ハイブリッド・アプローチによる最適化
―数理計画モデルをベースとしたフレキシブルショップ・スケジューリングを例として―

玉置　久，榊原　一紀

線形計画や整数計画の分野において，最先端のアルゴリズムを実装した数理計画パッケージの性能は，ここ数年飛躍的に向上している．とは言え，現実規模の問題にそのまま最適化アルゴリズムあるいは数理計画パッケージを適用して解を求めるには，まだまだ限界のあることも事実である．このような状況において，ヒューリスティクスと数理計画法をハイブリッドする形での解法構成が効果的であると考えられる．本稿では，問題の分散構造とハイブリッド解法の形態を概観するとともに，フレキシブルショップ・スケジューリング問題を例として取り上げ，混合整数計画モデルに基づくハイブリッド解法の一例を紹介する．

キーワード：最適化，スケジューリング，数理計画モデル，分散構造，ハイブリッド解法，メタヒューリスティクス

1.　はじめに

社会全般の高度情報化や製品需要の多様化が相まって，鉄鋼業においてもプロセスの計画や運用，制御に関連する最適化の問題がますます重要視されている．本稿で例として取り上げる生産計画や生産スケジューリングの問題もその代表例の一つである．ここで，鉄鋼プロセスはそもそも複数工程を有する多段階プロセスであり，近年の多品種少量化，さらには変品種変量化の傾向がきつくなるにつれて，生産計画・スケジューリング問題の大規模化・複雑化が著しくなっている．このような背景のもと，スケジューリング等の最適化に際しては，経験等に基づいて何らかのルールを形成しておき，このルールによって許容し得る解を導くといったアプローチが一般的である．最適性の保証はないが，ある程度良好な解を得ることができるという点において，有用なアプローチである．しかしながら，有効なルールを発見しメンテナンスしていくことは容易ではなく，種々の局面でこの問題点が指摘され始めている．

一方，最適化問題，特に組合せ最適化問題の解法について見ると，計算機（ハードウェア）の飛躍的な性能向上ならびに最適化手法・アルゴリズム（ソフトウェア）の進展により，従来，不可能であるとされていた問題に対しても最適解を求めることが可能となりつつある．例えば，最先端のアルゴリズムを実装した数理計画パッケージの性能は，数年前と比較すると飛躍的に向上している．とは言え，やはり現実規模の問題にそのまま最適化アルゴリズムあるいは数理計画パッケージを適用して解を求めるには，まだまだ限界のあることは事実である．

このような状況において，ヒューリスティクス・ベースのアプローチと最適化（数理計画）ベースのアプローチをハイブリッドする形での解法構成が効果的であると考えられる．いくつかの手法を組み合わせることで，それぞれの長所を最大限に引き出し，また短所を補完できれば，大規模で複雑な問題を効率的に解くことができるようになることが期待される[1]．

以下，まず問題側から見た分散構造と解法面での分解法およびハイブリッド解法の形態を概観する．次に，フレキシブルショップ・スケジューリング問題を例として取り上げ，混合整数計画モデルとしての定式化例，およびこの混合整数計画モデルをベースとした数理計画パッケージとメタヒューリスティクスのハイブリッド解法を示し[2]，その可能性について検討してみたい．

たまき　ひさし
神戸大学 工学部
〒657-8501 神戸市灘区六甲台町
さかきばら　かずとし
立命館大学 情報理工学部
〒525-8577 草津市野路東1丁目

2. 問題の分散構造とハイブリッドの形態

ハイブリッド・アプローチを分類・整理する上で，まず問題の構造，特にその分散構造について見ておこう．最適化の対象となるシステムの分散構造（複数工程等）に加えて，一般に，サブシステムにおける決定項目を幾種類かに分割して捉えられる場合（選択（割付け）と順序付け，数量の決定と順序付け等）が多い．これを模式的に表すと，図1のようになる．

ここで，対象システムの分散構造を「物理」的分散構造，また決定項目における分散を「機能」的分散構造と呼ぶことにする．これらの分散構造に基づく分解アプローチとして，典型的には，

(1) 機能的分散構造に注目して問題を分解（例えば，生産計画問題と生産スケジューリング問題，割付け問題と順序付け問題），
(2) 物理的分散構造に注目して問題を分解（例えば，上流工程スケジューリング問題と下流工程スケジューリング問題），

が挙げられる．

いずれの場合においても，トップダウン的な視点にたって解法を構成する場合，全体問題を，例えば数理計画問題としてモデル化した上で，複数の部分問題にまたがる全体的な制約条件をいかに緩和・分離するかということが主眼となる．これまでにも，ラグランジュ緩和の概念に基づくものをはじめ，種々の枠組みが考えられている[3]．一方，ボトムアップ的なものとしては，例えば全般的な制約条件の充足や大域的な準最適性の確保のためのサブ目標等をパラメータ化したヒューリスティクスをベースとし，部分問題ごとに解法手続きを構成する形がポピュラーである．そして，多くの場合に，これらのパラメータを逐次更新していく手続きを付加するといった枠組みが採られているようである．さらに，両者を融合するようなアプローチ（例えば，ラグランジュ乗数（に相当するパラメータ）をヒューリスティックに調整する等）も少なくない．

このような分解アプローチを解法面から見ると，それぞれの部分問題に異なる（と言うか適切と考えられる）解法を採用することによってハイブリッド解法が実現されるという見方もできる．例えば，割付けおよび順序付けを求める部分問題に対してそれぞれ手法Aおよび手法Bを適用するものとし，これらの求解を交互に繰り返すといった手順によって，全体としての実行可能解を得るといった枠組みが考えられる．

このようにハイブリッド解法は問題の分解方法とも深く関係することも多いが，基本的に，分解法とは異なる観点から捉えられるべきであろう．より一般的にハイブリッド・アプローチを捉えた例として，

(a) 直列型：解法Aの後に解法Bを適用するといった構成（ヒューリスティックによる解を初期解として局所探索法を適用する場合など），
(b) 並列同期型：解法Aにおけるある操作として解法Bを用いるといった構成（遺伝アルゴリズムにおいて適応度を評価する部分に数理計画法を用いる場合など），
(c) 並列非同期型：解法Aと解法Bが協力しながら最適値探索を行うといった構成（割付けおよび順序付けにそれぞれ解法Aと解法Bを用いた探索を交互に繰り返す場合など），

のような分類もある（図2）[1,4]．このとき，上述の枠組みは，(c)の「並列非同期型」のハイブリッド解法に位置付けられるものである．さらに，この並列非同期型は，解法Aと解法Bの対象となる解空間の構造によってさらに細分化することもできるが（例えば，解空間全体を複数の解法が協調して探索する形や，異なる部分空間（すなわち部分問題）を競合的に探索

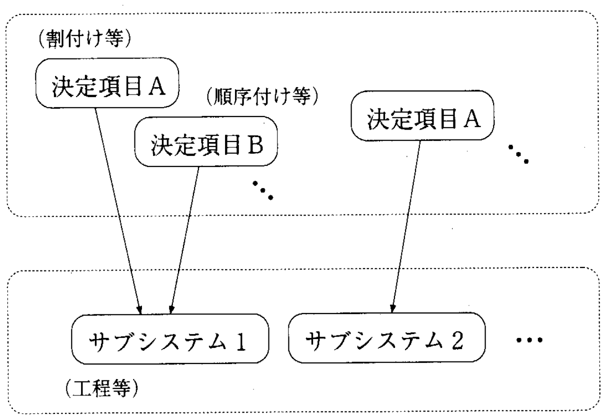


図1 問題の分散構造

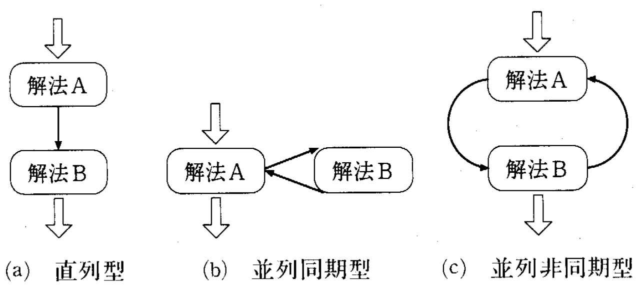


図2 ハイブリッド解法の構造

する形)，詳細については省略する．

次節では，ジョブショップ型の拡張として位置づけられるフレキシブルショップ型のスケジューリング問題（以下，単にフレキシブルショップ問題）を例として取り上げ，上記(1)および(b)のアプローチによるハイブリッド解法の構成例を紹介する．

3．フレキシブルショップ問題の数理計画モデルとハイブリッド解法

まず問題を明確に記述し，ハイブリッド解法を構成するベースを定める意味で，フレキシブルショップ問題の整数計画モデルへの定式化例を示すとともに，メタヒューリスティクスの一つである遺伝アルゴリズム(Genetic Algorithm：GA）と組み合わせたハイブリッド解法を紹介しよう[2]．

3.1 フレキシブルショップ問題

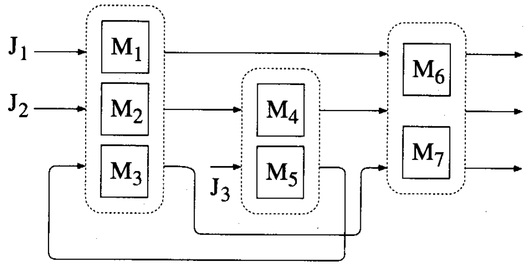
ジョブショップ型の生産ラインにおいて，各ショップに複数の機械が並列に存在するような問題であり，以下のように記述される．N^{J} 個の仕事 J_j $(j=1, \cdots, N^{\mathrm{J}})$ を，N^{M} 台の機械 M_i $(i=1, \cdots, N^{\mathrm{M}})$ で処理するものとする．仕事 J_j は，n_j 個の作業 O_k $(k=N_{j-1}+1, \cdots, N_j$；$N_j=\sum_{l=1}^{j} n_l$；$N_0=0)$ で構成され，各仕事の作業は，$\mathrm{O}_k \rightarrow \mathrm{O}_{k+1}$ $(k=N_{j-1}+1, \cdots, N_j-1)$ の順に処理される．各作業 O_k $(k=1, \cdots, N$；$N=N_{N^{\mathrm{J}}}=\sum_{j=1}^{N^{\mathrm{J}}} n_j)$ に対して，処理可能機械集合 $\mathcal{M}_k$ と処理タイプ δ_k といった属性があり，この処理タイプ δ_k と機械 M_i との組合せによって処理時間が決定するものとする．図3に，フレキシブルショップ問題のイメージを示しておく．

さらに，スケジューリングに際して次のような制約が課せられる場合を考える．

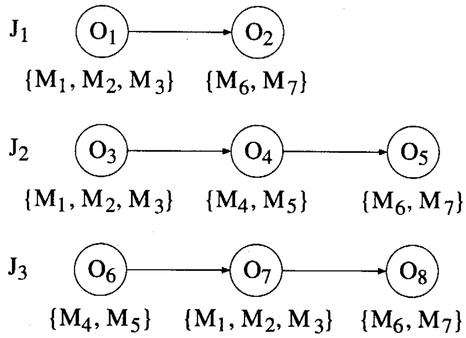
(a) 処理機械：各作業は処理可能機械のいずれか一つにおいて処理される．

(b) 段取り替え時間：ある機械上で連続して処理される作業の処理タイプが異なる場合，二つの作業の間に段取り替え時間が必要となる．段取り替え時間は前段取りと後段取りの二つの部分からなる．

(c) 次工程時間：ある仕事の二つの連続する作業間において，前の作業の処理が終了してから次の作業の処理を開始するまでの時間（次工程時間）を，あらかじめ与えられる最大値と最小値の範囲内にしなければならない．



(a) 工程から見た場合



(b) 作業から見た場合

図3 問題例（7機械3仕事8作業）

3.2 混合整数計画モデルへの定式化

フレキシブルショップ問題に対する混合整数計画モデルの一例を紹介しよう．定式化の準備として，まず，

N^{J}：仕事数，

N^{M}：機械数，

N：作業数 $(=N_{N^{\mathrm{J}}})$

とし，機械 M_i，仕事 J_j および作業 O_k に対する属性を以下のように定義する．

(a) 機械属性

$\mu_{i\delta}$：処理タイプ δ の単位量当たり処理時間．

(b) 仕事属性

d_j：納期．

n_j：作業数．

(c) 作業属性

δ_k：処理タイプ．

r_k^{O}：処理量．

s_k^1, s_k^2：前段取り時間および後段取り時間．

s_k^3, s_k^4：次工程時間の最小値および最大値．

$\mathcal{M}_k$：処理可能機械集合．

スケジュールの評価について，ここでは最大完了時間 $C_{\max}$ と納期遅れ和 T_{sum} を考え，

$$z_1=C_{\max}=\max_j t_{N_j}^{\mathrm{F}}=\max_k t_k^{\mathrm{F}} \quad (1)$$

$$z_2=T_{\mathrm{sum}}=\sum_j\{\max(0, t_{N_j}^{\mathrm{F}}-d_j)\} \quad (2)$$

とし，これらの重みつき和：

$$z = w_1 z_1 + w_2 z_2 \tag{3}$$

で目的関数が与えられるものとしよう．なお，

t_k^S：作業 O_k の処理開始時刻，

t_k^F：作業 O_k の処理完了時刻，

w_1, w_2：正の定数

である．

さて，スケジュールを表すために0-1変数 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ および $\boldsymbol{u}$ を導入・定義する．

x_{ik} $(i=1, \cdots, N^M ; k=1, \cdots, N)$：

O_k が M_i 上で処理されるときに $x_{ik}=1$．そうでないときに $x_{ik}=1$.

y_{kl} $(k, l=1, \cdots, N ; k>0)$：

O_k が O_l に先行して処理されるときに $y_{kl}=1$．そうでないときに $y_{kl}=1$.

u_{kl} $(k, l=1, \cdots, N ; k>l)$：

$x_{ik}=x_{il}$ $(\forall i)$ のときに $u_{kl}=1$．そうでないときに $u_{kl}=1$.

ここで，$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{x}$ に依存する従属変数である．また，機械割付け $(\boldsymbol{x})$ と開始時刻 $(\boldsymbol{t}^S)$ が決まると完了時刻 $(\boldsymbol{t}^F)$ が一意に定まる．よって，独立変数は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ および $\boldsymbol{t}^S$ となる．さらに，式(3)を目的関数とする最適スケジュールは，セミアクティブ・スケジュール（作業処理順序を変更することなしに，いずれの作業もそれ以上早く始めることができないようなスケジュール）になることがわかっている[5]．したがって，スケジュールのクラスをセミアクティブに限定した場合，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はセミアクティブ・スケジュールに1対1で対応することになり，目的関数(3)は $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ によって定まることになる．

以上より，フレキシブルショップ問題を次のように定式化できる．

minimize

$$z = w_1 z_1 + w_2 z_2 \tag{4}$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{N^M} x_{ik} = 1 \qquad (k=1, \ldots, N) \tag{5}$$

$$x_{ik} = 0 \qquad (i \notin \mathcal{M}_k ; k=1, \ldots, N) \tag{6}$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \qquad (i=1, \ldots, N^M ; k=1, \ldots, N) \tag{7}$$

$$y_{kl} \in \{0, 1\} \qquad (k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{8}$$

$$u_{kl} \geq x_{ik} + x_{il} - 1 \qquad (i=1, \ldots, N^M ; k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{9}$$

$$u_{kl} \leq x_{ik} - x_{il} + 1 \qquad (i=1, \ldots, N^M ; k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{10}$$

$$u_{kl} \leq x_{il} - x_{ik} + 1 \qquad (i=1, \ldots, N^M ; k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{11}$$

$$u_{kl} \in \{0, 1\} \qquad (k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{12}$$

$$t_k^S \geq t_{k-1}^F + s_{k-1}^3 \qquad (k=N_{j-1}+2, \ldots, N_j ; j=1, \ldots, N^J) \tag{13}$$

$$t_k^S \leq t_{k-1}^F + s_{k-1}^4 \qquad (k=N_{j-1}+2, \ldots, N_j ; j=1, \ldots, N^J) \tag{14}$$

$$t_k^S \geq t_l^F + (s_l^2 + s_k^1)\Delta_{kl} - M(1 + y_{kl} - u_{kl}) \qquad (k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{15}$$

$$t_l^S \geq t_k^F + (s_k^2 + s_l^1)\Delta_{kl} - M(2 - y_{kl} - u_{kl}) \qquad (k, l=1, \ldots, N ; k>l) \tag{16}$$

$$t_k^S \geq 0 \qquad (k=N_{j-1}+1 ; j=1, \ldots, N^J) \tag{17}$$

$$t_k^F = t_k^S + \sum_{i=1}^{N^M} (r_k^O \mu_i \delta_k x_{ik}) \qquad (k=1, \ldots, N) \tag{18}$$

$$z_1 \geq t_{N_j}^F \qquad (j=1, \ldots, N^J) \tag{19}$$

$$z_2 \geq \sum_{j=1}^{N^J} \max(0, t_{N_j}^F - d_j) \tag{20}$$

ここで，式(15)および(16)の Δ_{kl} は，

$$\Delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \delta_k \neq \delta_l \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{21}$$

で定義される定数であり，M は十分大きな正の定数である．また，制約条件の意味するところ（概略）は以下の通りである．

式(5)～(7)…作業の処理可能機械への割付け.

式(8)…作業処理順序.

式(9)～(12)…変数 $\boldsymbol{u}$ の設定.

式(13)～(17)…各作業の開始時刻（次工程時間および段取り替え時間を考慮）.

式(18)…各作業の完了時刻.

さらに，式(20)の右辺に非線形項“max(・)”が含まれている．これについては，

$$z_2 \geq \sum_{j=1}^{N^J} z_j^D \tag{22}$$

$$z_j^D \geq 0 \qquad (j=1, \ldots, N^J) \tag{23}$$

$$z_j^D \geq t_{N_j}^F - d_j \qquad (j=1, \ldots, N^J) \tag{24}$$

のように，変数 z^D を追加することによって，不等式を含むいくつかの線形式に変換可能である．

3.3 数理計画法とメタヒューリスティクスのハイブリッド手法

数理計画法とメタヒューリスティクスとのハイブリッド手法については，文献[1]でも紹介・整理されているが，ここでは，前節で示したフレキシブルショップ問題の混合整数計画モデルをベースとした遺伝アルゴリズム（GA）と数理計画法（MP）とのハイブリッド解法を紹介する[2]．構成としては，2.で紹介した機能的分散構造に注目した分解をベースとし，並列

同期型（図2(b)）において解法Aおよび解法Bとしてそれぞれ GA と MP を用いるもの（GA によって一部の決定変数が固定された部分問題を分枝限定法で評価する形）を考える（図4）．

ここで用いる数理計画モデルとしては，節3.2で示した混合整数計画モデルにおいて，

方法 H_1：機械割付け x を GA で探索する場合，

方法 H_2：作業処理順序 y を GA で探索する場合

の二つを考える．このとき，方法 H_1 では，GA の個体情報によって機械割付けを決定し，分枝限定法を用いて各機械上での処理順序を定めることにより，スケジュールが作成される．一方，方法 H_2 では，個体情報によって作業の先行関係をあらかじめ固定した上で，分枝限定法を用いて機械割付けを定めることによってスケジュールが作成されることになる．

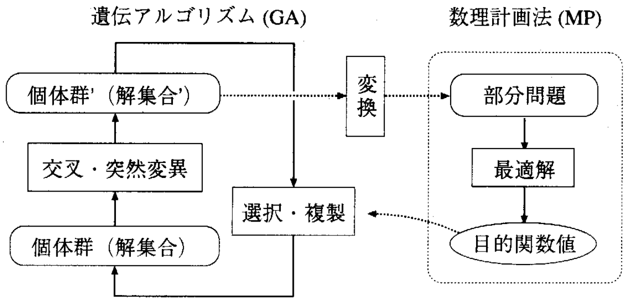


図4　ハイブリッド手法の枠組み

3.4　計算例

例題として，

E_1：12機械6仕事18作業問題，

E_2：6機械6仕事18作業問題，

E_3：12機械9仕事45作業問題

を考え，方法 H_1 および H_2 をそれぞれ適用した結果を紹介しよう．これらの例題はいずれも工程数が3で，各工程における利用可能機械台数が2あるいは3である．また，数理計画法としては CPLEX[6] を用いた．

表1に，得られた最良スケジュールの評価値の最小，最大，平均および標準偏差を示す（GA で用いる擬似乱数の系列を変えて20回試行）．なお，表には遺伝アルゴリズムのみ（GA）および数理計画法のみ（MP）を用いて得られた結果も合わせて示している．計算時間（平均[秒]）については，UltraSPARC III 750 MHz によるものである．

なお，例題 E_3（表中で＊印を付した部分）については，個体の評価に膨大な計算時間が必要となり，方法 H_2 の適用による結果は得られていない．また，MP に関しても同様に，最適解を得るには膨大な計算

表1　ハイブリッド解法の適用結果

(a)　例題 E_1

方法	変数(整数変数)	制約条件	目的関数値				計算時間 [秒]
			最小	最大	平均	標準偏差	平均
H_1	—	—	17.75	20.00	18.85	0.63	41.18
H_2	—	—	17.75	17.75	17.75	0.00	2206.28
GA	—	—	17.75	21.50	20.31	0.84	0.11
MP	560 (522)	6,248	17.75	—	—	—	41.72

(b)　例題 E_2

方法	変数(整数変数)	制約条件	目的関数値				計算時間 [秒]
			最小	最大	平均	標準偏差	平均
H_1	—	—	29.75	32.00	31.04	0.58	155.46
H_2	—	—	29.50	31.00	29.93	0.42	19659.18
GA	—	—	32.75	37.25	35.59	1.24	0.12
MP	452 (414)	3,393	29.50	—	—	—	8411.13

(c)　例題 E_3

方法	変数(整数変数)	制約条件	目的関数値				計算時間 [秒]
			最小	最大	平均	標準偏差	平均
H_1	—	—	45.75	48.50	47.38	0.87	18769.59
H_2	—	—	—*	—*	—*	—*	—*
GA	—	—	68.75	91.75	82.08	6.18	0.55
MP	2,612 (2,520)	39,312	67.75*	—	—	—	23626.08*

時間が必要となるため，分枝限定法の計算における生成ノード（部分問題）数が1,000,000に達した時点で計算を打ち切った場合の結果を示してある．

表1より，方法H_2は，例題E_1，E_2およびE_3に対して，最適性の高い解を安定して得ることができるものの長い計算時間を要する，厳密解法に近い手法であることが分かる．一方，方法H_1はH_2よりも解の質が低くなる場合があるものの，CPLEXの求解に要する時間も比較的短く，解の良さと計算時間のバランスがとれた方法であることが分かる．

このように，ハイブリッド解法の構成の仕方によって，それぞれに特徴のある結果が得られることがわかる．現時点で標準的なガイドラインのようなものは得られていないが，問題や要件に応じてうまくハイブリッド解法の構造や手法を選択・実装することが効果的であり，また肝要であると言える．

4. おわりに

本稿では，最適化問題の分散構造とハイブリッドの形態を概観するとともに，フレキシブルショップ・スケジューリング問題を例として取り上げ，混合整数計画モデルとしての定式化例および数理計画パッケージとメタヒューリスティクスのハイブリッド解法を紹介した．今後，数理計画ベースのアプローチがますます活発化することに期待するとともに，本稿がその一助になれば幸いである．

参考文献

[1] 森田，ハイブリッド・スケジューリング法，スケジューリング・シンポジウム2005講演論文集（チュートリアル講演），20-25, 2005.

[2] 榊原，玉置，村尾，北村，フレキシブルショップ・スケジューリング問題の数理計画モデルに基づくハイブリッド解法，システム制御情報学会論文誌，Vol. 17, No. 6, 257-263, 2004.

[3] 田村，大規模システム—モデリング・制御・意思決定—，昭晃堂，1986.

[4] Ph. Preux and E. Talbi, Towards Hybrid Evolutionary Algorithms, *International Transactions in Operational Research*, Vol. 6, 557-570, 1999.

[5] M. Pinedo, *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*, 2nd Ed., Prentice-Hall, 2002.

[6] *CPLEX6.6*, http://www.ilog.co.jp/, ILOG Inc., 1999.