OR 研究の最前線

逐次点検問題とその周辺

土肥　正

1. はじめに

点検（inspection）という言葉は信頼性・保全性関連の文献で頻出するが，一般には「修理や取替に先立ち，アイテムに異常があるかどうかを検知する」ことを意味する．よって点検問題は，自動車の車検や健康診断などと同様に，我々の日常生活において頻繁に用いられている監視時期を選択する問題のひとつである．Barlow, Hunter and Proschan[1]の論文に端を発する最適点検スケジュールを求める数理的問題は「点検問題」と呼ばれ，過去40年間に渡り数多くの研究がなされてきた[2]．

特に，ある条件の下では，等しい間隔（例えば1日ごと）で周期的に点検を実施するよりも，異なる時間間隔で逐次的に点検を行う方が結果的に効率的な場合がある．このような非周期的に点検時刻列を求める問題は「逐次点検問題（sequential inspection problem）」もしくは「非周期的点検問題（aperiodic inspection problem）」と呼ばれ，周期的点検問題とは区別して論じられることが多い．最近出版された中川覃夫氏（愛知工業大学）によるモノグラフ[3]では点検問題の数々のバリエーションが紹介されており，点検モデルに限らず確率保全モデル全般を理解する上で大変興味深い．

にもかかわらず，文献[3]でふれられなかった点検問題の側面を本稿で紹介する意図は次の理由による．逐次点検問題の本質は解析的なモデル表現よりもむしろそのアルゴリズム的解法にあり，その問題はある特殊な数理計画問題に帰着される．事実，逐次的に最適点検時刻列を求める（もしくは推定する）アルゴリズムに着目した解説記事は邦文・英文を問わず極端に少なく，これまでに体系的に論じられることはあまりなかったように思われる．

どひ　ただし
広島大学 大学院工学研究科
〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1

本稿では，Barlow, Hunter and Proschan[1]による古典的な最適点検問題を概説し，最適点検時刻列を求める基本的な計算アルゴリズムや，準最適な点検時刻列を求めるためのいくつかの近似解法について紹介する．また，寿命（故障時間）の確率分布が未知である場合，準最適な点検時刻列を推定するための方法について議論する．さらに，逐次点検問題を応用する領域について述べた後に，今後の展望についてもふれたい．

2. 逐次点検問題

2.1 モデルの記述

アイテム（機器，部品，*etc.*）が時刻 $t=0$ で動作を開始し，予め定められた時刻列 $\{t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots\}$ において点検が実施されるものと仮定する．各点検時刻においてのみアイテムの状態は検査され，故障（異常）が検知されなければ次の点検時刻までアイテムの動作を継続する．もし故障が検知された場合には瞬時に寿命（故障発生時刻）を同定し，アイテムの故障状態を確認する．簡単のため，アイテムの寿命（故障発生時間）$X(0<X<\infty)$ は非負の確率変数であり，単調非減少で絶対連続な確率分布関数 $F(t)$ に従い，その密度関数を $f(t)$，故障率を $\lambda(t)=f(t)/\bar{F}(t)$，平均を $1/\mu(>0)$ とする．ここで $\bar{F}(\cdot)=1-F(\cdot)$ とする．

点検を実施するためには点検1回当たりの固定費用 $c_1(>0)$ が必要とされ，各々の点検は瞬時に行われる（すなわち，点検に要する時間の遅れは無視できる程小さい）ものと仮定する．ある点検時刻 $t_k(k=1, 2, \cdots)$ において故障の発生が検知された場合，故障が実際に発生した時点 $x(<t_k)$ から故障を検知するまでの間，アイテムは不動作状態に陥る．このとき，寿命に依存したペナルティ（システムダウン）費用 $L(t_k-x)$ が発生するものとし，関数 $L(\cdot)$ は2階微分可能であると仮定する．

Barlow, Hunter and Proschan[1]は，点検費用とペナルティ費用のトレードオフを考慮し，総期待稼動

費用を最小にする最適点検時刻列 $\bar{\mathbf{t}}_{\infty}^{*}=\{t_1^*, t_2^*, t_3^*, \cdots\}$ を求める次のような逐次点検問題を考えた．

$$\min_{\bar{\mathbf{t}}_{\infty}}: C(\bar{\mathbf{t}}_{\infty})=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[c_1(k+1)+L(t_{k+1}-t)]dF(t)$$
$$\text{s.t.}\quad t_k<t_{k+1}(k=0, 1, \cdots),\ t_0=0. \qquad (1)$$

式(1)の被積分項に含まれる $c_1(k+1)$ は，期間 $(0, t_k]$ の間に k 回の点検と，アイテムの故障後に1回の点検が実施されることを示している．

任意の $x(>0)$ に対して，関数 $f(t-x)/f(t)$ が t の非減少関数ならば，確率密度関数 $f(t)$ は PF_2 (Polya frequency function of order 2) であるといわれる．議論をより簡単にするため，以降では度々，ペナルティ費用を表す関数として $L(t)=c_2t$ のような線形関数を仮定する．このとき，Barlow, Hunter and Proschan[1]は，

(i) 独立で同一に分布する確率変数の実現値として点検時間間隔を決定する（ゲーム理論でいうところの混合戦略）よりも，式(1)を最小にする点検時刻列 $\bar{\mathbf{t}}_{\infty}$ を求める方が総期待稼動費用を常に小さく抑えることが可能となる

(ii) 寿命密度関数 $f(t)(>0)$ が PF_2 ならば，$C(\bar{\mathbf{t}}_{\infty})$ を最小にする最適点検時刻列 $\bar{\mathbf{t}}_{\infty}^{*}$ は非増加列 $(t_1>t_2-t_1>\cdots)$ となる

(iii) 寿命が指数分布に従う場合，最適点検時刻列は一定間隔 $(t_1=t_2-t_1=\cdots)$ となる

を証明している．アイテムの磨耗故障期において，寿命分布に関して一般的に仮定される性質として IFR (Increasing Failure Rate) がある．すなわち，寿命密度関数 $f(t)$ が PF_2 ならば，故障率 $\lambda(t)$ は動作時間 t の増加関数となる．実際，切断正規分布，ガンマ分布，ワイブル分布のように，信頼性理論で用いられる多くの寿命分布はこの性質を有することが知られている．

一方，アイテムの動作時間の上限（計画期間）を $T(>0)$ とすれば，逐次点検問題は

$$\min_{\bar{\mathbf{t}}_m, m}: C(\bar{\mathbf{t}}_m)=\sum_{k=0}^{m}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[c_1(k+1)+L(t_{k+1}-t)]dF(t)$$
$$\text{s.t.}\quad t_k<t_{k+1}(k=0, 1, \cdots, m),\ t_0=0$$
$$m=\max\{k>0: T>t_k\} \qquad (2)$$

となる．ここで，$\bar{\mathbf{t}}_m=(t_1, t_2, \cdots, t_m)$ および $t_{m+1}=T$ である．寿命 X の上限が T と一致する（$t\geq T$ で $F(t)=1$）とき，もし $F(t)\leq\{1+(c_2/c_1)(T-t)\}^{-1}$ ならば $m=0$（時刻 T で1回だけ点検を実施することが最適）であり，そうでなければ時刻 T 以前に m 回点検を実施することが最適となる[1]．

2.2 厳密解法（アルゴリズム）

式(1)で述べられた問題を解くためのひとつの方法は，$\bar{\mathbf{t}}_{\infty}^{*}$ が非増加列になるという性質を利用することであろう．Barlow, Hunter and Proschan (BHP) [1]は式(1)で定義された目的関数に対する一階の最適性の条件

$$t_{k+1}-t_k=\frac{F(t_k)-F(t_{k-1})}{f(t_k)}-\frac{c_1}{c_2},\ k=1, 2, \cdots \qquad (3)$$

を利用して最適点検時刻列 $\bar{\mathbf{t}}_{\infty}^{*}$ を生成するアルゴリズム（BHP アルゴリズム）を提案している．以下ではオリジナルな BHP アルゴリズムの代わりに，式(2)で与えられる有限計画期間問題に対する改良 BHP アルゴリズムを記載する．

Barlow, Hunter and Proschan (*BHP*) アルゴリズム：

Step 1: Set an arbitrary $m, z_l:=0$ and $z_u:=F^{-1}(0.999\cdots)$.

Step 2: Let $t_1:=(z_l+z_u)/2$. Compute an inspection sequence $\{t_2, t_3, \cdots, t_m\}$ using

$$t_{k+1}:=F^{-1}\left(F(t_k)+(t_k-t_{k-1})f(t_k)-\frac{c_1}{c_2}\right),\quad k=1, \cdots, m. \qquad (4)$$

Step 3: For $j=1, 2, \cdots, m$,

Step 3.1: if $t_{k+1}-t_k>t_k-t_{k-1}$ then $z_u:=t_1$ and Go to **Step 2**.

Step 3.2: if $t_{k+1}-t_k<0$ then $z_l:=t_1$ and Go to **Step 2**.

Step 4: If $t_m-T<-\epsilon$ then $z_l:=t_1$ and Go to **Step** 2, where $\epsilon(>0)$ is a sufficient small value.

Step 5: If $t_m-T>\epsilon$ then $z_u:=t_1$ and Go to **Step 2**.

Step 6: Stop the procedure.

オリジナルな BHP アルゴリズムでは $c_1/c_2=\int_0^{t_1}F(t)dt$ を満たすよう初期値 t_1 を決定しているが，さほど重要な意味は無いと思われるので，上述の擬似コード (**Step 2**) では2分木探索を用いている．これから容易に類推されるように，BHP アルゴリズムは最適性の必要条件と時刻列の非増加性のみに基づいて試行錯誤的に解を探索しているため，アルゴリズムの構造が至って簡単である．しかしながら，有限計画期間問題は無限計画期間問題よりも極端に自由度が落ちるため，T の値によっては最適点検時刻列が増加

列になったり減少列になったりすることがあり，ある局面においては上述のアルゴリズムは全く機能しないことがある[4]．例えば，有限計画期間を有する逐次点検問題では，寿命が指数分布になる場合においてさえも，最適点検時刻列が一定間隔になる保証はない(例えば[5])．また，点検回数の全探索を必要とするため，点検回数が極端に増加すると上述のアルゴリズムは必ずしもうまく機能しないことが経験的に知られている．

Luss[6]は一連の研究の中で，動的計画法 (DP) に基づいて最適点検時刻列を決定することを提案している．ただし，Luss[6]の DP アルゴリズムは離散点上で定義された点検時刻列を求めているので，ここではOkamura ら[4, 7]に沿った改良アルゴリズムを紹介する．いま，$V_k(t_{k+1})(k=1,2,\cdots,m-1)$ を $k+1$ 番目の点検を時刻 $t_k^*\leq t_{k+1}\leq t_{k+2}^*$ で実施し，以降は最適な点検スケジュール $\bar{\mathbf{t}}_m^*$ に従って点検を実施したときの総期待稼動費用，v_k^* を $k+1$ 番目の点検時刻における最小総期待稼動費用とする．

このとき，最適性の原理から，次の最適性方程式が得られる．

$$v_k^*=\min_{t_k^*\leq t_{k+1}\leq t_{k+2}^*} V_k(t_{k+1}|t_k^*), \tag{5}$$

$$V_k(t_{k+1}|t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}[c_1(k+1)+L(t_{k+1}-t)]dF(t)+v_{k+1}^*,$$
$$i=0,1,\cdots,m-1. \tag{6}$$

これを満足する点検時刻列 $\bar{\mathbf{t}}_m^*=\{t_1^*,\cdots,t_m^*\}$ が最適な逐次点検時刻列となる．

上記の最適性方程式を解くために，次の関数を定義する．

$$C_k(t_{k+1}|t_k,t_{k+2})=c_2(t_{k+1}-t_k)\lambda(t_{k+1})-c_2[1+\bar{F}(t_{k+2})/(\bar{F}(t_{k+1})]-c_1\lambda(t_{k+1}). \tag{7}$$

以上の準備の下で，有限計画期間をもつ最適点検時刻列を求める次のアルゴリズムを得る．

DP アルゴリズム：

Step 1: Set an arbitrary $m, j:=0$ and $t_{m+1}=T$.

Step 2: Set the initial inspection time sequence $\bar{t}_m^{(j)}:=\{t_1^{(j)},\cdots,t_m^{(j)}\}$ and the initial value of expected total operation cost $v_k^{(j)}:=0$.

Step 3: For $k=0,\cdots,m-1$, compute

$$t_{k+1}^{(j+1)}:=\{t_k^{(j)}\leq t\leq t_{k+2}^{(j)};\ C_k(t|t_k^{(j)},t_{k+2}^{(j)})=0\} \tag{8}$$

$$v_k^{(k+1)}:=\int_{t_k^{(j)}}^{t_{k+1}^{(j+1)}}[c_1(k+1)+L(t_{k+1}^{(j)}-t)]dF(t)+\int_{t_{k+1}^{(j+1)}}^{t_{k+2}^{(j)}}[c_1(k+2)+L(t_{k+2}^{(j)}-t]dF(t)+v_{k+2}^{(j)}, \tag{9}$$

where $v_m=v_{m+1}=0$.

Step 4: For an arbitrary $\epsilon(>0)$ and $k=1,\cdots,m$, if $|t_k^{(j+1)}-t_k^{(j)}|<\epsilon$ go to **Step 5**, otherwise set $k:=k+1$ and go to **Step 3**.

Step 5: Stop the procedure.

上述の DP アルゴリズムでも，計画期間 T 内に実施される点検回数 m を設定した後に，最適性方程式を逐次解くことが要求される．事実，離散変数である点検回数 m と連続変数である点検時刻列 $\bar{\mathbf{t}}_m$ を同時に求めるための効率的なアルゴリズムは，現在のところ知られていない．しかしながら，DP アルゴリズムでは寿命分布の年齢特性に関する制約を必要としないため，PF_2 以外のクラスに属する寿命分布に対しても求解することが原理的に可能である．

3. 近似アルゴリズム

点検問題が盛んに論じられていた当時 (60—70 年代) の計算環境では，式(1)で定義される無限計画期間問題ですら，精度よく解くことがそれ程容易ではなかった．そこで，あるモデル上の仮定を設定することで，逐次点検問題を近似的に解くための方法がいくつか開発されてきた．特に，式(1)で与えられるような比較的単純な費用構造を有する問題や小規模な無限計画期間問題では，点検時刻列を精度よく計算するという意味において，これらの方法は今日ではさほど有用性があるとはいえない．しかしながら，点検回数 m が極端に大きい場合や費用関数がより非線形性を帯びている場合などは，依然として厳密解法を適用することが困難であることが多く，近似アルゴリズムの効力を発揮することが期待できる．また，寿命分布が未知である場合のように，不完備な情報の下で最適点検時刻列を推定しなければならない状況では，近似アルゴリズムを用いることが有効となる．

3.1 流体近似

Keller[8]は単位時間当たりに実施される点検回数を滑らかな連続関数 $n(t)$ で近似することで，式(1)で与えられる総期待稼動費用を近似することを提案している．関数 $n(t)$ は点検頻度 (inspection frequency) とも呼ばれ，$1/n(t)$ は時刻 t における点検時間間隔を近似的に表している．この仮定の下で，無限計画期間における総期待稼動費用は

$$C(\bar{\mathbf{t}}_\infty) \approx C(n(t), F(t))$$
$$= \int_0^\infty \left[c_1 \int_0^t n(x)dx + L(1/2n(t)) \right] dF(t)$$
$$= c_1 \int_0^\infty n(t)\bar{F}(t)dt$$
$$+ \int_0^\infty L(1/2n(t))dF(t) \tag{10}$$

によって表現される．$F(t)$ が既知であるという条件下で，Keller[8]は式(10)の第２式で与えられる表現に基づいて変分問題を定式化し，最適点検頻度 $n^*(t)$ を導出している．Kaio and Osaki[9]は式(10)の第３式に対応する変分問題に対するオイラー方程式

$$L'(1/2n(t))\lambda(t) = 2c_1 n^2(t) \tag{11}$$

を導出し，準最適点検時刻列

$$n^*(t) = \sqrt{c_2\lambda(t)/2c_1}, \tag{12}$$

$$k = \int_0^{t_k^*} n^*(t)dt, k=1, 2, \cdots \tag{13}$$

を求めている（ここで，$L'(t)=dL(t)/dt$）．この方法は有限計画期間問題にも適用可能であり，

$$C(\bar{\mathbf{t}}_m) \approx C(n(t), F(t))$$
$$= \int_0^T \left[c_1 \int_0^t n(x)dx + L(1/2n(t)) \right] dF(t) \tag{14}$$

となる．Viscolani[10]はKeller[8]と同様に，時刻 t までに実施される点検回数 $S(t) = \int_0^t n(x)dx$ に対する流体近似を導入することで最適点検頻度

$$n^*(t) = \sqrt{c_2 f(t)/2c_1[\beta - F(t)]} \tag{15}$$

を導出している．ここで，$\beta(>F(T))$ は $S(T)=m+1$ を満たすように決定される任意定数である．

3.2 定数ハザード近似

Munford and Shahani[11]は，現在の点検時刻 t_k で故障が発生していないという条件下において，隣合う点検時刻列 $(t_k, t_{k+1}](k=0, 1, \cdots)$ の間で故障が発生する確率は一定であり，その確率は $p \in (0, 1)$ によって与えられるものと仮定している．すなわち，

$$\frac{F(t_{k+1}) - F(t_k)}{1 - F(t_k)} = p \tag{16}$$

が成立するものとする．この仮定は，隣合う点検時刻列の間隔が相対的に短い場合に成立する．また，寿命分布は絶対連続で非減少であるので，その逆関数 $F^{-1}(\cdot)$ は必ず存在することに注意する．式(16)から，$F(t_k) = 1-(1-p)^k$ および $t_k = F^{-1}[1-(1-p)^k]$ を得る．よって，このときの総期待稼動費用は，p の関数として近似的に

$$C(\bar{\mathbf{t}}_\infty) \approx C(p)$$
$$= \sum_{k=1}^\infty \int_{t_{k-1}}^{t_k} [c_1(k+1) + L(F^{-1}(1 - (1-p)^{k+1}) - t)] dF(t)$$
$$= \frac{c_1}{p} + c_2 \left[\sum_{k=1}^\infty t_k(1-p)^{k-1}p - \frac{1}{\mu} \right] \tag{17}$$

によって与えられる．具体的な点検時刻列を生成するアルゴリズムとしては，まず最初に総期待稼動費用を最小にする確率 p^* を求めた後，逐次的に $t_k^* = F^{-1}[1-(1-p^*)^k]$ を求めればよい．有限計画期間問題の場合には，やはり点検回数 m の組合わせを考えながら，式(17)を変形した有限和の最適化問題を解く必要がある．

3.3 期待残存寿命近似

時刻 t_k で点検を実施した時に故障が発生していなかった場合，条件付平均故障時間は $\int_{t_k}^\infty tdF(t)/\bar{F}(t_k)$ となる．Munford[12]は，点検時刻 t_k から故障が発生するまでの期待残存寿命 $s(t_k) = \int_{t_k}^\infty tdF(t)/\bar{F}(t_k) - t_k$ の $100 \cdot \theta$%時点 $(0<\theta<1)$ で $k+1$ 番目の点検を実施するものと仮定し，次のような近似問題について考察している．

$$\min_{0<\theta<1} : C(\theta) = \sum_{k=0}^\infty \int_{t_k}^{t_{k+1}} [c_1(k+1) + L(t_{k+1} - t)] dF(t)$$
$$\text{s.t.} \quad t_0 = 0, t_1 = \theta/\mu, \cdots,$$
$$t_{k+1} = t_k + \theta s(t_k). \tag{18}$$

上式を最小にする媒介変数 θ^* を求めた後，準最適な点検時刻列を $t_{k+1}^* = t_k^* + \theta^* s(t_k^*)$ に基づいて逐次的に導出する．ただし，この場合は総期待稼動費用に関する解析的に陽な表現を得ることが困難であるため，流体近似や定数ハザード近似ほど簡単な近似アルゴリズムにはなっていない．

3.4 確率点近似

Yang and Klutke[13]は寿命分布の確率点(quantile)に基づいて点検時刻列を決定する方法を提案している．

$$t_1 = \sup\{t>0 ; \bar{F}(t) \geq \alpha\} = \bar{F}^{-1}(\alpha),$$
$$\vdots$$
$$t_k = \sup\{t>0 ; \bar{F}(t|X>t_{k-1}) \geq \alpha\}$$
$$= \bar{F}^{-1}(\alpha^k). \tag{19}$$

これより，総期待稼動費用は

$$C(\bar{\mathbf{t}}_\infty) \approx C(\alpha)$$
$$= \sum_{k=1}^\infty \int_{\bar{F}^{-1}(\alpha^{k-1})}^{\bar{F}^{-1}(\alpha^k)} [c_1(k+1) + L(\bar{F}^{-1}(\alpha^{k+1}) - t)] dF(t) \tag{20}$$

のように近似され，これを最小にする α^* を求めた後

に準最適な点検時刻列を求めればよい．Yang and Klutke[13]はまた，寿命分布がIFRの場合には

$$t_k=\begin{cases}\bar{F}^{-1}(\alpha^k) & \text{if } k\le l\\ \bar{F}^{-1}(\alpha^l)+(k-l) & \\ \quad\times[\bar{F}^{-1}(\alpha^l)-\bar{F}^{-1}(\alpha^{l-1})] & \text{otherwise}\end{cases} \tag{21}$$

を，DFR (Decreasing Failure Rate) の場合には

$$t_k=\begin{cases}k\bar{F}^{-1}(\alpha^l)/l' & \text{if } k\le l'\\ \bar{F}^{-1}(\alpha^{L-l'+k}) & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{22}$$

$$l'=\min\left\{K\,;\ k\ge\frac{\bar{F}^{-1}(\alpha^l)}{\bar{F}^{-1}(\alpha^{l+1})-\bar{F}^{-1}(\alpha^l)}\right\} \tag{23}$$

を利用し，総期待稼動費用を最小にする(α^*, l^*)を求める問題について考察している．Cuiら[14]はさらに，各点検時刻ごとに異なる確率点$\alpha_k(k=1,2,\cdots)$を決定する方法を提案し，瞬間アベイラビリティや定常アベイラビリティを最大にする問題について考察している．

4. 推定アルゴリズム

筆者の知る限りにおいて，統計的一致性を保証するような逐次点検問題におけるノンパラメトリック推定アルゴリズムはまだ知られていない．また，DPアルゴリズムの構造を利用して逐次的に点検時刻を更新するシミュレーションベースの方法を開発したとしても，解の収束速度を考慮すればとても実用に耐えられるような代物ではないと予想される．しかしながら現実には，寿命分布に関する情報が不完全であるにもかかわらず，点検時刻列を決定しなければならない問題は数多く見受けられる．

式(1)および式(2)で与えられる逐次点検問題をmin-maxゲームとして捉えることで，寿命分布のモーメント情報から点検時刻列を推定する方法は古くから議論されてきた．Kander and Raviv[15]は寿命分布の上限を用いて点検時刻列を求めるDPアルゴリズムを開発している．これは，故障の発生に関して安全側の立場に立脚した（悲観的な）点検スケジュールを代替的に求めることに対応する．すなわち，実用上はそれなりに意味はあるものの，min演算とmax演算の交換が不可能であり，対称なmin-maxゲームとはなっておらず，ゆえにゲームの解としての鞍点も存在しない．以下では，対称なmin-maxゲームに話を限定して，逐次点検問題を近似的に解くための方法を紹介する．

4.1 min-max流体近似

Keller[8]とLeung[16]は，3.1節で述べた流体近似の枠組みにおいてmin-maxゲーム問題としての逐次点検問題を定式化している．すなわち，

$$\max_{F(t)}\min_{n(t)} C(n(t), F(t)). \tag{24}$$

式(12)を式(10)に代入すると

$$C(n^*(t), F(t))=\sqrt{2c_1a_1}\int_0^\infty\sqrt{(f(t)\bar{F}(t)}\,dt \tag{25}$$

を得る．よって問題は

$$\max_{F(t)} C(n^*(t), F(t)) \tag{26}$$

を満たす（期待費用の意味で）悲観的寿命分布$F^*(t)$を求めることである．この$F(t)$に関するオイラー方程式を解けば，min-maxゲームとしての最適点検頻度は

$$n^{**}(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_2\beta}{c_1(1-\beta t)}},\ 0\le t\le\beta \tag{27}$$

となる．ここで，$\beta(>0)$は変分問題の一般解に含まれる任意定数である．無限計画期間問題の場合，この任意定数は$\beta=1/\mu$のように決定され，寿命Xの上限がTと一致する場合には$\beta=T$のように選ばれる．

4.2 min-max推定

有限計画問題の場合には，式(14)で与えられる近似表現に基づいて式(24)のmin-maxゲームの解を解析的に求めることは困難である（式(26)の変分問題に対する解を解析的に導出することが容易ではない）．そこで，全く異なる観点から有限計画問題に対するmin-max解を導出することを考える[5, 17]．表記を簡単にするため$g_k(t, t_{k+1})=c_1(k+1)+L(t_{k+1}-t)$とおけば，評価関数は

$$C(\bar{\mathbf{t}}_m, F(t))=\sum_{k=0}^{m}\int_{t_k}^{t_{k+1}} g_k(t, t_{k+1})dF(t) \tag{28}$$

となる．いま$C(\bar{\mathbf{t}}_m)=\max_{F(t)}C(\bar{\mathbf{t}}_m, F(t))$とおけば，直ちに

$$C(\bar{\mathbf{t}}_m)=\max_{k=0,1,\cdots,m} g_k(t_k, t_{k+1}) \tag{29}$$

が成り立つことを示すことができる．m^*を総期待稼動費用を最小にする点検回数とすると，この結果を利用して，

$$C(\bar{\mathbf{t}}_{m^*})=\min_m C(\bar{\mathbf{t}}_m) \tag{30}$$

と書ける．直感的な議論から

$$g_0(0, t_1)=g_1(t_1, t_2)=\cdots=g_m^*(t_{m^*}, T) \tag{31}$$

を満たす$\bar{\mathbf{t}}_{m^*}$が存在することを証明できる[5, 17]ので，有限計画期間問題に対するmin-max解は

$$t_k^{**}=k\left[\frac{T}{m^*+1}+\frac{c_1}{2c_2}(m^*-k+1)\right] \tag{32}$$

となり，最適な点検回数は

$$m^*(m^*+1)<\frac{2c_2T}{c_1} \tag{33}$$

を満たす．上述の解が min-max ゲームの鞍点になっていることは容易に確認することができる．

5. その他の話題

本稿では（それこそ駆け足で），アイテムが故障するまでに発生する総期待稼動費用を評価規範とする逐次点検問題の計算アルゴリズムについて述べてきた．ここで紹介した内容はとても「OR 研究の最前線」と呼べるほど真新しいものではないが，最適化アルゴリズムの開発という側面に焦点をあてれば，まだまだ未解決の問題が山積されていることだけはご理解頂けたかと思う．本稿で取扱った基本的な方法以外にも，計算効率を高める若干の工夫[3]が提案されている．これまで，小規模なアルゴリズムの性能比較[18-20]もいくつか行われているが，十分研究し尽くされているという状況とは程遠い．また，遅れを伴う逐次点検問題（Kaio and Osaki[9], Senguputa[21]）など，現実の問題に適用する上で状況に応じて様々なモデル化が考えられることも付記しておく．

最適点検問題に帰着される応用例は枚挙に暇がないが，コンピュータシステム（データベースなどのファイルシステム，ソフトウェア，組込みシステム，*etc*）において最適チェックポイント（データのバックアップ時期）を配置する問題は，逐次点検問題とほぼ等価な構造をもつことが知られている[5, 22]．コンピュータシステムで処理される情報を逐次安定した記憶媒体に保存するために配置されるチェックポイントの決定は，低費用で実現可能な耐故障計算（fault-tolerant computing）として古くから注目を集めている．特に，最近盛んに研究が行われている平行・分散システム上で逐次的にチェックポイントを配置する問題は，解決の糸口すら見つかっていない難問中の難問である．

また，OR の伝統的な研究領域に目をやると，逐次点検問題として定式化できる問題が数多く存在するのは生産在庫管理問題であろう．生産設備の劣化（しいては生産品質の劣化）を伴う生産在庫管理システムの多くは，最も単純な費用構造をもつ EMQ（Economic Manufacturing Quantity）モデルでさえも，もはや式(1)や式(2)のような簡単な形式で表現できなくなるため，厳密な意味での逐次的な点検時刻列を求めることは非常に困難である．ここでは基本的な参考文献として Tseng[23]，Makis[24]を挙げるだけに止めるが，膨大な参考文献の数とは裏腹に，解の品質（厳密解と近似解の差）を保証することができるような一般的な成果はまだ得られていない．

謝辞　本稿は，筆者が国際会議 ICNCRESE 2005[25]で講演した内容をまとめたものである．岡村寛之助教授（広島大学大学院）には，内容の細部に渡り数多くの貴重なコメントを頂いた．最後に，本稿を執筆する機会を頂いた中森眞理雄編集委員長ならびに三浦英俊編集委員に感謝申上げる．

参考文献

[1] Barlow, R. E., Hunter, L. C. and Proschan, F.: "Optimum checking procedures," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 11(4), 1078-1095 (1963).

[2] Barlow, R. E. and Proschan, F.: *Mathematical Theory of Reliability*, SIAM, Philadelphia (1996).

[3] Nakagawa, T.: *Maintenance Theory of Reliability*, Springer-Verlag, London (2005).

[4] Okamura, H., Maruo, T., Iwamoto, K. and Dohi, T.: "Aperiodic optimal checkpoint sequence under steady-state system availability," *Proc. of 2006 Asian Int'l Workshop on Advanced Reliability Modeling* (in press).

[5] Ozaki, T., Dohi, N., Okamura, H. and Kaio, N.: "Distribution-free checkpoint placement algorithms based on min-max principle," *IEEE Trans. on Dependable and Secure Computing* (in press).

[6] Luss, H.: "An inspection policy model for production facilities," *Management Sci.*, **29**(9), 1102-1109 (1983).

[7] Okamura, H., Iwamoto, K. and Dohi, T.: "A dynamic programming algorithm for software rejuvenation scheduling under distributed computation circumstance," *J. of Computer Sci.* (in press).

[8] Keller, J. B.: "Optimum checking schedules for systems subject to random failure," *Management Sci.*, 21, 256-260 (1974).

[9] Kaio, N. and Osaki, S.: "Some remarks on optimum inspection policies," *IEEE Trans. Reliab.*, **R-33**, 277-279 (1984).

[10] Viscolani, B.: "A note on checking schedules with finite horizon," *Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Operationnelle*, **25**(2), 203-208 (1991).

[11] Munford, A. G. and Shahani, A. K.: "A nearly

optimal inspection policy," *Opns. Res.*, **23**, 373-379 (1972).

[12] Munford, A. G.: "Comparison among certain inspection policies," *Management Sci.*, **27**, 260-267 (1981).

[13] Yang, Y. and Klutke, G.-A.: "Improved inspection schemes for deteriorating equipment," *Probability in the Engineering and Information Sciences*, **14**, 109-118 (2000).

[14] Cui, L., Xie, M. and Loh, H.-T.: "Inspection schemes for general systems," *IIE Trans.*, **36**, 817-825 (2004).

[15] Kander, Z. and Raviv, A.: "Maintenance policies with when failure distribution of equipment is only partially known," *Naval Res. Logist. Quart.*, **21**, 419-429 (1974).

[16] Leung, F. K.: "Inspection schedules when the lifetime distribution of a single-unit system is completely unknown," *Euro. J. Opel. Res.*, **132**, 106-115 (2001).

[17] Beichelt, F.: "Minimax inspection strategies for single unit systems," *Naval Res. Logist. Quart.*, **28**, 375-381 (1981).

[18] Kaio, N. and Osaki, S.: "Optimal inspection policies: a review and comparison," *J. Math. Anal. Appl.*, **119**(1/2), 3-20 (1986).

[19] Kaio, N. and Osaki, S.: "Comparison of inspection policies," *J. Opl. Res. Soc.*, **40**, 499-503 (1989).

[20] Lam, C. T. and Yeh, R. H.: "Comparison of sequential and continuous inspection strategies for deteriorating systems," *Adv. Appl. Probab.*, **26**, 423-435 (1994).

[21] Senguputa, B.: "Inspection procedures when failure systems are delayed," *Open. Res.*, **28**(2), 768-776 (1980).

[22] Toueg, S. and Babaoğlu, Ö.: "On the optimum checkpoint selection problem," *SIAM J. of Computing*, **13**(3), 630-649 (1984).

[23] Tseng, S. T.: "Optimal preventive maintenance policy for deteriorating production systems," *IIE Trans.*, **28**, 687-694 (1996).

[24] Makis, V.: "Optimal lot sizing and inspection policy for an EMQ model with imperfect inspection," *Naval Res. Logist.*, **45**, 165-186 (1998).

[25] Dohi, T.: "Optimal inspection strategies and their computational aspect: survey and applications (invited talk)," was presented at *International Conference on Reliability and Safety Engineering* (ICNCRESE 2005), Bhubaneswar, India, December 21-23 (2005).