面積付き平面グラフに対する定数角形直交描画

川口　晃史
（京都大学工学部情報学科　現所属・同大学院情報学研究科数理工学専攻）
指導教員　永持　仁 教授

1.　はじめに

2項関係の数学的な表現であるグラフを平面に埋め込む研究は，古くはFāry (1948) の直線描画やTutte (1960) の凸描画に起源を持ち，1970年代にはVLSIの設計への応用に関して，グラフの矩形描画に関する研究が盛んに進められてきた．その後，計算機の普及に伴い，有限要素法における曲面の三角形分割，部屋の間取設計，フローチャートの図示，地理情報の表現などあらゆる分野において情報を効率よく分かりやすく可視化することが要求されてきており，その中でグラフの自動描画はコア技術として大変重要な役割を果たしている．可視化の目的も含めたグラフの自動描画に関する研究は1980年頃から始まり，様々な描画表現法とその数学的構造，計算の複雑さの研究が押し進められている[1]．特に，平面上に枝を交差なく埋め込むことのできるグラフは平面グラフと呼ばれ，その描画問題は最も基本的な研究課題であり，本研究でもこの問題を取り扱う．平面グラフ $G=(V, E, F, c_0)$ は，節点集合 V，枝集合 E，内面集合 F および外面 c_0 により定められる．ここで，本研究で扱う平面グラフのクラスを3通り与えておく．**分割グラフ**とは，長方形を鉛直または水平な直線で再帰的に分割することで得られる分割図において，各交点と四隅に節点を置いて作られる平面グラフである（この再帰的な分割過程を表す2分木 T を分割木という）．**長方形グラフ**とは，外周と内面をすべて長方形で描くことのできる平面グラフであり，**3連結平面グラフ**とは，任意の2節点とそれらに接続する枝を取り除いても連結である平面グラフと定義される．

本研究では，各内面に**描画において実現すべき面積**が指定されている平面グラフに対する直交描画法を取り扱う．これまで面積付き平面グラフの描画法については，Rahmanら[2]が分割グラフの，ある特別な場合に対して示した8角形直交描画の結果しか知られていなかったが，本研究では上記で示した三つのクラスすべてに対して面積付きの描画に関する結果を導いた．

2.　定数角形直交描画

平面グラフ $G=(V, E, F, c_0)$ の**直交描画** (orthogonal drawing) とは，各枝が垂直直線分，水平直線分の系列で描かれたものである．特に，自然数 k に対し，外面 c_0 が長方形で，各内面 $c \in F$ の持つ多角形の角の個数が高々 k 個であるとき ***k*** **角形直交描画**という．例えば，長方形描画（外面と各内面が長方形であるもの）は，どの内面の角数も4個以下であるので，4角形直交描画とみなせる．

平面グラフ G の各内面 $c_i \in F$ に面積 $a_i > 0$ が与えられるとき G を**面積付き平面グラフ**と呼ぶ．面積付き平面グラフ G に対する直交描画とは，さらに，各内面 c_i の面積を a_i と等しくさせるものである．図1(b)は図1(a)の面積付き平面グラフに対して実現した直交描画の例である．

本研究では以下の四つの理論的な結果を導いた．

定理1　面積付き分割グラフは10角形直交描画を持つ．分割木と外周の長方形およびその4頂点に対応する節点が与えられたとき，描画を線形時間で求めることができる．　□

定理2　面積付き長方形グラフは18角形直交描画を持つ．外周の長方形およびその4頂点に対応する節点が与えられたとき，描画を $O(|V|\log|V|)$ 時間で求めることができる．　□

定理3　最大次数が3である面積付き3連結平面グラフは46角形直交描画を持ち，この描画を $O(|V|\log$

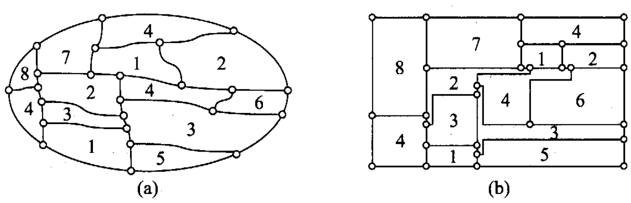

図1　(a)面積付き平面グラフの例（各内面内の数字は指定された面積を表す）；(b)10角形直交描画

$|V|)$ 時間で求めることができる． □

定理 4 最大次数が 4 であり，外周上に次数 4 の節点がない面積付き 3 連結平面グラフは，各内面 $c \in F$ が高々 $10p_c+46$ 角形で描け，高々 $6|V|$ 本の線分からなる直交描画を持つ（p_c は内面 c の周上にある次数が 4 の節点数）．この描画を $O(|V|\log|V|)$ 時間で求めることができる． □

3. 証明の概略

定理 1 の証明の概略 入力として面積付き分割グラフ G，四隅の節点が定められた G の外周となる長方形 P_r，および G を与える再帰的分割を記述する分割木 T が与えられている．分割木 T に対する深さ優先探索順に，P_r を再帰的に分割して分割線上の節点を適切な位置に固定していくことで G 全体の描画を構築する．ここで，指定された面積を実現するためには，分割部分で直線分かあるいは縦・横・縦または横・縦・横の直交線分列を用いる必要が生じる．しかし，適当に分割部分を固定すると後で処理する内面の角数が 10 個に収まらなくなる．これを回避するために，用いる線分の長さを適切な範囲に制御する．これを再帰的に正しく実行させるために 20 種類に上る動作ルールを抽出した．その結果，計算の進行中に決して 10 角形を超える内面が形成されないことを示すことができた．

定理 2 の証明の概略 長方形グラフから分割グラフへ内面を分割することによりに変換する．このとき，どの内面も高々四つの内面にしか分割されないように変換できることを証明し，定理 1 より，面積付き長方形グラフに対する 18 角形直交描画が得られる．

定理 3 の証明の概略 最大次数が 3 の場合，内面を分割することにより 3 連結平面グラフを長方形グラフに変換し，さらに内面を分割して分割グラフに変換する．このとき，3 連結平面グラフの内面が高々12 個の内面にしか分割されないように変換できることを証明し，定理 1 より，46 角形直交描画が得られる．

定理 4 の証明の概略 最大次数が 4 の場合，次数が 4 の節点を内面に置き換え，最大次数を 3 に下げる．このグラフの 46 角形直交描画を求め，置き換えた内面を周囲の内面に結合して次数 4 の節点に戻す．この操作により得られる描画は，最大次数 4 の面積付き 3 連結平面グラフの直交描画であり，各内面 c は高々 $10p_c+46$ 個の角を持つ．

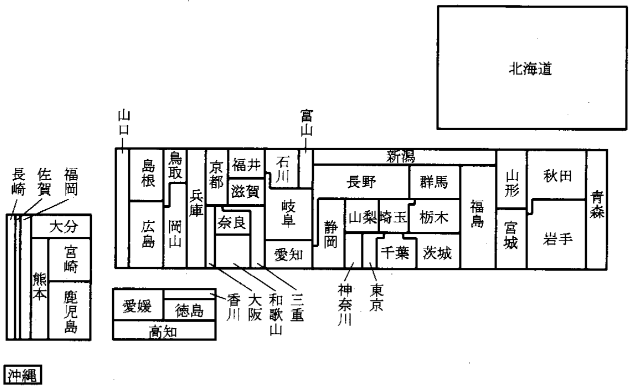

図 2 10 角形直交描画による日本列島の描画例

4. まとめ

本研究では，グラフの自動描画の理論基盤として，面積付き分割グラフの直交描画可能性を論じた．一般に，3 点連結でない平面グラフや次数 4 の節点を定数個以上持つ平面グラフには定数角形直交描画が存在しないことが容易に分かるので，本研究で最大次数が 3 の 3 連結平面グラフが 46 角形直交描画を持つことを示したことは，定数角形直交描画を持ちうる可能性のあるクラスに対しては肯定的に問題を解決したことを意味する．また構成的な証明からは線形かそれに準じる高速なアルゴリズムを得ることができた．最後に，本研究のアルゴリズムよる描画例を図 2 に示しておく．日本列島の北海道，本州，四国，九州，沖縄の五島の都道府県を内面とする平面グラフ各連結成分はいずれも分割グラフであることが判明したので，実際の都道府県の面積に比例した値を持つ 10 角形直交描画が定理 1 を使って得られる．定理 1 のアルゴリズムを実装して日本列島を描画したものを図 2 に示す（この出力例では各内面は 4，6，8 角形で描かれている）．

参考文献

[1] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia and I. G. Tollis: Graph drawing: Algorithms for the visualization of graphs, Prentice hall, 1999.

[2] M. S. Rahman, K. Miura and T. Nishizeki: Octagonal drawings of plane graphs with prescribed face areas, Vol. 3353 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 320-331, 2004.