

W 杯地域出場枠の競争的配分

中村 義人, 田村 亮, 関谷 和之

W 杯の地域ブロックの割当出場枠を各国代表チームの強さのランキングに基づき, ランキングへの整合性と競争的(民主的)配分との観点から議論する。各国代表チームのランキングはFIFA公表のランキングを用いるとともに, 独自に集計したデータから Bradley-Terry model に基づき最尤法と最小 χ^2 乗法で導出したランキングを用いる。第18回 W 杯後, オーストラリアがアジア地域に加入することが決定している。オーストラリアのアジア加入で生じる地域ブロック再編にともなう出場枠に関して述べる。

キーワード: ワールドカップ, Bradley-Terry model, 最尤法, 最小 χ^2 乗法, 資源配分, FIFA ランキング

1. はじめに

いよいよ, 4年に1度開催されるサッカーワールドカップ(W杯)本大会がドイツで6月9日からはじまる。開幕せまる第18回W杯では, 予選参加のチーム数は197を数え, 各地域ブロックの予選を勝ち抜いた31ヶ国のチームと開催国ドイツ, 計32チームが本大会に出場する。W杯開催は最近4年間における世界一のチームを決定するとともに, 世界のあらゆる地域でのサッカーの普及と技術向上を目的とする。

ドイツW杯本大会に出場する32チームの内訳はヨーロッパ(欧洲)から14チーム, アジアから4チーム, 北中米から4チーム, 南米から4チーム, アフリカから5チーム, オセアニア(豪州)から1チームである。欧洲を含むこの6つの地域ブロックに対して, FIFAが当初割当てた出場枠(FIFA割当枠)は欧洲に14, アジアに4.5, 北中米に3.5, 南米に4.5, 豪州に0.5, そしてアフリカに5であった。FIFA割当枠の端数0.5は2つの地域ブロックで行われる地域ブロック間プレーオフでの対戦結果で切り捨て, 切り上げされる。つまり, このプレーオフで勝利した地域ブロックはそのFIFA割当枠+0.5, 敗れた地域ブロックはそのFIFA割当枠-0.5となる。今回はアジアと北中米との地域ブロック間予選, 南米と豪州との地域

ブロック間プレーオフを行い, その結果, 北中米と豪州それぞれがFIFA割当枠+0.5となった。

地域ブロックの割当出場枠は各国の「強さ」の要因だけで決定するものではないようだ。しかし, 枠数決定において「強さ」の要因により勝る要因は他に見当たらない。そこで, 本報告では, 「強さ」を基準にして, 地域ブロック毎の出場枠に関して検討する。具体的には, 第1にサッカーの各国代表チームの「強さ」を過去の対戦成績により2つの測定法で評価する。第2に, 「強さ」から得た各国のランキングとFIFA公表のランキングを用いて地域別ブロックの出場枠をランキングへの整合性と競争的(民主的)配分との観点から議論する。第18回W杯後, オーストラリアがアジア地域に加入することが決定している。最後にオーストラリアのアジア加入で生じる地域ブロック再編にともなう出場枠に関して述べる。

2. 強さの測定

2.1 Bradley-Terry モデルと適合度

m チームが何度か対戦した結果から各チームの勝つ確率を求めるモデルとして, Bradley-Terry モデル[1~5]が広く知られている。ここでは, チームの強さを勝つ確率の大きさとして見なす。Bradley-Terry モデル(BT モデル)では, 各チーム i に対してそのチームの強さを示す真値 w_i が存在し, チーム i がチーム j に勝つ確率 p_{ij} は

$$\frac{w_i}{w_i + w_j} \quad (1)$$

であると想定する。チーム (i, j) 間の対戦が $n_{ij}(=$

なかむら よしと
静岡大学 大学院理工学研究科
たむら りょう
静岡大学 大学院工学研究科
せきたに かずゆき
静岡大学 工学部
〒432-8561 浜松市城北3-5-1

n_{ji} 試合あり、チーム j に対するチーム i の勝ち数を確率変数 X_{ij} とするならば、

$$\Pr(X_{ij}=x_{ij})=\binom{n_{ij}}{x_{ij}}\left(\frac{w_i}{w_i+w_j}\right)^{x_{ij}}\left(\frac{w_j}{w_i+w_j}\right)^{n_{ij}-x_{ij}} \quad (2)$$

である。ただし、引き分けは無いものとする。このとき、 $X_{ij}(i, j=1, \dots, m)$ に対して、

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j < i} \frac{\left(X_{ij} - n_{ij} \frac{w_i}{w_i + w_j}\right)^2}{n_{ij} \frac{w_i}{w_i + w_j}} + \frac{\left(X_{ji} - n_{ji} \frac{w_j}{w_i + w_j}\right)^2}{n_{ji} \frac{w_j}{w_i + w_j}} \quad (3)$$

は $n_{ij} \rightarrow \infty$ で自由度 $m(m-1)/2$ の χ^2 分布に近づく。そして、 $X_{ij}=x_{ij}$ とした(3)は $w=(w_1, \dots, w_m)$ に対する対戦結果 $x_{ij}(i, j=1, \dots, m)$ の適合度（ピアソンの適合度）を示す指標[7, 12]として知られている。

2.2 BT モデルに対する最尤法と最小 χ^2 法

$\{p_{ij}\}$ の同時確率から以下の尤度関数を得る。

$$L(w)=\prod_{i=1}^m \prod_{j < i} \binom{n_{ij}}{x_{ij}} \prod_{i=1}^m (w_i + w_j)^{-n_{ij}} \prod_{i=1}^m w_i^{t_i} \quad (4)$$

ただし、 $t_i = \sum_{j \neq i} x_{ij}$ である。対数変換した尤度関数(4)を最大化する w は以下の方程式

$$\sum_{j \neq i} \frac{n_{ij}}{w_i + w_j} = \frac{t_i}{w_i} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (5)$$

を満たし、その逆も成立する。BT モデルに対する最尤推定値は(5)を解くことで得られる。(5)の求解に関しては[4, 6]に詳しい。

最小 χ^2 推定値[7, 8]は $X_{ij}=x_{ij}$ とした(3)を最小化することで求められる。 $n_{ij}=n_{ji}$, $x_{ij}+x_{ji}=n_{ij}$, $w_i/(w_i+w_j)+w_j/(w_i+w_j)=1$ に注意して $X_{ij}=x_{ij}$ とした(3)を整理すると、以下の式を得る。

$$f(\mathbf{w})=\sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i} \frac{x_{ij}^2}{n_{ij}} \frac{w_j}{w_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j < i} \left(\frac{x_{ij}^2}{n_{ij}} + \frac{x_{ji}^2}{n_{ij}} - n_{ij} \right)$$

つまり、 $X_{ij}=x_{ij}$ とした(3)の最小化は $f(\mathbf{w})$ の最小化である。 $f(\mathbf{w})$ の最小解はスカラ一倍を除いて一意である。さらに、 $f(\mathbf{w})$ の最小解は以下の方程式

$$\sum_{j \neq i} \frac{x_{ij}^2}{n_{ij}} \frac{w_i}{w_j} = \sum_{j \neq i} \frac{x_{ji}^2}{n_{ij}} \frac{w_j}{w_i} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (6)$$

を満たし、その逆も成立する[10]。(6)の求解には[9, 11, 12]等のアルゴリズムを用いればよい。

3. 強さ推定のための対戦データ

2001 年 1 月 1 日～2005 年 12 月 31 日での FIFA 加盟チーム数¹ は 205 であり、アジアは 44 チーム、アフリカは 52 チーム、北中米は 35 チーム、南米は 10 チーム、豪州は 12 チーム、欧洲は 52 チームである。

この期間中に実施された試合で全戦全敗したチームはグアム、サントメプリンシペ、ジブチ、米領バージン諸島、アルバ、モンセラット、タークスカイコス諸島、米領サモアの 8 チームであった。この 8 チームを除く 197 チームの全 4,338 試合の対戦成績を以下の 3 カテゴリ別に <http://www.fifa.com> から集計した。

カテゴリ A 2002 年 W 杯：参加チーム数は 32 で出場国は表 1。全試合数は 64。

カテゴリ B 2001, 2003, 2005 年 コンフェデ杯：参加チーム数は各 8 で出場国は表 2。全試合数は各 16。カテゴリ C その他：アジアカップ等などのカップ戦、親善試合を含む。全試合数は 4,226。

全 4,338 試合の中、最多同一カードはケニア対ウガンダとグアテマラ対エルサルバドルそれぞれで 10 試合あった。一方、対戦カード無しは 17,103 で、1 試合以上の対戦カードありは 2,203 であった。

表 1 2002 年ワールドカップ出場国

地域	国名
アジア	日本、韓国、中国、サウジアラビア
アフリカ	カメルーン、ナイジェリア、セネガル 南アフリカ、チュニジア
北中米	メキシコ、アメリカ、コスタリカ
南米	ブラジル、アルゼンチン、エクアドル パラグアイ、ウルグアイ
豪州	なし
欧洲	フランス、スペイン、イングランド イタリア、ポルトガル、ドイツ スウェーデン、ベルギー、ロシア クロアチア、デンマーク、アイルランド ポーランド、スロバキア、トルコ

太字は優勝国

表 2 コンフェデ杯出場国

地域	2001 年	2003 年	2005 年
アジア	日本 韓国	日本	日本
アフリカ	カメルーン	カメルーン	チュニジア
北中米	カナダ メキシコ	アメリカ	メキシコ
南米	ブラジル	ブラジル コロンビア	ブラジル アルゼンチン
豪州	オーストラリア	ニュージーランド	オーストラリア
欧洲	フランス	フランス	ドイツ トルコ

太字は優勝国

¹ 加盟は国単位ではなく、サッカー協会単位である。イギリスのように 3 協会登録する国もある。しかし、わかり易さのために、1 協会を 1 カ国と呼ぶ。

対戦結果については、『勝ち』『負け』『引き分け』の3通りとした。1試合90分間もしくは延長戦での勝利は『勝ち』、1試合90分間もしくは延長戦での敗北は『負け』、1試合90分間もしくは延長戦で試合終了となり同点の場合とPK戦で決着がついた場合は両者『引き分け』とする。

4. 推定ランキングとFIFAランキング

3つのカテゴリのどの試合も同一と見なして、3カテゴリの全試合結果を合算した対戦表から最尤法、最小 χ^2 法による推定ランキング（上位32チーム）を表3に示す。なお、引き分けは0.5勝0.5敗とみなした。本対戦成績の結果に基づいてBTモデルの成立を検定することは適当ではない。なぜならば、本対戦成績には $n_{ij}=0, 1$ が多数存在するからである。たとえ、対戦結果が検証可能であるデータ数であって、かつBTモデル成立という検定の結果が得られたとしても、

表3 推定した強さと順位付け（上位32ヶ国）

順位	最尤法 国名	強さ	最小 χ^2 法 国名	強さ
1	フランス	3.47	スペイン	2.45
2	スペイン	3.43	オランダ	2.23
3	オランダ	3.12	アルゼンチン	2.21
4	チェコ	3.09	フランス	2.15
5	イギリス	2.92	チェコ	2.00
6	アルゼンチン	2.75	イギリス	1.97
7	デンマーク	2.47	アイルランド	1.81
8	イタリア	2.45	イタリア	1.78
9	アイルランド	2.43	デンマーク	1.74
10	ポルトガル	2.20	ポルトガル	1.62
11	ブラジル	2.07	ブラジル	1.62
12	ドイツ	1.95	ドイツ	1.56
13	クロアチア	1.71	クロアチア	1.46
14	ギリシャ	1.57	ルーマニア	1.36
15	スウェーデン	1.56	ギリシャ	1.35
16	ルーマニア	1.53	アメリカ	1.33
17	ポーランド	1.48	ポーランド	1.33
18	カメルーン	1.42	カメルーン	1.29
19	アメリカ	1.41	スウェーデン	1.23
20	トルコ	1.41	セネガル	1.21
21	日本	1.41	トルコ	1.21
22	メキシコ	1.30	コートジボアール	1.15
23	ベルギー	1.27	ベルギー	1.14
24	ノルウェー	1.23	日本	1.13
25	セネガル	1.19	ブルガリア	1.12
26	ブルガリア	1.17	ノルウェー	1.10
27	コロンビア	1.15	メキシコ	1.10
28	ウルグアイ	1.14	チュニジア	1.07
29	コートジボアール	1.10	ウルグアイ	1.05
30	ナイジェリア	1.09	オーストラリア	1.03
31	チュニジア	1.06	パラグアイ	0.99
32	パラグアイ	1.02	コロンビア	0.99

積極的に表3の2つのランキングの結果を受け入れることには抵抗があるだろう。なぜならば、いくつかのチームにとっては異なる推定順位を与える。しかも、ブラジルが両ランキングで11位である。著者等が工業都市浜松で数多くの日系ブラジル人と生活をともにするから、ブラジルの11位に疑問を持つわけではない。ブラジルはロベルトカルロス等の多くのスター選手を抱え、表1, 2に示したように前回のW杯、コンフェデ杯での優勝の実績がある。

式(3)で与えた関数 $f(\mathbf{w})$ ではW杯の決勝戦の結果と親善試合での1戦の結果を同等に扱っている。そこで、A, B, Cの試合カテゴリ毎に式(3)を係数5, 3, 1で加重和した関数

$\hat{f}(\mathbf{w}) = \{A\text{の}(3) \times 5\} + \{B\text{の}(3) \times 3\} + \{C\text{の}(3)\}$ (7)を導入する。関数 $f(w)$ に重み係数導入した関数 $\hat{f}(w)$ を最小化することは係数5に対応する試合結果と推定値の差を係数3, 1に対するその差より優先的に最適化することであり、試合カテゴリA, B, Cの順で試合結果をできるだけ尊重する推定値を求める事になる。これを重付 χ^2 法と呼ぶ。重付 χ^2 法と2005年12月末のFIFAランキングを上位32チームについて表4に与える。

FIFAのランキングシステムでは、過去8年間の対戦成績からある算定方法に基づいて順位付けを行う。2005年12月末であれば、2002年W杯と1998年W杯（フランス大会）の対戦成績が加味されている。現代表のチームの強さを測定するには対戦成績を過去8年間を対象にする事は長すぎる。なぜならば、1998年W杯の日本代表のキャプテンであった井原は引退し、日本最初のW杯得点者である中山は残念ながら現代表メンバーではない。8年前の代表メンバーと現代表メンバーは大きく変化した。そして何よりもチームカラーを決定付ける監督が岡田、トルシエ、ジーコに移り変わった。

表4で示したFIFAランキングでは日本は15位である。これは出来過ぎの感を抱く人も多いだろう。W杯開催国のドイツの順位は日本より低い。この点に著者が疑問を抱くのは2002年W杯ドイツ対カ梅ルーン戦でドイツの質実剛健なサッカーを静岡エコパスタジアムで目の辺りにしたからではない。日本代表のフォワードである高原はドイツの名門チームハンブルグSVでは補欠である。ドイツ代表の現役選手がJリーグで補欠であったことはない。一方、重付 χ^2 法ではドイツは日本の上位であり、ブラジルはベスト3

表4 FIFA ランキングと重付 χ^2 法

順位	FIFA ランキング	重付 χ^2 法	国名	強さ
1	ブラジル	840	スペイン	2.53
2	チェコ	796	オランダ	2.17
3	オランダ	791	ブラジル	2.15
4	アルゼンチン	772	イギリス	2.04
5	メキシコ	768	チェコ	2.00
6	スペイン	768	フランス	1.96
7	フランス	768	アルゼンチン	1.94
8	アメリカ	767	ドイツ	1.93
9	イギリス	757	デンマーク	1.81
10	ポルトガル	754	アイルランド	1.84
11	トルコ	748	トルコ	1.45
12	イタリア	741	イタリア	1.43
13	デンマーク	733	セネガル	1.43
14	スウェーデン	732	ポルトガル	1.34
15	日本	715	カメルーン	1.33
16	ドイツ	708	ルーマニア	1.30
17	ギリシャ	708	日本	1.28
18	ウルグアイ	706	アメリカ	1.27
19	イラン	703	スウェーデン	1.26
20	クロアチア	701	メキシコ	1.25
21	コスタリカ	699	クロアチア	1.23
22	ボーランド	696	ギリシャ	1.22
23	カメルーン	695	韓国	1.20
24	コロンビア	692	ボーランド	1.20
25	ナイジェリア	692	ベルギー	1.14
26	アイルランド	692	コートジボアール	1.14
27	ルーマニア	686	ブルガリア	1.13
28	チュニジア	685	オーストラリア	1.12
29	韓国	680	ノルウェー	1.08
30	セネガル	672	ウルグアイ	1.08
31	パラグアイ	672	コロンビア	1.01
32	エジプト	665	イラン	1.01

にランクした。

(7)の係数を(5, 3, 1)から(9, 3, 1)に変えると、試合カテゴリ A が重要視されブラジルが1位になり、韓国も17位に上昇する。個々の国の順位については個々人の思いがあり、唯一つに決定することは困難であろう。係数の与え方で各国の順位は変化する。そのため、どのような係数の与え方が妥当なのかは多くの議論を要するであろう。本研究では、係数の与え方にこれ以上立ち入らない。

5. ランキングと地域ブロック出場枠

各国の「強さ」の実態を表3, 4で与えた4つのランキングが表現していると仮定する。その仮定下で、FIFA が6地域ブロックに割当た出場枠アジア=4.5, アフリカ=5, 北中米=3.5, 南米=4.5, 豪州=0.5, 欧州=14の妥当性について検討する。

表3, 4の各種ランキングに現れる地域ブロック別チーム数、FIFA が割当てた地域ブロック毎の出場枠

表5 上位32チーム中の地域別チーム数

	アジ ア	アフ リカ	北 米	中 米	南 米	豪 州	欧 州
最尤法	1	5	2	5	0	19	
最小 χ^2 法	1	4	2	5	1	19	
FIFA	3	5	3	5	0	16	
重付 χ^2 法	3	3	2	4	1	19	
FIFA 割当枠	4.5	5	3.5	4.5	0.5	14	
出場国数	4	5	4	4	1	14	

(FIFA 割当枠)，本大会へ出場する地域ブロック毎のチーム数（出場国数）を表5に示す。アジアに対しては、FIFA 割当枠（出場国数）を超えるような地域ブロック別チーム数を4つのランキングいずれからも得ることはない。北中米に対してもFIFA 割当枠と出場国数を超えるような地域ブロック別チーム数をいずれのランキングからも得られない。つまり、アジアと北中米のFIFA 割当枠（出場国数）は過大評価である。一方、欧洲に対してはFIFA 割当枠（出場国数）を下回るような地域ブロック別チーム数をいずれのランキングからも得ることはなく、欧洲のFIFA 割当枠（出場国数）である14チームは過小評価である。

ここで、ベスト32に占める地域ブロック毎のチーム数に比例して出場枠が決定されるべきということを緩めてみよう。つまり、ベスト32からベスト α (≥ 33) とし、ベスト α 以内に占める地域ブロック毎のチーム数に比例して出場枠が決定されるべきとして考えよう。

あるランキングでのベスト α において、アジアの推定出場枠 S_{Asia}^{α} を

$$32 \times \frac{\text{ベスト } \alpha \text{ 以内のアジア所属のチーム数}}{\alpha} \quad (8)$$

とする。(8)と同様にして、アフリカの推定出場枠 $S_{\text{Africa}}^{\alpha}$ 、北中米の推定出場枠を $S_{\text{North America}}^{\alpha}$ 、南米の推定出場枠 $S_{\text{South America}}^{\alpha}$ 、豪州の推定出場枠 $S_{\text{Australia}}^{\alpha}$ 、欧洲の推定出場枠 $S_{\text{Europe}}^{\alpha}$ をそれぞれ定義する。ベスト $\alpha = 205$ (FIFA 加盟全チーム数) にまで緩和すると、いかなるランキングでも(4つのランキングに限らず)

$$\begin{aligned} S_{\text{Asia}}^{205} &= 6.90, \quad S_{\text{Africa}}^{205} = 8.16, \\ S_{\text{North America}}^{205} &= 5.49, \quad S_{\text{South America}}^{205} = 1.57, \\ S_{\text{Australia}}^{205} &= 1.73, \quad S_{\text{Europe}}^{205} = 8.16 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これは地域ブロックに所属するチーム数に比例した割当枠数になる。つまり、「強さ」が反映されずに、地域ブロックに所属チーム数だけで出場枠が決定する。ある意味で民主的である。しかし、W杯はチャンピオンスポーツの頂点にあり、そこではサッカ

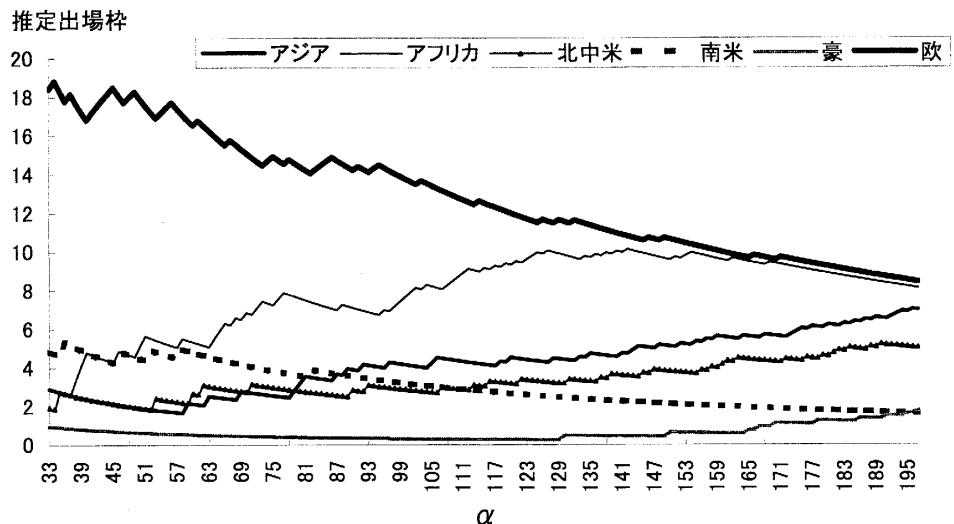


図1 重付 χ^2 法による地域ブロック推定出場枠の推移

ーにおいて世界最高水準の戦いが展開されることに期待が集まる。その期待の下では、 α はできるだけ32に近い値が良いであろう。したがって、 α の値は出場枠配分における競争的（民主的）指向性の程度を示すと解釈できる。そこで、 α を競争的配分度と呼ぶ。

重付 χ^2 法のランキングに基づく推定出場枠の競争的配分度 α の変化に対する推移を図1で示す。図1からアジアと北中米の推定出場枠は右肩上りであり、欧洲と南米の推定出場枠は右肩下りであることがわかる。アジア（北中米）の推定出場枠は右肩上りであるのは、アジア（北中米）のチームの多くが、重付 χ^2 法によるランキングでは下位にランクされることに起因する。アフリカもまた多くのサッカー発展途上国を多く含む地域ブロックであり、その推定出場枠はほぼ右肩上りである。一方、欧洲と南米の推定出場枠が右肩下りであることは、両地域ブロックでは大多数がサッカー先進国で占められるからである。多くのサッカー発展途上国を含む地域ブロックでは民主的配分指向であればあるほど、出場枠が拡大し、大多数がサッカー先進国で占められる地域ブロックでは競争的配分指向であればあるほど、出場枠が拡大する。

民主的配分指向でのアジア等の出場枠拡大、競争的配分指向での南米と欧洲の出場枠拡大の現象は重付 χ^2 法によるランキング以外でも観測されるだろうか？ $\alpha=52(\approx 205/4)$, $69(\approx 205/3)$, $103(\approx 205/2)$ とした場合の4つのランキングでの各地域ブロックの推定出場枠を表6に示す。

表5, 6と(9)から、いずれのランキングでも、サッカー発展途上国を多く含むアジア等では民主的配分であればあるほど、出場枠が拡大し、サッカー先進国が

表6 競争的配分度と推定出場枠

α	ア ジ ア	ア フ リ カ	北 中 米	南 米	豪 州	欧 州
<u>最尤法</u>						
$\alpha = 52$	1.88	4.39	1.88	4.39	0.63	18.82
$\alpha = 69$	2.78	6.49	2.32	4.17	0.46	15.77
$\alpha = 103$	4.04	7.77	3.11	3.11	0.31	13.36
<u>最小χ^2法</u>						
$\alpha = 52$	2.46	4.92	1.85	4.31	0.62	17.85
$\alpha = 69$	2.82	6.59	1.88	4.24	0.47	16
$\alpha = 103$	4.04	8.08	2.80	3.11	0.31	13.98
<u>FIFA</u>						
$\alpha = 52$	3.08	5.54	3.69	3.69	0.62	15.38
$\alpha = 69$	3.25	6.49	3.25	4.17	0.46	14.84
$\alpha = 103$	4.66	7.15	3.42	3.11	0.31	12.74
<u>重付χ^2法</u>						
$\alpha = 52$	1.88	5.65	1.88	4.39	0.63	17.57
$\alpha = 69$	2.32	6.49	2.78	4.17	0.46	15.77
$\alpha = 103$	4.04	8.08	2.80	3.11	0.31	13.67

大半を占める南米、欧洲の地域ブロックでは競争的配分であればあるほど出場枠が拡大する傾向にあることがわかる。

6. 割当枠、出場国数の競争的配分度

4つのランキングと競争的（民主的）配分度をうまく選択することでFIFA割当枠またはW杯出場国数を裏付けることができるであろうか？

そこでまず、FIFA割当枠に注目し、4つのランキング全てに対して、6地域ブロックの推定出場枠(S_{Asia}^{α} , $S_{\text{Africa}}^{\alpha}$, $S_{\text{North America}}^{\alpha}$, $S_{\text{South America}}^{\alpha}$, $S_{\text{Australia}}^{\alpha}$, $S_{\text{Europe}}^{\alpha}$)が地域ブロックのFIFA割当枠に一致もしくは最も近い α を求めてみよう。ここで、6地域ブロックの推定出場枠とFIFA割当枠との近さを次の4つの尺度で測定する。

表7 FIFA割当枠に対する最良近似推定出場枠

ランク	α	アジ ア アフ リカ	アフ リカ 米	北中 米	南米	豪州	欧州
(10)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	97	4.29	6.93	2.97	3.30	0.33	14.19
FIFA	75	3.84	5.97	3.41	3.84	0.43	14.51
重付 χ^2 法	93	4.13	6.88	3.10	3.44	0.34	14.11
(11)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	62	2.58	5.16	2.06	4.65	0.52	17.03
FIFA	75	3.84	5.97	3.41	3.84	0.43	14.51
重付 χ^2 法	63	2.54	5.08	3.05	4.57	0.51	16.25
(12)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	95	4.04	6.74	3.03	3.37	0.34	14.48
FIFA	76	3.79	5.89	3.37	3.79	0.42	14.74
重付 χ^2 法	69	2.78	6.49	2.78	4.17	0.46	15.30
(13)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	95	4.04	6.74	3.03	3.37	0.34	14.48
FIFA	76	3.79	5.89	3.37	3.79	0.42	14.74
重付 χ^2 法	95	4.04	6.74	3.03	3.37	0.34	14.48
FIFA割当枠	4.5	5	3.5	4.5	0.5	14	

$$\sum_j |S_j^\alpha - (\text{地域 } j \text{ の FIFA 割当枠})| \quad (10)$$

$$\sum_j \left| \frac{S_j^\alpha}{\text{地域 } j \text{ の FIFA 割当枠}} - 1 \right| \quad (11)$$

$$\max_j |S_j^\alpha - (\text{地域 } j \text{ の FIFA 割当枠})| \quad (12)$$

$$\max_j \left| \frac{S_j^\alpha}{\text{地域 } j \text{ の FIFA 割当枠}} - 1 \right| \quad (13)$$

すなち、4つの基準(10)–(13)で、FIFA割当枠に対する最良近似の推定出場枠を4つのランキングに対して求める。表7に最良の競争的配分度 α とその推定出場枠を与える。表7から、以下のことがわかる。

- いかなるランキングでも、FIFA割当枠に一致する推定出場枠は無い。
- アジア（北中米）の最良推定出場枠は常にその割当枠4.5(3.5)を下回る。
- 欧洲（アフリカ）の最良推定出場枠は常にその割当枠14(5)を上回る。

同様に、(10)–(13)の基準で、出場国数に対する最良近似の推定出場枠を各ランキングで求めた結果を表8に示す。

大陸間プレーオフの結果からアジアと南米の出場国数それぞれはFIFA割当枠から0.5減であり、一方、北中米と豪州のそれらでは0.5増である。

出場国数での競争的配分度 α とFIFA割当枠のそれを比較する。基準(13)下の4つ全てのランキング、基準(11)下のFIFAランキング、基準(10)下の最小 χ^2 法の

表8 出場国数に対する最良近似推定出場枠

ランク	α	アジ ア アフ リカ	アフ リカ 米	北中 米	南米	豪州	欧州
(10)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	95	4.04	6.74	3.03	3.37	0.34	14.48
FIFA	75	3.84	5.97	3.41	3.84	0.43	14.51
重付 χ^2 法	93	4.13	6.88	3.10	3.44	0.34	14.11
(11)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	95	4.04	6.74	3.03	3.37	0.34	14.48
FIFA	52	3.08	5.54	3.69	3.69	0.62	15.38
重付 χ^2 法	63	2.54	5.08	3.05	4.57	0.51	16.25
(12)							
最尤法	96	4.00	6.67	3.33	3.33	0.33	14.33
最小 χ^2 法	95	4.04	6.74	3.03	3.37	0.34	14.48
FIFA	76	3.79	5.89	3.37	3.79	0.42	14.74
重付 χ^2 法	69	2.78	6.49	2.78	4.17	0.46	15.30
(13)							
最尤法	61	2.62	5.25	2.10	4.72	0.52	16.79
最小 χ^2 法	60	2.67	5.33	2.13	4.27	0.53	17.07
FIFA	48	2.67	4.67	3.33	4.00	0.67	16.67
重付 χ^2 法	38	2.53	3.37	2.53	5.05	0.84	17.68
出場国数	4	5	4	4	1	14	

ランキングで、出場国数での競争的配分度 α はFIFA割当枠の α より小さく、基準(11)下の最小 χ^2 法のランキングで、出場国数での競争的配分度 α はFIFA割当枠の α より大きい。それ以外では競争的配分度 α はFIFA割当枠の α と一致した。ランキング全体を見れば、出場国数ではFIFA割当枠と比較して競争的配分度 α が小さくなり、競争的配分指向が少なからず増した。

これは、大陸間プレーオフという競合の結果が出場国数を決定したこととして一言で片付けられるかもしれない。しかし、大陸間プレーオフの結果はサッカー後進国を多数含むアジアの枠は0.5減になったが、サッカー後進国を多数含む北中米は0.5増であり、サッカー先進国が多数を占める南米が0.5減である。さらに、全体的に競争的配分指向が増したため、枠14が不变であった欧洲では、最良推定出場枠と14との差がFIFA割当枠と比較してさらに広がる。出場国数はFIFA割当枠と比較して競争的配分指向が増したが、個々のランキングからは外れているかもしれない。

個々のランキングとFIFA割当枠もしくは出場国数の整合性を測定しよう。ここでの整合性は各基準(10)–(13)の下で得た各最良推定出場枠に対する割当枠もしくは出場国数の相違をそれぞれの基準で測定することにより与える。各基準下における4つのランキングそれぞれに対するFIFA割当枠もしくは出場国数の整

表9 ランキングとFIFA割当枠、出場国数の整合性

基準	最尤法	最小 χ^2 法	FIFA	重付 χ^2 法
(10)				
FIFA割当枠	4.00	4.23	2.96	3.98
出場国数	4.00	4.53	2.96	4.24
(11)				
FIFA割当枠	1.11	1.15	0.70	0.77
出場国数	1.36	1.46	0.98	1.41
(12)				
FIFA割当枠	1.67	1.74	0.89	1.72
出場国数	1.67	1.74	0.89	1.49
(13)				
FIFA割当枠	0.33	0.35	0.18	0.35
出場国数	0.48	0.47	0.33	0.37

合性の測定結果を表9に示す。

表9の最小 χ^2 法のFIFA割当枠は4.23であり、その下の出場国数は4.53であり、FIFA割当枠の値よりも大きい。これは、出場国数はFIFA割当枠よりも最小 χ^2 法のランキングから外れていることを示し、出場国数がFIFA割当枠よりもそのランキングに対して不整合であることを意味する。

最尤法と最小 χ^2 法のランキングに対するFIFA割当枠と出場国数の整合性では、3つの基準でFIFA割当枠よりも出場国数が不整合になり、1つの基準でFIFA割当枠と出場国数とは同等であった。FIFAランキングに対する整合性では、2つの基準でFIFA割当枠よりも出場国数が不整合になり、2つの基準でFIFA割当枠と出場国数とは同等であった。重付 χ^2 法のランキングに対して、3つの基準でFIFA割当枠よりも出場国数が不整合になり、1つの基準でFIFA割当枠が出場国数よりも不整合であった。以上より、出場国数はFIFA割当枠よりも個々のランキングに対してほとんど不整合であり、ランキングからかけ離れた。

つまり、出場国数は競争的配分度合いが増したが、ランキングによる裏付けが乏しくなった。

7. オーストラリアのアジア加入と出場枠

ドイツW杯以降、オーストラリアはアジアに加入する。そして、ドイツW杯の結果を踏まえ、次回の南アフリカW杯での地域ブロックの出場枠が決定する。本研究では、オーストラリアはアジアに加入により、豪州全体もアジアに組み込まれるとする。そして、できるだけ競争的配分指向であり、基準(10)–(13)の下で可能な限り4つのランキングに沿うような出場枠を考えよう。

次回W杯の開催国の南アフリカは所属のアフリカ地域での予選が免除されて本大会に出場する。したがって、次回のW杯でのアフリカの割当枠は現状の割当枠5以上である。なぜならば、アフリカの割当枠を5未満にすると、アフリカの実質的な枠は現時点のFIFA割当枠5から1よりも大きく削減することになる。現時点のFIFA割当枠から1よりも大きく削減する案が実現することは考えにくい。さらに、アジア、北中米のFIFA割当枠は過大評価であり、それらの推定出場枠は競争的配分度 α に対して右肩上り、欧洲の割当枠は過小評価であり、その推定出場枠は競争的配分度 α に対して右肩下りという点を考慮して、以下の5つの出場枠案の中で検討する。

案1 アジア=5、アフリカ=5、北中米=3.5、南米=4.5、欧洲=14

案2 アジア=4.5、アフリカ=5、北中米=3、南米=4.5、欧洲=15

案3 アジア=4、アフリカ=5.5、北中米=3、南米=4.5、欧洲=15

案4 アジア=3.5、アフリカ=6、北中米=3、南米=4.5、欧洲=15

案5 アジア=3.5、アフリカ=6、北中米=3、南米=4、欧洲=15.5

案1はアジアへのFIFA割当枠4.5に豪州へのFIFA割当枠0.5を加えて得た5をアジアへの出場枠とし、アジアと豪州以外地域ブロックへのFIFA割当枠をそのまま出場枠としたものである。つまり、案1は現時点のFIFA割当枠を現状維持する案である。一方、案2は過大評価のアジアと北中米、過小評価の欧洲に対して現状維持の案を調整したものである。アジア+豪州へのFIFA割当枠5と北中米へのFIFA割当枠3.5をそれぞれ0.5減らし、欧洲へのFIFA割当枠に1を追加した15を欧洲の出場枠とする。

次回開催国南アフリカはドイツW杯予選敗退したが、次回W杯では予選免除によって本大会に出場する。そのため、アフリカへの出場枠を現状維持の5とすると、南アフリカを除くアフリカ各国にとって、次回のアフリカ地区予選でベスト4に入ることが次回の本大会出場を意味し、アフリカの各国にとって、今回よりも出場チャンスが減る。そこで、案3ではアフリカへの出場枠をFIFA割当枠5から0.5追加し、その増分を過大評価のアジアの出場枠減で調整する。したがって、案3は案2からアフリカへの出場枠を0.5増加して5.5とし、アジアへの出場枠を4として、そ

れ以外の地域ブロックへの出場枠は案2と同一とする。

案4, 5ではアフリカへの出場枠をFIFA割当枠5から増加分を0.5から1にして、アフリカへの出場枠を6とする。そのために、案3でのアジアへの出場枠4から0.5減して3.5にする。なお、アジアの出場枠では

$3.5 \geq$

$$\min \left\{ \begin{array}{l} (\text{現時点のアジアへのFIFA割当枠 } 4.5) - 1, \\ (\text{現時点の豪州へのFIFA割当枠 } 0.5) - 1 \end{array} \right\}$$

が成立するので、現時点のアジアと豪州それぞれから見れば、FIFA割当枠から1より大きく出場枠が減少していない。

案4, 5ではW杯優勝国がその地域ブロックへの出場枠へ影響を考慮する。実際、日韓W杯以前のW杯での出場枠では前回優勝国出場枠があった。また、ドイツW杯の割当枠を決定するFIFA理事会において、南米への割当枠を日韓W杯より0.5枠減という大陸連盟会長からの案に対して南米は「日韓W杯優勝のブラジルがいるのに減るのはおかしい」と反論した。一旦、この割当枠はFIFA理事会で決定されたが、その後紛糾曲折を経て南米は日韓W杯と同数のFIFA割当枠4.5をドイツW杯で確保した。

案4ではドイツW杯での優勝は南米の国と想定し、南米への出場枠をFIFA割当枠維持による4.5とし、欧州への出場枠を15とする。案5ではドイツW杯での優勝は欧州の国と想定し、それにより南米への出場枠をFIFA割当枠から0.5減により4とし、欧州への出場枠を0.5増の15.5とする。なお、W杯の優勝国は欧州か南米のいずれかである。

5つの出場枠案それぞれに対して4つのランキングでの最良推定出場枠を各基準(10)–(13)の下で求めることにより、5つの出場枠案のランキングに対する整合性と各出場枠案の競争的配分度を算出する。表10では5つの出場枠案の4つのランキングに対する整合性を基準(10)–(13)の下で測定した結果を示す。

表10から、4つのランキング全てに対して案4または案5のいずれかが最も整合していることがわかる。整合性の高い案4, 5に対して、それらの競争的配分度を既存のFIFA割当枠、出場国数の競争的配分度と比較する。表11にFIFA割当枠、出場国数、案4, 5の競争的配分度とそれらの平均を与える。

FIFA割当枠では競争的配分度が62から96までの間で散らばり、その平均値は84.69である。一方、案

表10 各案の4つのランキングに対する整合性

	基準	案1	案2	案3	案4	案5
最尤法	(10)	4.00	3.51	2.60	2.06	1.87
	(11)	0.80	0.67	0.52	0.42	0.35
	(12)	1.67	1.49	0.99	0.77	0.68
	(13)	0.33	0.30	0.22	0.18	0.14
χ^2 法	(10)	4.23	3.54	3.17	2.17	1.63
	(11)	0.89	0.67	0.62	0.44	0.35
	(12)	1.74	1.49	0.99	0.76	0.68
	(13)	0.35	0.29	0.23	0.13	0.13
FIFA	(10)	2.96	1.73	1.67	1.14	1.25
	(11)	0.55	0.31	0.29	0.24	0.19
	(12)	0.89	0.62	0.61	0.44	0.50
	(13)	0.18	0.14	0.11	0.08	0.05
重付 χ^2 法	(10)	3.98	2.90	2.00	1.51	1.33
	(11)	0.71	0.45	0.32	0.25	0.28
	(12)	1.74	1.45	0.99	0.49	0.49
	(13)	0.25	0.25	0.19	0.08	0.08

表11 FIFA割当枠、出場国数、案4, 5の競争的配分度

	基準	FIFA 割当枠	出場 国数	案4	案5
最尤法	(10)	96	96	79	69
	(11)	96	96	76	76
	(12)	96	96	69	69
	(13)	96	61	77	80
χ^2 法	(10)	97	95	71	71
	(11)	62	95	71	71
	(12)	95	95	71	69
	(13)	95	60	71	71
FIFA	(10)	75	75	71	71
	(11)	75	52	71	71
	(12)	76	76	71	50
	(13)	76	48	69	71
重付 χ^2 法	(10)	93	93	65	69
	(11)	63	63	65	69
	(12)	69	69	69	69
	(13)	95	38	69	69
平均競争的配分度		84.69	75.50	70.94	69.69

5は50から80までの範囲で散らばり、その平均値は69.69である。案4の競争的配分度の平均と散らばりの範囲は案5と同様である。出場国数の競争的配分度は平均75.5であるが、38から96までの範囲で散らばる。この範囲は案4, 5のものより大きい。これらのことより、次のW杯が案4または5の出場枠の下で実施されるならば、ドイツW杯よりレベルの高い試合が繰り広げられることが期待できる。

8. おわりに

アジアの一員である日本、韓国の両チームが日韓W杯共同開催で活躍したことにより、ドイツW杯ではアジア出場枠4.5を確保した。このアジア出場枠を含むFIFA割当枠について、1)最近4年間の国際A

マッチ以上の対戦成績を集計し、2) BT モデルから最尤法、最小 χ^2 法等により各国の強さをランクイングし、3) FIFA ランキングを含む 4 つのランクイングに対して、各種出場枠（案）をランクイングとの整合性と競争的配分度の 2 つの観点により比較した。

その結果、FIFA 割当枠は、実際の出場国数より 4 つのランクイングに整合しているが、アジアに対して過剰評価でありかつ欧州に対して過小評価であることを示した。そして、豪州のアジア加入というシナリオの下でアジアの出場枠削減かつ欧州の出場枠増加の出場枠案（案 4, 5）は競争的配分の度合いを強くし、これら 2 案は現状維持の出場枠案（案 1）より 4 つのランクイングに対して整合的であることを示した。

今後の課題を 2 つ述べる。1 つは、豪州のアジア加入のシナリオの下、出場枠案を 5 つ想定して議論をしたが、全ての出場枠案で検討することである。もう 1 つの課題は案 4(5)ではアジアの出場枠に端数があるので、案 4(5)の下でのアジアの出場国数は案 4(5)のアジアの出場枠の切り上げもしくは切り下げになる。そのため、案 4(5)の下での地域別ブロック出場国数の競争的配分度とランクイングへの整合性は案 4(5)のそれらとは異なる。端数の出場枠を含む案はその下で実現可能である出場国数の競争的配分度とランクイングへの整合性を考慮する必要があろう。なお、1930 年第 1 回ウルグアイ W 杯から 1998 年第 16 回フランス W 杯までは、欧州で開催された W 杯で欧州の国が、南米で開催された W 杯では南米の国が優勝した。ただし、第 6 回スウェーデン W 杯は除く。この歴史を考えると、案 5 が実現するであろう。さらに、4 つのランクイングでは、欧州の 16 位がアジア + 豪州の 4 位より上位に位置するので、アジアの出場国数は 3、欧州では 16 になるであろう（アジア = 3、アフリカ = 6、北中米 = 3、南米 = 4、欧州 = 16 の出場国数に対するランクイングへの整合性と競争的配分度は別の機会に報告する）。

何はともあれ、ドイツ W 杯でのアジア勢、特に日本、韓国が、日韓 W 杯以上の活躍をしなければ、次回南アフリカ W 杯でのオーストラリア編入の拡大アジア枠は現状の枠の延長線として得られるものではな

く、アジア勢にとって本大会出場に向けての予選突破がより厳しくなることは間違いない。ドイツ W 杯ベスト 8 入り目指して、頑張れ、日本、韓国！

参考文献

- [1] Bradley, R. A., Terry M. E.: Rank analysis of incomplete block designs: the method of paired comparisons. *Biometrika* (1952) 39, 324–345.
- [2] Rao, P., Kupper, L.: Ties in paired comparison experiments: A generalization of the Bradley-Terry model. *Journal of the American Statistical Association* (1967) 62, 194–204.
- [3] Davidson, R. R.: On extending the Bradley-Terry model to accommodate ties in paired comparison experiments. *Journal of the American Statistical Association* (1970) 65, 317–328.
- [4] 広津千尋：多重比較法による Bradley-Terry モデルの適合度検定. *品質* (1983) 13, 141–149.
- [5] 広津千尋：Bradley-Terry モデルの順序効果がある場合への拡張. *品質* (1984) 14, 42–58.
- [6] 竹内啓、藤野和建：「スポーツの数理科学」、共立出版 (1988).
- [7] Vuong, Q. H., Wang, W.: Minimum chi-square estimation and tests for model selection. *Journal of Econometrics* (1993) 56, 141–168.
- [8] 北川敏男：適合度検査法 (Test of Goodness of fit) と χ^2 分布. *統計数理研究* (1941) 1, 145–189.
- [9] 水田智彦：平成 16 年度静岡大学理工学研究科修士論文 “非負行列の和対称バランス問題に対するアルゴリズムの開発”
- [10] Eaves, C. B., Hoffman, A. J., Rothblum, U. G., Schneider, H.: Line-sum-symmetric scalings of square nonnegative matrices. *Mathematical Programming Study* (1985) 25, 124–141.
- [11] Schneider, M. H., Zenios, S. A.: A comparative study of algorithms for matrix balancing. *Operations Research* (1990) 38, 439–455.
- [12] Huang, T., Li, W., Sum, W.: Estimate for bounds of some numerical characters of matrices. *Linear Algebra and its Applications* (2000) 39, 137–145.