# 劣モジュラ多面体上の最適化アルゴリズムの研究

永野　清仁
（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・同大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）
指導教員　松井知己 助教授

## 1. 概要

劣モジュラ関数はグラフ・ネットワークの理論などにおいて現れ，組合せ最適化問題を扱う上で基本的かつ重要な関数である．また，劣モジュラ性と離散変数の世界における凸性は深く関わっており，この流れと関連して近年室田ら日本の研究者を中心に離散凸解析の研究が活発になされている．

本論文は劣モジュラ関数に関連した多面体，劣モジュラ多面体と基多面体の上での最適化問題に関する二つの成果を含む．一つ目の成果として，任意の点から任意の方向へ劣モジュラ多面体内をどれだけ移動できるかが強多項式時間でわかることを初めて示した．もう一つの成果は，基多面体上の変数分離凸関数最小化のスケーリング法を用いたアルゴリズムに関するものである．特に辞書式最適基問題については既存の解法より少ない計算量で厳密解が求まることを示した．

## 2. 劣モジュラ多面体・基多面体

$V=\{1,\cdots,n\}$ とする．$V$ の部分集合全体で定義される関数 $f:2^V\to\mathbf{R}$ が $f(\phi)=0$ を満たし，かつ劣モジュラ，つまり任意の $X, Y\subseteq V$ で不等式

$$f(X)+(Y)\geq f(X\cup Y)+f(X\cap Y)$$

を満たすとする．さらに $f$ の関数値呼出しにかかる手間の上限を $\gamma$ とする．関数 $f$ に対し劣モジュラ多面体 $\mathbf{P}(f)$，基多面体 $\mathbf{B}(f)$ をそれぞれ

$$\mathbf{P}(f)=\{x\in\mathbf{R}^n|\sum_{i\in X}x_i\leq f(X)(\forall X\subseteq V)\},$$

$$\mathbf{B}(f)=\{x\in\mathbf{P}(f)|\sum_{i\in V}x_i=f(V)\}$$

と定義する．これらの多面体はともに指数個の制約式で定義されている．$\mathbf{P}(f)$，$\mathbf{B}(f)$ はともに非空であり，$\mathbf{B}(f)$ は有界であることが知られている．

劣モジュラ関数最小化，つまり $f$ の関数値が最小値をとる $X\subseteq V$ を求める問題は，組合せ最適化でしばしば現れる基本的な問題である．1999年，岩田－Fleischer－藤重とSchrijverの二つのグループは，基多面体上の最小 $l_1$-ノルム点を求める問題（と等価な問題）を扱い，互いに異なるテクニックを用いて，劣モジュラ関数最小化の初めての組合せ的な多項式時間解法を与えている．

$\mathbf{P}(f)$ や $\mathbf{B}(f)$ のメンバーシップ問題は劣モジュラ関数最小化問題に帰着されるが，計算量の意味でより簡単な問題であるかどうかは明らかにされていない．

## 3. 劣モジュラ多面体内の直線探索

初期点 $x_0\in\mathbf{P}(f)$ と方向ベクトル $a\in\mathbf{R}^n$ が与えられているとする．点 $x_0$ から $a$ 方向に $\mathbf{P}(f)$ 内をどれだけ移動できるかを求める問題

$$\begin{array}{ll}\text{max.} & t\in\mathbf{R}\\ \text{sub. to} & x_0+t_a\in\mathbf{P}(f)\end{array}\qquad(1)$$

を劣モジュラ多面体内直線探索問題とよび，最適値を $t^*\geq 0$ とする．図1は $n=2$ の場合の例である．この問題はネットワークで入口間・出口間の比率を考慮した最大流問題なども含む．

各 $i\in V$ で $e_i\in\mathbf{R}^n$ を第 $i$ 成分についての単位ベクトルとする．方向ベクトルが $a=e_i-e_j(i\neq j)$ のとき，最適値 $t^*$ は交換容量とよばれ，このとき問題(1)は劣モジュラ関数最小化と本質的に等価である．多くの劣モジュラ最適化問題の解法は，交換容量を求める操作を繰返すことで構成されている．問題(1)は交換容量を求める問題の自然な一般化である．本論文ではこの問題に対し初めての強多項式時間解法，つまり算術演算と $f$ の関数値呼出しの回数が $n$ のみの多項式でおさえられるアルゴリズムを与えた．

### 強多項式時間アルゴリズム

本論文ではまず，既存の劣モジュラ関数最小化アル

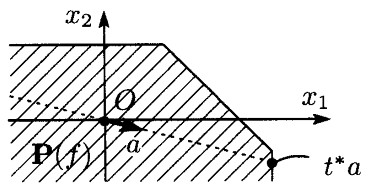


図1　劣モジュラ多面体内直線探索問題

ゴリズムと漸近的に同じ計算量で，任意の非負実数 $t$ と最適値 $t^*$ の大小比較を実行できることを示した．特に，岩田[3]の完全に組合せ的な劣モジュラ関数最小化アルゴリズムを用いることでこの大小比較が本質的に乗除演算を用いずに実行できる．

最適値 $t^*$ と任意の非負実数の大小比較を行う手続きをCOVとし，特に本質的に乗除算をせずに実行する手続きをL-COVとする．Megiddo[4]の（天才的な！）パラメトリック・サーチ法の枠組みを用いて，手続きL-COV中の比較演算の部分に手続きCOVを組込むことで，最適値 $t^*$ の値が未知の状態でL-COV($t^*$)を実行させせることで，問題(1)が強多項式時間で解けることを示した．

## 4.　基多面体上の分離凸関数最小化

$f$ を整数値関数とし，各 $i\in V$ で関数 $g_i$ を1変数凸関数とする．$\mathbf{B}(f)$ 上の分離凸関数最小化問題

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \sum_{i\in V} g_i(x_i) \\ \text{sub. to} & x\in\mathbf{B}(f) \end{array} \tag{2}$$

を扱う．各 $i\in V$ で $w_i$ を用いて $g_i(x)=x_i^2/w_i$ と表される場合，問題(2)は特に $w\in\mathbf{R}^n$ に関する辞書式最適基問題とよばれる．辞書式最適基問題は藤重[2]が導入した問題であり，ある種の公平な最大流を求める問題を含む．

これらの問題については，劣モジュラ関数最小化を部分問題として繰返し解くような解法しか知られていない．本論文では問題(2)に対し，劣モジュラ関数最小化を繰返し解くのではなく，直接的なアプローチのスケーリング・アルゴリズムを与え，十分良い近似解を得られることを示した．さらに，整数ベクトル $w$ に関する辞書式最適基問題については近似解を適当に丸めることで厳密解を構成できることを示した．

### スケーリング・アルゴリズム

$\delta\in\mathbf{Q}$ について，点集合 $\mathbf{B}(f)\cap$（幅 $\delta$ の格子の点）は一般に良い性質を持たない．このため問題(2)へのスケーリング法の適用は単純にはできない．本論文では，Fleischer-Iwata[1]の劣モジュラ流問題に対する手法を凸費用の場合に発展させることで，問題(2)のスケーリング・アルゴリズムを与えた．

非正整数 $k^*$ を用いて，$\delta^*=2^{k^*}$ とおく．各 $i\in V$ で関数 $g_i$ を幅 $\delta^*$ の区分線形関数で近似した関数を $\bar{g}_i^{(\delta^*)}$ とし，問題(2)の近似問題

$$\begin{array}{ll} \text{min.} & \sum_{i\in V} \bar{g}_i^{(\delta^*)}(x_i) \\ \text{sub. to} & x\in\mathbf{B}(f) \end{array} \tag{3}$$

を考える．本論文のスケーリング・アルゴリズムでは，点 $\hat{x}\in\mathbf{R}^V$ で，問題(3)のある最適解 $x_{\delta^*}$ について $\|\hat{x}-x_{\delta^*}\|_\infty\leq n^2\delta^*$ を満たすものを $\mathrm{O}\left(n^5\gamma\log\frac{M}{\delta^*}\right)$ で求められる．ここで $M=\max\{|f(X)|\,|X\subseteq V\}$ とする．

### 辞書式最適基問題の厳密解法

$w$ を整数ベクトルとし，$K=\max\{w_i|i\in V\}$ とする．$w$ に関する辞書式最適基問題の最適解 $x^*$ をとする．$x^*$ の各成分の分母が高々 $Kn$ の有理数となる．適切な $\delta^*$ の設定により $\|x^*-\hat{x}\|_\infty\leq 1/2K^2n^2$ を満たす近似解 $\hat{x}$ を $\mathrm{O}(n^5\log(KnM))$ で求められる．さらに，$\hat{x}$ をうまく丸めることで厳密解 $x^*$ が構成でき，全体として既存の解法よりよい計算量で問題が解ける．

### 参考文献


[1] L. Fleischer and S. Iwata : Improved algorithms for submodular function minimization and submodular flow. *Proceedings of the 32nd ACM Symposium on Theory of Computing* (2000), pp. 107-116.

[2] S. Fujishige : Lexicographically optimal base of a polymatroid with respect to a weight vector. *Math. Oper. Res.* **5** (1980), pp. 186-196.

[3] S. Iwata : A fully combinatorial algorithm for submodular function minimization. *J. Combin. Theory, Ser. B* **84** (2002), pp. 203-212.

[4] N. Megiddo : Combinatorial optimization with rational objective functions. *Math. Oper. Res.* **4** (1979), pp. 414-424.