り、棒持ちという4種類に細分される。各チームとも細分化されたパートごとで練習に励み、その力量を向上させるとともに客観的に把握し、対戦相手チームとの相性を考えて



図1 防衛大における棒倒しのイメージ[1]

こみや とおる、まき まさと

防衛大学校 情報工学科

〒239-8686 横須賀市走水1-10-20

様々な攻撃・防御作戦を準備して本番を迎えていた。

本稿では、このように統制された作戦に基づいて遂行されている棒倒しの対戦を、2つの勢力が戦う際の両勢力の損耗過程を表現するランチェスターモデルを利用してモデル化し、いくつかの心理状況下で分析することで、普遍的な戦術を見出すことや競技中の微小時間ごとのよりよい役割配分などについて検討した結果を紹介する。

なお、以下では特に防衛大学校での棒倒しに限定してモデル化するため、(1)試合時間を最長120秒とする、(2)勝敗はそれぞれの棒の周辺に配置された審判員が棒と地面とのなす角度が垂直の状態から30°以上傾いた時点で「負け」と判定され決着がつく、という制限された試合を想定する。120秒間で決着がつかない場合は「引き分け」とし、しばしの休憩後に再試合となる。一般的には時間を制限せずに、棒が倒れるまで戦い続けるのが正しい決着のつけ方だと思われるが、そうすると延々と試合が続いてしまいがちで、競技時間が長引いたり、怪我人が発生する可能性も増大してしまい、開校祭の行事としての性格上、好ましくないと考えられるので、このような制限つきのルール設定になっていると思われる。

2. 棒倒しモデルの定式化

2.1 ランチェスターモデル[2]

過去の数々の戦争や激しいスポーツ等で見られるように、2つの勢力がぶつかり合うとき、時間経過とともに双方の人員は怪我をしたり死亡したりして損耗していく。こうした衝突での損耗の時間推移を連立微分方程式で記述することを考えたのが英国のF. W. Lanchesterである[3]。彼は20世紀初頭に、当時まだ十分に運用方法が確立されてなかった航空機どうしの戦闘での損耗に連立微分方程式モデルを適用し勝敗の行方を観察した。

スポーツの世界に戦争の損耗モデルを適用することは不適当だ、という倫理的なご意見もあることと思う。しかし棒を倒す（あるいは守り抜く）という唯一の目的のために、集団で格闘し、次第に1対1の取組み合いに陥って組織的行動から外れていくという、棒倒しでの戦い方の特性を見れば、まさにランチェスターモデルを適用してみるのに適当な状況と思えたのでこれにより検討を進めた。したがって、以下で考える棒倒しでの競技者の損耗とは、本当の意味での負傷によるような損耗ではなく、1対1の取組み合い状態に

なって組織的な役割に参加できないような状態を指すと考えていただきたい。

モデル化にあたり棒倒しで対戦する双方を赤、青チームとし、対戦途中の両者の人数を時間の関数 $R = R(t)$, $B = B(t)$ で表し、比例定数 k_B , k_R によりそれぞれのチームの強さを表すとする。このときランチェスターが考えた双方の損耗モデルは

$$dR/dt = -k_B B, \quad dB/dt = -k_R R \quad (1)$$

として記述される。これらの式より

$$k_R R \cdot dR/dt = k_B B \cdot dB/dt \quad (2)$$

と書くことができるので、対戦開始時 ($t=0$) から任意の経過時刻 t まで積分することにより、時間とともに相互の人数が2乗の関係で減耗していく関係式（フェーズ解）

$$k_R \{R_0^2 - R(t)^2\} = k_B \{B_0^2 - B(t)^2\} \quad (3)$$

が導かれる（ただし、 R_0 , B_0 は対戦前の人数）。この関係から上記モデルは2次則モデルと呼ばれることが多い。2次則モデルが想定する状況は、互いの勢力がそれぞれ統制された攻撃をしており、例えば目の前の敵をやっつけければ次の敵が割り振られるといった状況下での戦い方をイメージしている。これに対し1次則モデルと呼ばれるモデルもあり、連立微分方程式

$$dR/dt = -k_B R, \quad dB/dt = -k_R B \quad (4)$$

により記述される。上記同様の簡単な変形により双方の損耗が1次の関係となるフェーズ解

$$k_R \{R_0 - R(t)\} = k_B \{B_0 - B(t)\} \quad (5)$$

が得られる。(1)式の微分方程式では敵のみの能力と人数に応じて自分たちが減っていく様子を表現していたのに対し、(4)式では、対峙する両方の人数に比例して減っていくことが表現されている。目の前の敵の数だけでなく味方の人数も人数減少に影響しているのである。敵味方双方が一様に分布し、双方の人員の密度（地域が一定ならばそこに存在する人数）に比例して戦闘が生起する。手当たり次第、自分の周りにいる敵を攻撃する盲目的な戦い方を表現したモデルであるため、特に狙いを定めない「地域攻撃型」のモデルとして知られている。

2.2 棒倒し競技モデル

今、目の前の棒倒しの対戦状況に、これら既存のランチェスターモデルを適用して、攻撃者・防御者双方の損耗を表現することを考えていくわけだが、1次則・2次則のどちらのモデルを適用するのが妥当であるかが問題となる。実際には、試合ごとでも、また途中経過の各瞬間でもモデルの当てはまり具合は異なる

と思われ、一律にどちらかのモデルのみを適用することは適当ではないだろう。一般には、試合開始時はあらかじめ想定した作戦のもとで組織的に展開していくので2次則モデルの適用が適当と思われる。しかしながら競技途中では、作戦どころではなく、手当たりしだいの戦闘になっていると思われる所以で1次則モデルがあてはまるような状況だろう。ここでは理想的な状況、すなわち最初から最後まで統制がとれて、無益な戦力の集中や分散がない戦いが繰り広げられてほしいという願いも込めて、以下では2次則モデルに沿ったモデル化を進める。また本來の棒倒しでは双方の陣地にある2つの棒付近での別々の戦いを同時に見ながらハラハラするわけだが、棒周辺での対戦状況が大まかに見れば対称的であるので、以下では1つの棒の周辺のみ着目して定式化し検討を進める。

ランチェスター2次則モデルに従って定式化する場合、各チームの人数の減少要因は敵の人数とその攻撃能力（比例定数）である。図1で示した攻撃側・防御側双方の細分化された役割間での防衛生が考える一般的な対戦関係を図2に示す。

攻撃側は $AY(t)$, $AS(t)$, $AT(t)$ で遊撃、スクランブル、突攻の人数を、防御側は $DK(t)$, $DC(t)$, $DU(t)$, $DB(t)$ でキラー、サークル、上のり、棒持ちの人数をそれぞれ表すとする。細分化された各役割内では、均質で同一の脆弱性と攻撃力を持つとし、各役割が対戦する相手に対して持つ攻撃能力（キルレート K_* ；ただし*は図2の各アーケー上の下付き添え字を表す）を設定可能とする。

また実際の攻撃では作戦上の必要性から $AY(t)$ はさらに細分され、対キラー、サークルの $AYk(t)$, $AYc(t)$ に、 $AT(t)$ も対上のり、棒持ちの $ATu(t)$, $ATb(t)$ にまで分けた。先に述べた前提のとおり、図

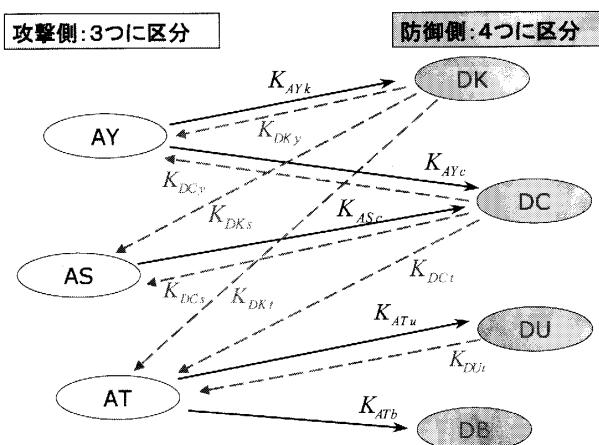


図2 細分化された攻防間の対戦関係

の交戦関係は競技中はずっとその対応関係が維持される。設定した各パラメータにより図2の対戦関係の連立微分方程式モデルを考えると以下のようになる。ただし'（ダッシュ）は時間微分に関する演算 d/dt を表し、 $A(t)$ は攻撃側の総人数を表す。

[防御側]

$$DC'(t) = -K_{AYc} \times AYc(t) - K_{AS} \times AS(t) \quad (6)$$

$$DK'(t) = -K_{AYk} \times AYk(t) \quad (7)$$

$$DU'(t) = -K_{ATu} \times ATu(t) \quad (8)$$

$$DB'(t) = -K_{ATb} \times ATb(t) \quad (9)$$

[攻撃側]

$$AY'(t) = \{ -K_{DCy} \times DC(t) - K_{DKy} \times DK(t) \} \\ \times AY(t)/A(t) \quad (10)$$

$$AS'(t) = \{ -K_{DCs} \times DC(t) - K_{DKs} \times DK(t) \} \\ \times AS(t)/A(t) \quad (11)$$

$$AT'(t) = \{ -K_{DCt} \times DC(t) - K_{DKt} \times DK(t) \} \\ \times AT(t)/A(t) - K_{DUt} \times DU(t) \quad (12)$$

上記のモデルにおいて防御・攻撃側での損耗式の形式が異なるのは、攻撃側の立場で考えているためである。防御側は棒を守るという受身的な立場であり、各ポジションの人数減少は、図2で決められているような細分化された攻撃者により生じている。一方、攻撃側は棒に向かって能動的に攻め込んで行く立場にあり、対戦する敵は図2のとおりであるが、臨機応変に対戦相手 $DC(t)$, $DK(t)$ が切り替わる可能性があること、また攻撃側の役割間でのバランスを調整するために、その時点の攻撃側の構成比率をかけている。

2.3 キルレートの設定

細分化された各役割の人数変化を見るためには数値解法を利用すればよいが、そのためには各キルレート K_* の値を決定する必要がある。

この決定には実際の棒倒しの試合のビデオを解析して2段階で行った。まず攻撃・防御双方とも1つの細分していない大集団として対戦させて平均的なキルレートを設定した。その後で各役割の特性に応じて、平均キルレートから値を増減した。過去数年分のビデオから、平均して約72秒で勝敗が決している。この時点での棒を保持する棒もちと上のりの人数が、最初に配分された人数の約20%程度まで減少して負けることをビデオや経験から設定した。攻撃側・防御側双方が全人数で対戦した際に、こうした対戦時間および人数になるような平均的なキルレートを求める $\bar{K}=0.15$ となった。その後で各役割で基準値 \bar{K} から±0.05程度の範囲内で調整して個別の役割ごとの

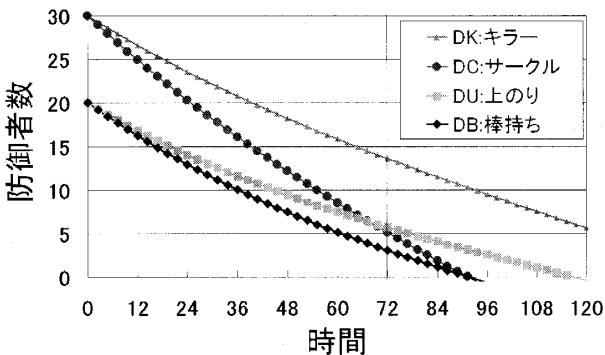


図3 設定したパラメータ値による防御側の損耗

パラメータ値を決定した。これらの増減調整は、実戦を経験している学生の意見に基づき、また数値計算結果も見ながら行った。図3に設定したキルレートによる防御側の各役割ごとの損耗の様子を示す。

3. 攻撃側の各役割への最適な人数配分

2.2節の棒倒し競技モデルでは細分した各役割への初期人数とキルレートを設定すれば、競技中の各役割ごとの人数推移が簡単に求まるが、ここではさらに1歩進めて、時間を離散化することで微分方程式モデルを差分方程式系に書き換えて、各微小時間での攻撃側を差分方程式系に書き換えて、各微小時間での攻撃側の各役割への最適な人数配分を求めるを考える。棒倒し競技モデルにおいて、決められている競技時間を連続する \hat{T} 個の微小時間帯 $T=1, 2, \dots, \hat{T}$ に分割し、各時間帯での防御側の各役割ごとの人数に関する差分方程式に書き換えると以下のような式が得られる。

[防御側]

$$DC(T+1)=DC(T)-K_{AYc} \times A Yc(T) - K_{AS} \times AS(T) \quad (13)$$

$$DK(T+1)=DK(T)-K_{AYk} \times A Yk(T) \quad (14)$$

$$DU(T+1)=DU(T)-K_{ATu} \times A Tu(T) \quad (15)$$

$$DB(T+1)=DB(T)-K_{ATb} \times A Tb(T) \quad (16)$$

また、攻撃側に関しては各時間帯で細分した役割ごとに損失人数 $LAY(T)$, $LAS(T)$, $LAT(T)$ を見積もり、次の時間帯での総攻撃人数 $A(T+1)$ を算出する。 $A(1)$ は試合開始前の全攻撃人数を表す。

[攻撃側]

$$LAY(T)=AY(T)-AY(T) \times \frac{A(T)-K_{DCy} \cdot DC(T)-K_{DKy} \cdot DK(T)}{A(1)} \quad (17)$$

$$LAS(T)=AS(T)-AS(T) \times \frac{A(T)-K_{DCs} \cdot DC(T)-K_{DKs} \cdot DK(T)}{A(1)} \quad (18)$$

$$LAT(T)=AT(T)-K_{Dut} \cdot DU(T)-AT(T)$$

$$\times \frac{A(T)-K_{DCt} \cdot DC(T)-K_{DKt} \cdot DK(T)}{A(1)} \quad (19)$$

$$A(T+1)=A(T)-LAY(T)-LAS(T)-LAT(T) \quad (20)$$

各時間帯ではそれぞれの役割ごとの人数は不变であり、その役割に従う行動をするとする。この他に、例えば、攻撃防御側双方の人数の合計に関する制約式や突攻の踏み台となるスクラムの人数を常に突攻の人数以上にするといった攻撃上妥当と思われる制約式なども考慮して、競技終了段階における防御側の中心人数 $DU(\hat{T})+DB(\hat{T})$ を最小化するように、各時間帯における攻撃側の役割ごとの人数を決定した。

4. 数値例

前節で差分方程式系に書き換えた問題を解くために、以下のように各初期値を設定する。

- 1チームの人数を200人とする。実際の試合ではこの人数を攻撃・防御に任意に割り振れるが、以下の検討ではそれぞれに100人ずつ配分する。また防御側のみ役割ごとに人数を細分し、守備の担当を決めておく。以下ではいずれの例とも、 $DK(1):30$ 人, $DC(1):30$ 人, $DU(1):20$ 人, $DB(1):20$ 人とした。
- 試合時間120秒間を10段階に均等に分割し、各時間帯(12秒)内では個々の競技者の役割は一定であるとする。競技者それぞれがその役割を変えるには生理的に考えてこの程度の時間を要すること、また、ある程度時間をかけないと戦闘効果を発揮できないことも考慮してこの単位時間を決定した。

4.1 基本モデル

基本となる各パラメータ値に従って計算した結果を以下に示す。図4は攻撃側の各攻撃段階ごとの人数配分を、図5はその攻撃配分によって生じる防御側の各役割ごとの人数の損耗状況を示している。

攻撃側は最初、全勢力を遊撃として投入し防御陣地の外側の人員の削減に努める。すなわち初期の段階ではキラーやサークルをやっつけることに専念する。この攻撃によりサークルの人数が減少する。引き続く中盤(第2~4段階)ではスクラムや突攻として運用することで、より中心に近い上のりおよび棒持ちに攻撃を加える。これら一連の攻撃員配分結果を見ると、通常の棒倒しの試合に見られる攻撃パターンと同様に、まず、外側に配置された敵に攻撃を仕掛け、次により

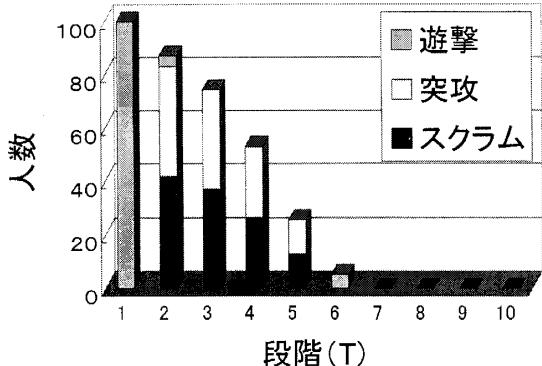


図4 攻撃者内での役割配分（基本モデル）

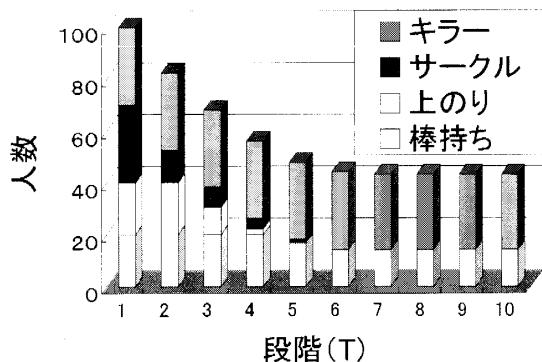


図5 防御役割ごとの人数変化（基本モデル）

防御の中心兵力に対し攻撃を指向させていくという組み立てが認められている点は大変興味深い。ただし、一番外側で防御全般を担っているキラーとの間ではほとんど戦闘が行われず、最後までキラーの人数が減らないのが現モデルでは説明しきれていない点である。

中盤の攻撃で攻撃側は人数を大きく損耗してしまうために、第6段階以降はほとんど攻撃できず、結局、防御の本体である棒持ちの人数の削減には至らない結果となる。中盤でハリキリすぎたために最終的に攻撃に失敗してしまった作戦といえるだろう。

4.2 自由投入モデル

実際の棒倒しの試合では、対戦途中で意図的に、あるいは無意識に攻撃参加をためらっている瞬間が発生する。こうした心理により、競技に参加していない余剰人員が常に存在しうる。攻撃・防御者双方の総人員に関する等式制約を不等式として緩和することで競技に参加していない人数も考慮できるようにした。

その結果、図6の攻撃側の人数が示すように戦闘の最初の段階において開始間もないのに攻撃要員が大幅に減少し、人員をセーブしているような結果が見られた。また、第2段階で顕著であるが、攻撃員は遊撃要員に多く配分される傾向が見られる。突攻やスクラム

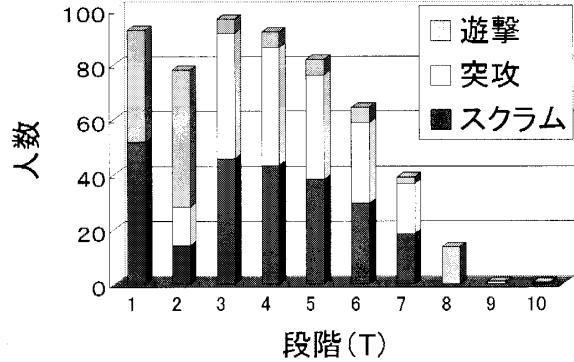


図6 攻撃者内での役割配分（自由投入モデル）

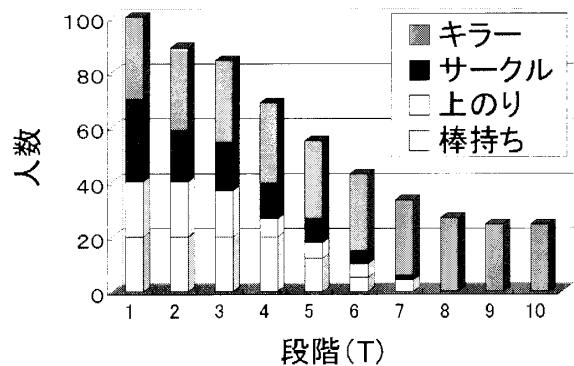


図7 防御役割ごとの人数変化（自由投入モデル）

といった具体的な攻撃対象や攻撃陣形が決まっている運用方法ではなく、攻撃全般を担当する兵力に多く配分されているので、まさに攻撃側が初期段階において自由に攻撃兵力を運用していることがわかる。このモデルでもキラーがほとんど減らないことはうまく説明できていないものの、突攻、スクラムへの兵力集中のタイミングを4.1節の基本モデルよりも1~2段階程度遅らせたことにより防御中心兵力が第6~7段階程度で崩壊することが図7から読み取れる。すなわち、基本モデルと同じ攻撃能力 K_* でありながら、攻撃の初期段階で様子を見つつ、中盤から本格的に攻撃を開始することで、防御本体を最終的に攻略できる作戦がこれら一連の結果より得られることになる。

4.3 損失制限モデル

攻防両者が対戦している1局面を考えた場合、防御者よりも攻撃者の方が広い領域を自由に動き回れるので、防御側から反撃を受ける前に離脱や回避して攻撃側の人数が減少することを防ぐことが可能である。以下ではこうした攻撃側の優位性を考慮して、攻撃側の損失人数の制約式を不等式とすることで、攻撃者数の固定的な損失を緩和した。このように変更した後の計算結果が図8および図9である。

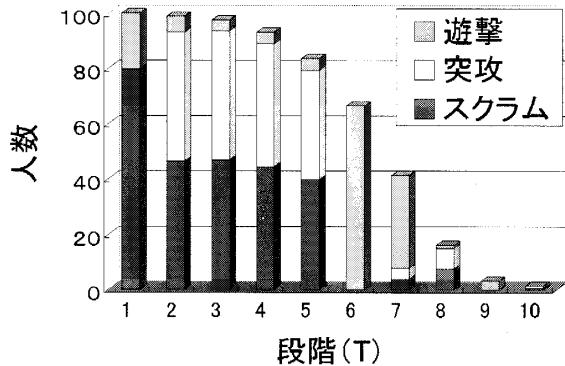


図8 攻撃者内での役割配分（損失制限モデル）

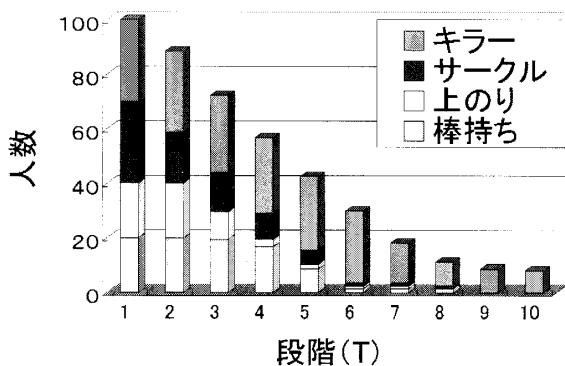


図9 防衛役割ごとの人数変化（損失制限モデル）

前の2つのモデルに比べると全段階を通じて特殊な攻撃兵力の運用が見られる。すなわち、第1段階においては大部分の攻撃員をスクラムとして攻撃参加させている。これは遊撃のように個々にバラけて攻撃するよりも集団攻撃させることで、攻撃側の損失を抑えた戦術と見ることができる。これにより第2~4段階でも前2つのモデルに比べ多数の攻撃員が残り、特攻やスクラムとして組織的な運用が継続されるため、中盤での攻撃員の損失がさらに低く抑えられている。この結果、防御中心兵力は次第に均整がとれて崩れていき、第5~6段階ではほぼ崩壊している。中心兵力崩壊後の第6、7段階では攻撃員は遊撃として再配分され、敬遠してきたキラーに対して指向し、後段でキラーニュの削減に努める組み立てとなっている。このように、このモデルでは損失を回避するために集団としての作戦を優先した結果、最も効率よく防衛側の中心勢力および外側のキラーをも削減できたと思われる。

5. おわりに

本研究では、棒倒しという運動会等でおなじみの団体競技に関して、対戦中の1局面に注目してランチエ

スター モデルを適用して攻防両者の人数の時間的変化の記述を試みた。さらに攻撃側の立場から、細分された各役割への最適な人数配分を求めた。実際の競技では競技中の短時間で攻撃の役割を変更できるわけではなく、また、空間的な配置や攻撃・防御方向等も考慮しなければならないので、現時点では競技の進行を記述できた実用的なモデルというには程遠い。しかし、人間が競技中に意図するようないくつかの心理状況を作為して検討した結果、いずれの例からも、攻撃者の意図を反映しているような、ある程度納得できる攻撃の組み立て方や防衛側の人数減少が確認できた。

同時に、得られた結果だけでは説明し切れない部分もあることが確認された。各数値例とも試合の初期～中期段階ではキラーとの交戦がほとんど行われていないようであり、これは実際の試合ではありえないことである。おそらくキルレートの設定が適当でないために必要以上に敬遠されてしまった結果であり、キルレートの微調整により改善されるとは思うが、今のところ、キルレート自体の定量化方法も含め、体系的なパラメータの調整方法は確立できていない。

攻撃・防衛能力のいずれのキルレート値 K_* の設定に関しても、単に「個人の能力」の積算ではなく、細分化された各役割ごとの「集団の能力」を定量化することが望まれる。また、そのキルレート値は対戦する敵ごとに異なるように適切に設定するべきである。こうした一連の能力値の定量化方法を確立することが今後の課題である。スポーツにおける個人の能力とその相乗効果による集団の能力の定量化方法について何か良いアイデアをご存知の方はぜひご教示願いたい。そうした能力値が適切に設定できるようになれば、初めて本モデルが精緻化できるようになり、実際の棒倒しの試合の作戦構築ツールとして利用可能となるだろう。将来的には、ぜひ、こうした「使えるツール」にまで昇華させ、棒倒しの看板を勝ち取れるだけの情報を提供できるものとしたい。

参考文献

- [1] 第53回開校記念祭学生委員会：“防衛大学校平成17年度開校記念祭パンフレット,” 2005.
- [2] 飯田耕司：“戦闘の科学 軍事ORの理論 捜索理論、射爆理論、交戦理論,” 三恵社, 2005.
- [3] F. W. Lanchester: *Aircraft in Warfare; The Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Company Limited, London, 1916.