サッカーのペナルティキックの最適戦略

太田　雄大，鈴木　敦夫

サッカーのペナルティキック（PK）の最適戦略をゲーム理論の基礎的な手法を用いて求める．キッカーとゴールキーパーの利得行列をPKが成功する確率として，混合戦略とゲームの値を線形計画法を用いて計算する．利得行列の計算には，Jリーグ，日本代表の試合中のPKのデータと，ワールドカップなどの試合でのPK戦のデータを用いた．混合戦略は，キッカーは，試合中のPKでは，ゴールの右下方，左下方（キッカーが右利きの場合），PK戦では，それに加えて，ゴール中央を加えたコースをある確率で狙うこととなった．

キーワード：ペナルティキック，ゲーム理論，混合戦略

1．はじめに

サッカーにおいてペナルティキック（PK）は得点に直接関わっており，試合の勝敗を大きく左右する．サッカーは得点を決めることが難しいスポーツであるが，PKは高確率で得点を決めることができる．1得点で試合の流れが大きく左右するサッカーにおいて，相手チームの反則行為によって得たPKを決めると非常に有利になる．逆にPKをゴールキーパーがセーブすると，試合の流れが大きく変わることもあり，ゴールキーパーにとってもPKをいかにセーブするかは重要な課題である．

また，通常の試合時間中に勝敗が決しなかった場合，両チームが互いに連続してPKを行い，得点を多く決めたチームが勝利するPK戦は，ワールドカップなど大きな国際大会での試合でよく用いられている．PK戦は通常のPKよりも，キッカーとゴールキーパーの駆け引きの要素が強く，ORのテーマとしても非常に興味深い．このように興味深い問題であるにもかかわらず，PKについて，過去に数理的な分析はほとんどなされてこなかった．本論文では，キッカーとゴールキーパーそれぞれにとって有効な戦略を与えるモデルをつくり，データを用いてその戦略を検証する．

おおた　ゆうだい
南山大学 大学院数理情報研究科
すずき　あつお
南山大学 数理情報学部
〒489-0863 瀬戸市せいれい町27

2．問題の設定

ここではゲーム理論を用いたモデルを作成し，PKの最適な戦略を求める方法を提案する．ゲームにおけるプレイヤーをキッカーとゴールキーパーとしてそれぞれの戦略を考え，個々の戦略をどんな確率で行うのが最適か（混合戦略）を求める．キッカーの戦略は，ゴールのどのコースを狙うか，ゴールキーパーの戦略は，ゴールの左右どちらのコースに反応するかとする．キッカーの利得はゴールキーパーの戦略に対しキッカーの戦略を行ったときの成功確率とする．ゴールキーパーの利得は，2人零和ゲームなので（−1）×（キッカーの利得）になる．キッカーの成功確率は，枠内にボールを蹴った場合にゴールキーパーの戦略に対して成功できる確率をキッカーの蹴るコース別に求めたものと，キッカーが枠内にボールを蹴る確率（枠外に外さない確率）との積を計算することで求められる．枠外にボールを外してしまう確率は2次元正規分布を用いて，キッカーがボールを蹴った位置の平均と標準偏差からコース別に求めた．キッカーについては期待利得が最大になるような，ゴールキーパーについては期待利得が最小になるような混合戦略を線形計画法を用いて求める．

本論文でおいた仮定は次のとおりである．

(1) キッカーがボールを蹴るコースをキッカーから見て1（ゴール左上），2（真中上），3（右上），4（左下），5（真中下），6（右下）とする

(2) キッカーは6つのコースの中心を狙って蹴る

(3) キッカーの蹴るボールは2変量正規分布によってばらつく

また，以下では次のような記号を用いる．

(μ_x, μ_y)：キッカーが狙ったコースの中心の座標

$\sigma_x(\sigma_y)$：キッカーが(μ_x, μ_y)を狙ってボールを蹴ったときの$x(y)$座標の標準偏差

i：キッカーがボールを蹴るコース$(i=1, 2, \cdots, 6)$

j：ゴールキーパーが反応するケース$(j=1, 2, 3, 4)$（ゴールの裏側から見て，それぞれ右，左，逆方向に反応し直す，中央）

x_i：キッカーがコースiにボールを蹴る確率

y_j：ゴールキーパーがケースjを選択する確率

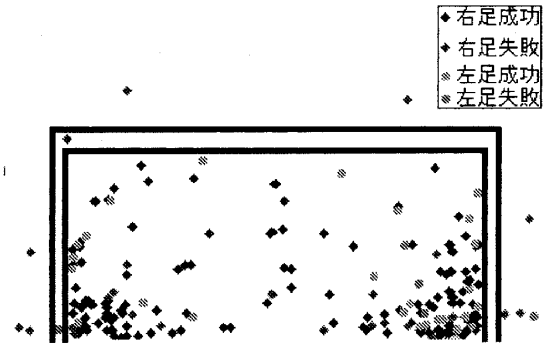
c_{ij}：キッカーがコースiにボールを蹴って，ゴールキーパーがケースjを選択した場合のゴールする確率（利得）

本論文で用いたデータは以下の2つである．これらをデータI，データIIと呼ぶことにする．データIは，Jリーグの試合中，及び，日本代表の試合で，試合中に起こったPKについて，Jスタッツオプタ事務局がデータを収集し，電子化したものである[1]．データ総数195（キッカーが右利き154，左利き41）で，内容は以下のようである．

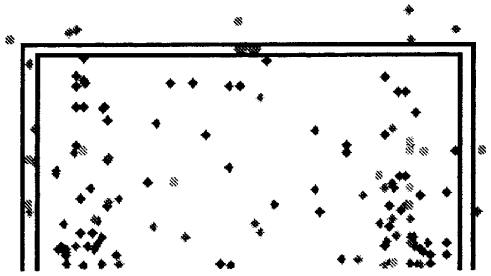
・成功/失敗（2000年～2004年）

・キッカーの利き足（2000年～2004年）

・キッカーが蹴ったボールの位置座標（図3を参照，2000年～2004年）



(a) データI



(b) データII

図1 キッカーがボールを蹴った位置（太線はゴールの枠を表す）

・ゴールキーパーの動き（2003年～2004年）

データIIは，世界の国際大会（ワールドカップなど）のPK戦13試合分のビデオからデータを収集し自己作成した．データ総数は146（キッカーが右利き131，左利き15）で，内容はデータIと同じである．図1はキッカーがボールを蹴った位置をデータI，データIIについてプロットしたものである．分布にほとんど差はないが，しいて言うならば，データIIのほうが，ゴールの上部をねらったキックが多いように見える．

3. キッカーが枠外にボールを外す確率

キッカーが(μ_x, μ_y)を狙ってキックした時に，ボールのばらつきは以下の2変量正規分布に従うとする[3]．

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\}\right] \tag{1}$$

ゴールの枠については図2のように座標を設定し，キッカーがボールを枠外に外す確率をコース別に求めた．σ_x, σ_yはデータから推定値を求めた．以下にコース1について，計算方法を示す．

キッカーがコース1を狙ってボールを蹴った場合に枠外に外す確率は，図2の座標系で，以下の3つの領域についての積分を計算することによって求められる．

領域$D_1=\{(x, y): -\infty<x\leq-115, -\infty<y<+\infty\}$

領域$D_2=\{(x, y): -\infty<x\leq+\infty, -\infty<y<-8\}$

領域$D_3=\{(x, y): -\infty<x\leq-115, -\infty<y<-8\}$

これらの領域について計算した，

$$\iint_{D_1} f(x, y)dxdy+\iint_{D_2} f(x, y)dxdy-\iint_{D_3} f(x, y)dxdy$$

が求める確率である．以下他のコースについても同様

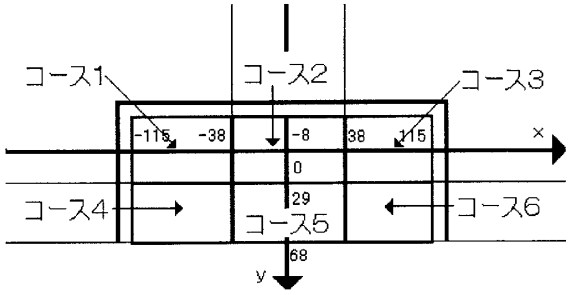


図2 ゴールのコース分けに用いる座標系

に求められる．ただし，コース5はゴール中央の下側のコースなので枠外に外す確率は0とする．

枠外に外す確率はMathematica 5.1を用いて計算した．キッカーが枠内に蹴る確率は（1－枠外に外す確率）でコース別にそれぞれ計算できる．

4. ゲーム理論を用いたモデル

ゲーム理論により，キッカーとゴールキーパーの2人零和ゲーム[2]を考える．キッカーがどのコースにどんな割合で蹴るのが最適か，ゴールキーパーがどの方向にどんな割合で反応するのが最適かの混合戦略を求める．この計算のために，次のようなモデル化をした．

キッカーの期待利得を

$$w_K=\max_{x_i,i=1,\cdots,6}\{w_k(x_1,x_2,\cdots,x_6)\}$$
$$=\max_{x_i,i=1,\cdots,6}\left\{\min_{j\in(1,\cdots,4)}\left\{\sum_{i=1}^{6}c_{ij}z_i\right\}\right\} \tag{2}$$

ゴールキーパの期待利得を

$$w_G=\min_{y_j,j=1,\cdots,4}\{w_g(y_1,y_2,\cdots,y_4)\}$$
$$=\min_{y_j,j=1,\cdots,4}\left\{\max_{i\in(1,\cdots,6)}\left\{\sum_{j=1}^{4}c_{ij}y_j\right\}\right\} \tag{3}$$

としたとき，ミニマックス定理より，$w_K=w_G$となるような最適な混合戦略x_iとy_jが存在する．

キッカーがコースiを選択しゴールキーパーがケースjを選択した時のゴールする確率c_{ij}（利得）は[ゴールキーパーのケース別，ゴールのコース別のキッカーの成功率]×[キッカーが枠外にボールを外さない確率(コース別)]で求める．ゴールキーパーのケース別，ゴールのコース別のキッカーの成功率はデータから推定できる．

キッカーにとっての最適な混合戦略を求める線形計画問題は次のようになる．

[LP 1] $\max \quad w_k$

制約条件：$\sum_{i=1}^{6}c_{ij}x_i\geq w_k,\quad j=1,2,3,4$

$\sum_{i=1}^{6}x_i=1$

$x_i\geq 0,\quad i=1,2,3,4,5,6$

ゴールキーパーにとっての最適な混合戦略を求める線形計画問題は次のようになる．

[LP 2] $\min \quad w_g$

制約条件：$\sum_{j=1}^{4}c_{ij}y_i\leq w_g,\quad i=1,2,3,4,5,6$

$\sum_{j=1}^{4}y_j=1$

$y_j\geq 0,\quad j=1,2,3,4$

LP 1の最初の制約条件式の両辺をw_kで割り，$X_i\equiv\frac{x_i}{w_k}$とおくと次のようになる（w_kは正（c_{ij}がすべて正より）なので不等号の向きは変わらない）．

$$\sum_{i=1}^{6}c_{ij}X_i\geq 1\quad(j=1,2,3,4) \tag{4}$$

また$X_i\equiv\frac{x_i}{w_k}$であるから，

$$\sum_{i=1}^{6}X_i=\sum_{i=1}^{6}\frac{x_i}{w_k}=\frac{1}{w_k} \tag{5}$$

となる．ゆえに

$$\max w_k\Leftrightarrow\min\frac{1}{w_k}=\min\sum_{i=1}^{6}X_i. \tag{6}$$

（ただし $w_k\neq 0$）

したがって，LP 1は次のように変換される．

[LP 1′] $\min \quad \sum_{i=1}^{6}X_i$

制約条件：$\sum_{i=1}^{6}c_{ij}X_i\geq 1,\quad j=1,2,3,4$

$X_1,X_2,\cdots,X_6\geq 0.$

また，LP 2についても同様に最初の制約条件をw_gで割り，$Y_j\equiv\frac{y_j}{w_g}$とおけば次のように変換される．

[LP 2′] $\max \quad \sum_{j=1}^{4}Y_j$

制約条件：$\sum_{j=1}^{4}c_{ij}Y_j\leq 1,\quad i=1,2,\cdots,6$

$Y_1,Y_2,Y_3,Y_4\geq 0.$

5. 計算結果

5.1 データIの結果　キッカー右利きの場合

データ1のJリーグのリーグ戦，日本代表の試合におけるペナルティキックでのキッカー，ゴールキーパーの最適な混合戦略を考える．キッカーがボールをコース2,5（中央）に蹴るデータがデータIでは少ないので，キッカーの戦略は2,5を省き1（左上[コース1]），2（右上[コース3]），3（左下[コース4]），4（右下[コース6]）として検証する．ゴールキーパーは定義どおりの戦略を行う．すると利得表は表1のようになる．

この利得表によると，キッカーにとっての変換された線形計画問題LP 1′は次のようになる．

$\min \quad \sum_{i=1}^{4}X_i$

制約条件：

表1　利得表：データI（キッカー右利きの場合）

		キーパー			
		1	2	3	4
キッカー	1	0.707	0.707	0.707	0.707
	2	0.619	0.619	0.619	0.619
	3	0.639	0.852	0.767	0.852
	4	0.890	0.641	0.890	0.890

$$0.707X_1+0.619X_2+0.639X_3+0.890X_4\geq 1$$
$$0.707X_1+0.619X_2+0.852X_3+0.641X_4\geq 1$$
$$0.707X_1+0.619X_2+0.767X_3+0.890X_4\geq 1$$
$$0.707X_1+0.619X_2+0.852X_3+0.890X_4\geq 1$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4\geq 0$$

そしてゴールキーパーにとっての変換された線形計画問題LP 2′は次のようになる．

$$\max \sum_{j=1}^{4} Y_j$$

制約条件：

$$0.707Y_1+0.707Y_2+0.707Y_3+0.707Y_4\leq 1$$
$$0.619Y_1+0.619Y_2+0.619Y_3+0.619Y_4\leq 1$$
$$0.639Y_1+0.852Y_2+0.767Y_3+0.852Y_4\leq 1$$
$$0.890Y_1+0.641Y_2+0.890Y_3+0.890Y_4\leq 1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\geq 0$$

これを数理計画法のパッケージソフトウェアVisual XPRESS 3.0を用いて解くと

$$X_1=X_2=0,\quad X_3=0.714,\quad X_4=0.610$$
$$\sum_{i=1}^{4} X_i=1.324$$

よって，キッカーの最適な混合戦略は$x_1=x_2=0$, $x_3=0.54$, $x_4=0.46$になる．同様に，

$$Y_1=0.605,\ Y_2=0.719,\ Y_3=0,\ Y_4=0$$
$$\sum_{j=1}^{4} Y_j=1.324$$

よって，ゴールキーパーの最適な混合戦略は$y_1=0.46$, $y_2=0.54$, $y_3=0$, $y_4=0$になり，ゲームの値は$w_K=w_G=0.7553$と求まる．以上の結果は，ミニマックス定理を満足していることが容易に確かめられる．

5.2　データIの結果　キッカー左利きの場合

キッカーも右利きのキッカーと同様の戦略を取る．利得表は表2のようになる．右利きの場合と同様に解くと

$$X_1=0,\ X_2=1.2706,\ X_3=0,\ X_4=0$$
$$\sum_{i=1}^{4} X_i=1.2706$$

表2　利得表：データI（キッカー左利きの場合）

		キーパー			
		1	2	3	4
キッカー	1	0.780	0.780	0.780	0.780
	2	0.787	0.787	0.787	0.787
	3	0.762	0.762	0.762	0.762
	4	0.872	0.523	0.697	0.872

表3　利得表：データII（キッカー右利きの場合）

		キーパー			
		1	2	3	4
キッカー	1	0.732	0.814	0.814	0.814
	2	0.593	0.742	0.742	0.148
	3	0.785	0.589	0.785	0.785
	4	0.516	0.959	0.959	0.959
	5	0.666	1.000	1.000	0.000
	6	0.963	0.631	0.866	0.963

よって，キッカーの最適な混合戦略は$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$になる．同様に，

$$Y_1=0,\ Y_2=0,\ Y_3=1.2706,\ Y_4=0$$
$$\sum_{j=1}^{4} Y_j=1.2706$$

よって，ゴールキーパーの最適な混合戦略は$y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=1$, $y_4=0$になり，ゲームの値は$w_k=w_g=0.7870$である．

5.3　データの結果　キッカー右利きの場合

データIIのワールドカップやヨーロッパ選手権など国際大会におけるPK戦でのキッカー，ゴールキーパーの最適な混合戦略を考える．キッカー，ゴールキーパー共に定義どおりの戦略を取る．利得表は表3のようになる．この利得表による線形計画問題LP 1′をVisual XPRESS 3.0を用いて解くと，

$$X_1=X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0.346,$$
$$X_5=0.230,\ X_6=0.694$$
$$\sum_{i=1}^{6} X_i=1.270$$

となる．よって，キッカーの最適な混合戦略は$x_1=x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0.27$, $x_5=0.18$, $x_6=0.55$になる．同様にLP 2′を解くと，

$$Y_1=0.492,\ Y_2=0.672,\ Y_3=0,\ Y_4=0.106$$
$$\sum_{j=1}^{4}=Y_j=1.270$$

となる．よって，ゴールキーパーの最適な混合戦略は$y_1=0.39$, $y_2=0.53$, $y_3=0$, $y_4=0.08$になり，ゲーム

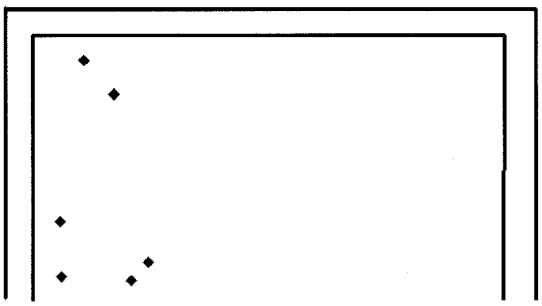


図3　ツット選手（大宮アルディージャ）がPKを蹴った位置（太線はゴールの枠を表す）

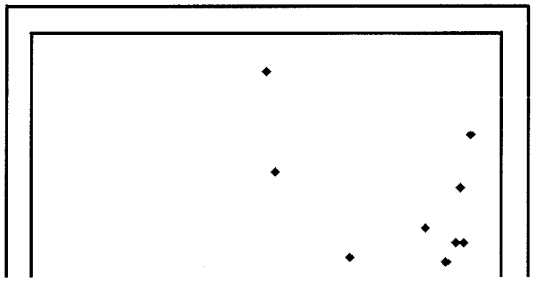


図4　グラウ選手（横浜マリノス）がボールを蹴った位置（太線はゴールの枠を表す）

の値は $w_k = w_g = 0.787$ と求まる．

6.　まとめと今後の課題

Jリーグや日本代表の国際試合の試合中のPKにおいて，キッカーがどのコースを狙えばゴールする可能性が高いかを検証した結果，右利きのキッカーの場合ゴールの左下のコースを46%，右下のコースを54%の確率で狙うことが最適と計算された．ゴールキーパーについてはゴールの裏側から見て右方向に46%，左方向に54%の確率で反応すると最適と計算された．左利きのキッカーの最適な戦略は右上のコースを狙うのが最適だという結果になった．また，ゴールキーパーの最適な戦略は「逆方向に反応しなおす」だった．これらの結果はデータが少なかったことが原因かもしれない．今後，さらにデータを蓄積して検証する必要がある．

また国際大会でのPK戦においては，右利きのキッカーはゴールの左下の方向を27%，中央下を18%，右下の方向を55%の確率で狙うことが最適で，ゴールキーパーは右方向に39%，左方向に53%，中央に8%の確率で反応することが最適だとわかった．Jリーグや，日本代表のPKの戦略と異なっていることが興味深い．

これらの結果を解釈すると，キッカーはゴールの枠内高めのコースに狙えば，キーパーに防がれる可能性

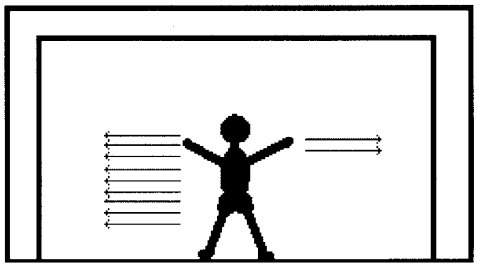


図5　水谷雄一選手（アビスパ福岡）が反応した方向（太線はゴールの枠を表す）

はかなり低いが，一方で，ゴールポストやゴールの枠外にボールが外れる確率は高くなる．したがって，全体を見ても左右低めのコースを狙うことが最適であることがわかった．また中央のコースを狙うことはリスクは高いように思われるが，ゴールキーパーはキッカーがボールを蹴る瞬間に多くの場合，左右どちらかに動き出すので，思ったより成功する確率が高く，中央も有効な戦略に入ることがわかった．

現在のデータでは，選手個々の対戦やチームの対戦をデータ不足から検証できないが，個々のデータを見ると選手によっては上で求めた最適戦略とは大きく異なる傾向があった（図3，4，5）．今後，データを蓄積し，研究を進めていくとPKの戦略が大きく変わる可能性もあろう．

7.　おわりに

本研究では，サッカーのPKにおいてのキッカー，ゴールキーパーの最適な戦略をゲーム理論の基礎的な手法を用いて求めた．Jリーグ，日本代表の国際試合中のPK，ワールドカップなどの国際試合でのPK戦で，いずれもキッカーが右利きの場合の最適戦略は，一応，妥当な結果のようである．さらにモデルの精度を高めるには，より多くのデータが必要である．また特定のキッカー対ゴールキーパーの対戦での最適な戦略も，今後のデータの蓄積を待って解析すれば，大変に興味深く，また実戦でも有効であろう．

本研究によってPKに関心を持ち，実際の試合でのPKを観て楽しんで頂けたら幸いである．さらに，JリーグでのPKや国際大会におけるPK戦で本研究の結果を活用し，日本サッカーの水準向上に役立てることができればと一サッカーファンかつOR研究者として望むものである．

参考文献

[1] Jスタッツオプタ事務局：Jリーグのリーグ戦におけ

るPKのデータ：

・成功/失敗（2000年～2004年）

・左足/右足（2000年～2004年）

・ゴール枠位置（2003年～2004年）

・ゴールキーパーの動き（2003年～2004年）

[2] 小和田正，澤木勝茂，加藤豊：OR入門-意思決定の基礎（実教出版，1984），第5章，決定分析とゲームの理論，pp. 104-111.

[3] 白旗慎吾：統計解析入門（共立出版，1992），第3章，確率分布，p. 72.