

# 半正定値計画法を用いた構造物の不確定性解析

## Uncertainty Analysis of Structures via Semidefinite Program

寒野 善博<sup>a</sup>, 竹脇 出<sup>b</sup>

Yoshihiro Kanno<sup>a</sup>, Izuru Takewaki<sup>b</sup>

<sup>a</sup> 東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

Department of Mathematical Informatics

University of Tokyo

Tokyo 113-8656, Japan

kanno@mist.i.u-tokyo.ac.jp

<sup>b</sup> 京都大学大学院 工学研究科 都市環境工学専攻

Department of Urban and Environmental Engineering

Kyoto University

Kyoto 615-8540, Japan

takewaki@archi.kyoto-u.ac.jp

### 概要

構造物の剛性と構造物に作用する外力の双方が非確率論的な不確定性モデルに従ってばらつくときに、構造物の静的な応答のばらつきを安全側で評価する楕円体を求める手法を提案する。この問題は、不確定な線形方程式の解のすべてを含むような楕円体を求める問題に相当する。 $S$ -lemmaを用いることにより、このような楕円体が半正定値計画問題を解くことで得られることを示す。不確定な線形方程式に対する区間解析で用いられる区間は1次元上の楕円体とみなせるため、提案手法は通常の区間解析の枠組を特別な場合として含む。平面骨組構造物に対する数値実験により、得られる楕円体が応答量のばらつきを安全側で精度良く近似することを例証する。

**Keywords:** 不確定性, ロバスト性, 半正定値計画法, 安全側評価, 区間解析

## 1 はじめに

現実の構造物では、施工誤差や外乱の情報不足、部材の損傷などにより、種々の不確定な要因を含むことが普通である。従って、不確定なパラメータを含む構造物の応答のばらつきを適切に評価することは、極めて重要である。

構造系が持つパラメータの不確定性のモデルには、大別して確率論的モデルと非確率論的モデルの2つがある。確率論的な不確定性モデルに基づく構造物の解析と設計には、信頼性理論が広く用いられている(例えば [25])。確率論的な不確定性モデルでは、不確定なパラメータの確率分布を適切に推定する必要がある。ところが、実問題においては、不確定性の統計量を精確に予測することは困難な場合が多い。これに対し、非確率論的な不確定性モデルでは統計量は必要なく、不確定パラメータが属する有界集合のみが与えられる。

構造物の非確率論的な不確定性解析の手法としては、凸モデル (convex model) [3, 21] や区間解析 (interval analysis) [1, 11] が知られている。凸モデルは不確定パラメータに関する応答量の線形近似に基づくため、不確定パラメータのばらつきが大きい場合には有効ではない。一方、区間解析は、不確定性を有する線形方程式 (uncertain linear equations, ULE) の解が属する区間を求める手法として開発され [1, 19]、その後、不確定な構造系の解析に応用されている [11, 18, 23]。区間解析を用いると、通常、応答量の安全側の境界値が得られることが保証される。しかし、不確定パラメータの数やばらつきが大きくなると、区間解析の解は応答量のばらつきの実際の上下限値から大きく離れ、安全側すぎる評価となる。また近年、非確率論的な不確定性を有する系のロバスト性を評価する枠組として、インフォ・ギャップ決定理論が提案され [2]、構造物のロバスト性解析にも適用されている [13, 27]。

種々の凸計画問題に対して、Ben-Tal and Nemirovski [8] はロバスト最適化の概念と手法を提案した。ここでは、最適化問題を定義するデータが非確率論的な不確定性を有することを仮定している。Calafiore and El Ghaoui [10] は不確定な線形方程式のデータが linear fractional representation という形式で記述できる場合に、その解を含む楕円体を求める手法を提案した。

本稿では、構造物が持つ剛性と構造物に作用する外力の双方に対して非確率論的な不確定性を考慮し、その構造物の静的な応答量のばらつきを予測する手法を提案する。まず、応答量の集合を含む楕円体のうち、最小のものを求める最適化問題を定式化する。次に、 $S$ -lemma [9] を用いることにより、この問題を近似する半正定値計画問題 (semidefinite program, SDP) を導く。この SDP 問題の解として得られる楕円は、応答量の集合を外側から近似することが保証されている。従って、応答量のばらつきの安全側の (保守的な) 評価であることが保証されるため、工学的に有用である。

一般に、区間解析では指数時間の計算量が必要である [4, Section 6.5.3]。これに対して、SDP 問題は、主双対内点法を用いると、多項式時間で解くことができる [17]。このことより、本稿で提案する手法は、応答量のばらつきの近似楕円体を多項式時間で求めることができる。

## 2 準備

ベクトル  $\mathbf{p} = (p_i) \in \mathbb{R}^n$  が  $p_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすとき、 $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$  と書く。簡単のため、 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  で定義されるベクトル  $(\mathbf{r}^T, \mathbf{s}^T)^T \in \mathbb{R}^{m+n}$  を単に  $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  と書くことがある。ベクトル  $\mathbf{p} = (p_i) \in \mathbb{R}^n$  の  $\ell_2, \ell_\infty$  ノルムを  $\|\mathbf{p}\|_2 = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})^{1/2}$ ,  $\|\mathbf{p}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |p_i|$  で定義する。  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  を対角要素に持つ  $n \times n$  対角行列を  $\text{Diag}(\mathbf{p})$  と書く。簡単のため、 $\mathbf{p}_l \in \mathbb{R}^{n_l}$  ( $l = 1, \dots, k$ ) に対して  $\text{Diag}((\mathbf{p}_1^T, \dots, \mathbf{p}_k^T)^T)$  を単に  $\text{Diag}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$  と書く。また、 $n \times n$  単位行列  $I$  の第  $j$  列ベクトルを  $\mathbf{e}_j^{(n)}$  で表す。

### 2.1 半正定値計画法

$n \times n$  対称行列の集合を  $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  で表す。また、対称な半正定値行列の集合を  $\mathcal{S}_+^n$  で表す。行列  $P$  が  $P \in \mathcal{S}_+^n$  を満たすとき  $P \succeq \mathbf{0}$  と書く。また、 $P, Q$  が  $P - Q \in \mathcal{S}_+^n$  を満たすとき、 $P \succeq Q$  と書く。

$A_i \in \mathcal{S}^n$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $C \in \mathcal{S}^n$  を定行列、 $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^m$  を定ベクトルとする。  $X$  を変

数とする次の最適化問題を、半正定値計画問題 (semidefinite programming, SDP) の等式標準形と呼ぶ [7]:

$$\min \{ \text{tr}(CX) : \text{tr}(A_i X) = b_i \ (i = 1, \dots, m), \ \mathcal{S}^n \ni X \succeq O \}. \quad (1)$$

問題 (1) の双対問題は、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  を変数として次のように書ける:

$$\max \left\{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} : C - \sum_{i=1}^m A_i y_i \succeq O \right\}. \quad (2)$$

主双対内点法を用いると、SDP 問題 (1), (2) を多項式時間で解くことができる [17]. このことから、SDP は現在までに様々な分野に応用されている. 特に構造物の最適設計の分野では、コンプライアンス制約に対するロバスト最適化 [6, 16], 固有振動数 [20] や座屈荷重係数 [5, 12] を制約とする最適設計, 応力制約を有するトラスのロバスト最適化 [14] などに対して、SDP を利用した解法が提案されている.

## 2.2 S-lemma

5 節において不確定性解析に関する問題から SDP を導く際に、中心的な役割を果たすのが S-lemma である. まず、次の補題を用意する.

**補題 2.1** ([10, Lemma A.3]).  $Q \in \mathcal{S}^n, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$  に対し、次の 2 つの条件

$$\begin{aligned} \text{(a):} \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \\ \text{(b):} \quad & \begin{pmatrix} Q & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & r \end{pmatrix} \succeq O \end{aligned}$$

は互いに等価である.

次に、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  の 2 次関数  $f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{m+k}(\mathbf{x})$  を

$$f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q_i \mathbf{x} + 2\mathbf{p}_i^T \mathbf{x} + r_i, \quad i = 0, 1, \dots, m+k$$

と表す. ただし、 $Q_i \in \mathcal{S}^n, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n, r_i \in \mathbb{R}$  である. 次の補題は S-lemma という名前で知られている.

**補題 2.2** (S-lemma [9, § 2.6.3]). 条件

$$f_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, f_m(\mathbf{x}) \geq 0 \implies f_0(\mathbf{x}) \geq 0$$

が成り立つための十分条件は、条件

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) &\geq \sum_{i=1}^m \tau_i f_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \tau_1, \dots, \tau_m &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たす  $\tau_1, \dots, \tau_m$  が存在することである.

補題 2.1 と補題 2.2 より、次の命題が直ちに得られる。

**命題 2.3.** 条件

$$f_1(\mathbf{x}) \geq 0, \dots, f_m(\mathbf{x}) \geq 0, f_{m+1}(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_{m+k}(\mathbf{x}) = 0 \implies f_0(\mathbf{x}) \geq 0$$

が成り立つための十分条件は、条件

$$\begin{pmatrix} Q_0 & \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_0^T & r_0 \end{pmatrix} \succeq \sum_{i=1}^{m+k} \tau_i \begin{pmatrix} Q_i & \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_i^T & r_i \end{pmatrix}, \quad \tau_1, \dots, \tau_m \geq 0$$

を満たす  $\tau_1, \dots, \tau_m$  が存在することである。

### 3 不確定性を有する線形方程式

行列  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  とベクトル  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$  に対し、 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  を変数とする線形方程式

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3)$$

を考える。本稿では、(3)において  $K$  および  $\mathbf{f}$  がばらつきを持つ状況を考える。特に、 $K$ ,  $\mathbf{f}$  が非確率論的な不確定性モデルに従ってばらつくときに、解  $\mathbf{u}$  のばらつきを評価することを考える。このような方程式 (3) を、不確定な線形方程式 (uncertain linear equations, ULE) と呼ぶ。

本節では、 $K$  および  $\mathbf{f}$  の不確定性モデルを定義する。 $K$ ,  $\mathbf{f}$  の公称値 (推定値) を  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  とおく。未知のパラメータ  $\zeta_a = (\zeta_{ai}) \in \mathbb{R}^s$ ,  $\zeta_f = (\zeta_{fj}) \in \mathbb{R}^{n^f}$  を用いて、 $K$  および  $\mathbf{f}$  の不確定性を次のように表す：

$$K = \tilde{K} + \sum_{i=1}^s a_i^0 \zeta_{ai} K_i, \quad (4)$$

$$\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + F_0 \zeta_f. \quad (5)$$

ここで、 $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は定行列であり、定数  $a_i^0 \geq 0$  は  $K_i$  に関するばらつきの大きさを表す。また、 $F_0 \in \mathbb{R}^{m \times n^f}$  は  $f_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) のばらつきの相対的な大きさと相関を表す定行列であり、条件  $\text{rank}(F_0) = n^f \leq m$  を満たすように定める。次に、(4)における行列  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を

$$K_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij} \mathbf{b}_{ij}^T \quad (6)$$

と表す。ここで、 $\beta_{ij} \in \mathbb{R}^m$  および  $\mathbf{b}_{ij} \in \mathbb{R}^n$  は定ベクトルである。

**例 3.1.** 構造系の解析では、線形方程式 (3) に釣合式を選ぶことが普通である。このとき、 $K$  は剛性行列と呼ばれ、 $K_i \in \mathcal{S}^n$  は対称な半正定値行列である。 $K_i$  の固有値を  $\lambda_j$  とおき、対応する正規直交な固有ベクトルを  $\phi_j \in \mathbb{R}^n$  で表す。いま、 $r = \text{rank}(K_i)$  とおき、 $\lambda_j$  を大きい順に並べると

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$$

が成り立つ。このとき、 $\mathbf{b}_{ij} = \sqrt{\lambda_j} \phi_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) とおくと  $K_i = \sum_{j=1}^r \beta_{ij} \mathbf{b}_{ij}^T$  が得られる。即ち、 $K_i \in \mathcal{S}_+^n$  は(6)の形式で表現できる。 ■

次に、ばらつきを表すパラメータ  $\zeta_a$  および  $\zeta_f$  の不確定性モデルとして、これらが条件

$$\zeta_a \in \mathcal{Z}_a, \quad \mathcal{Z}_a = \{\zeta_a \in \mathbb{R}^s \mid 1 \geq \|\zeta_a\|_\infty\}, \quad (7)$$

$$\zeta_f \in \mathcal{Z}_f, \quad \mathcal{Z}_f = \left\{ \zeta_f \in \mathbb{R}^{n^f} \mid 1 \geq \|\Delta_l \zeta_f\|_2, l = 1, \dots, n^\Delta \right\} \quad (8)$$

を満たしながら変動することを仮定する. ただし,  $\Delta_l \in \mathbb{R}^{m_l \times n^f}$  ( $l = 1, \dots, n^\Delta$ ) は定行列であり,  $\mathcal{Z}_f$  が有界であるように選ぶ. (4)–(8) をまとめると,  $K$  および  $\mathbf{f}$  が取り得る値の集合  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{F}$  は次のように書ける:

$$\mathcal{K} = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid K = \tilde{K} + \sum_{i=1}^s a_i^0 \zeta_{ai} \sum_{j=1}^r \beta_{ij} \mathbf{b}_{ij}^T, \zeta_a \in \mathcal{Z}_a \right\}, \quad (9)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}} + F_0 \zeta_f, \zeta_f \in \mathcal{Z}_f \right\}. \quad (10)$$

$\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{F}$  を  $K$ ,  $\mathbf{f}$  の不確定性集合 (uncertainty set) と呼ぶ. 線形方程式 (3) の不確定性は

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (K, \mathbf{f}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{F} \quad (11)$$

と表せる. さらに, (11) の解  $\mathbf{u}$  全体の集合  $\mathcal{U}$  は

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \exists (K, \mathbf{f}) \in \mathcal{K} \times \mathcal{F}, K\mathbf{u} = \mathbf{f}\} \quad (12)$$

と書ける. 以下では,  $\mathcal{U}$  が有界であることを仮定する.

**例 3.2.** ULE (11) に対する区間解析では, 通常,  $\mathbf{f}$  の各成分の不確定性が互いに独立な区間で表されると仮定する [1, 19]. 即ち,  $\mathbf{f}$  の不確定性集合  $\mathcal{F}$  が

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbb{R}^m \mid f_j \in [\tilde{f}_j - f_j^0, \tilde{f}_j + f_j^0], j = 1, \dots, m \right\} \quad (13)$$

の形で記述できることを仮定する. 不確定性を有する構造系の解析においても, 外力  $\mathbf{f}$  の不確定性モデルを(13)でモデル化することは多い [11, 18]. 以下では, 本稿で仮定する  $\mathbf{f}$  の不確定性モデル(8), (10)が(13)を特別な場合として含むことを示す. まず, (8)において  $n^\Delta = m$ ,  $m_1 = \dots = m_n = 1$  とおき,  $\Delta_l$  を  $\Delta_l = (\mathbf{e}_l^{(m)})^T$  で定義する. ただし,  $\mathbf{e}_l^{(m)}$  は  $m \times m$  単位行列の第  $l$  列ベクトルを表す. このとき, (8)で定義する  $\mathcal{Z}_f$  は  $\mathcal{Z}_f = \{\zeta_f \in \mathbb{R}^m \mid 1 \geq \|\zeta_f\|_\infty\}$  と書ける. 次に, (10)において定ベクトル  $\mathbf{f}^0 \in \mathbb{R}^m$  を定め,  $F_0 = \text{Diag}(\mathbf{f}^0)$  とおく. 以上により, (8), (10)は(13)に帰着する. ■

**例 3.3.** 例 3.2 と同様に, ULE (11) に対する区間解析では,  $K$  の各成分が互いに独立な区間で表されると仮定することが多い [1, 10]. 即ち,  $K$  が

$$K \in \{K = (K_{pq}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \underline{K}_{pq} \leq K_{pq} \leq \overline{K}_{pq} (p = 1, \dots, m; q = 1, \dots, n)\} \quad (14)$$

を満たしながらばらつくことを仮定する. 集合  $\mathcal{Z}_a^{\text{int}}$ ,  $\mathcal{K}^{\text{int}}$  を次のように定義する:

$$\mathcal{Z}_a^{\text{int}} = \{Z = (Z_{pq}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid 1 \geq |Z_{pq}| (p = 1, \dots, m; q = 1, \dots, n)\}, \quad (15)$$

$$\mathcal{K}^{\text{int}} = \left\{ K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid K = \tilde{K} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{pq}^0 Z_{pq} \mathbf{e}_p^{(m)} (\mathbf{e}_q^{(n)})^T, \zeta_a \in \mathcal{Z}_a^{\text{int}} \right\}. \quad (16)$$

行列  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を適当に並べ替えてベクトル  $\zeta_a \in \mathbb{R}^{mn}$  を作ることで, (15), (16) はそれぞれ(7), (9) の形式に書き直すことができる. ただし,  $s = mn, r = 1$  である. ところで  $\mathcal{K}^{\text{int}}$  は

$$\mathcal{K}^{\text{int}} = \left\{ K = (K_{pq}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \tilde{K}_{pq} - a_{pq}^0 \leq K_{pq} \leq \tilde{K}_{pq} + a_{pq}^0 \ (p = 1, \dots, m; q = 1, \dots, n) \right\}$$

と書き直せるが, これは(14) と本質的に同じ不確定性集合である. ■

例 3.2 と例 3.3 より, 本稿で扱う不確定性モデル(7)–(10) は, 通常の区間解析で用いられる不確定性モデルを特別な場合として含む, より一般的なモデルであることが分かる.

## 4 近似楕円体

### 4.1 楕円体

$\mu$  次元空間において, 中心が  $\hat{z} \in \mathbb{R}^\mu$  の楕円体は

$$\mathcal{E} = \{ z \in \mathbb{R}^\mu \mid z = \hat{z} + D\mathbf{y}, 1 \geq \|\mathbf{y}\|_2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^t \} \quad (17)$$

と表される. ここで,  $D \in \mathbb{R}^{\mu \times t}$  は  $\text{rank}(D) = t \leq \mu$  を満たす定行列であり, 楕円体の形状行列 (shape matrix) と呼ばれる.  $P = DD^T \in \mathcal{S}^\mu$  とおくと, (17) は

$$\mathcal{E}(P, \hat{z}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^\mu \mid \begin{pmatrix} P & (z - \hat{z}) \\ (z - \hat{z})^T & 1 \end{pmatrix} \succeq O \right\} \quad (18)$$

と書き直すことができる. ここで  $P$  は半正定値であり,  $\text{tr}(P)$  は楕円体の主軸の長さの 2 乗の和に等しい. 以下では,  $\text{tr}(P)$  を楕円(18) の大きさの指標として用いる.

### 4.2 解集合を近似する楕円体

定行列  $G \in \mathbb{R}^{n \times \mu}$  に対し, 集合  $\mathcal{U}_G \subseteq \mathbb{R}^\mu$  を

$$\mathcal{U}_G = \{ G^T \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U} \} \quad (19)$$

で定義する. つまり,  $\mathcal{U}_G$  は  $\mathbf{u}$  が ULE (11) の解であるときの  $G^T \mathbf{u}$  全ての集合である. 構造系の解析では,  $G^T \mathbf{u}$  は構造系の応答量 (節点変位や応力) を表す.

集合  $\mathcal{U}_G$  に対し, 条件

$$\mathcal{U}_G \subseteq \mathcal{E}(P, \hat{\mathbf{u}}) \quad (20)$$

を満たす  $\mu$  次元空間内の楕円体  $\mathcal{E}(P, \hat{\mathbf{u}})$  を考える. (20) を満たす楕円体は, 構造系の応答量  $G^T \mathbf{u}$  のばらつき全体を含むため,  $\mathcal{U}_G$  の安全側の (保守的な) 近似と考えられる.

条件(20) を満たす楕円体のうちで最小のものは,  $\mathcal{U}_G$  を精度良く近似する楕円体であると考えられる. 楕円体の大きさの指標に  $\text{tr}(P)$  を用いると,  $\mathcal{U}_G$  の保守的な近似楕円体を求める問題は,  $P \in \mathcal{S}^\mu, \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^\mu$  を変数として

$$\min \{ \text{tr}(P) : \mathcal{U}_G \subseteq \mathcal{E}(P, \hat{\mathbf{u}}) \} \quad (21)$$

と定式化できる。

問題 (21) の特別な場合として,  $K$  および  $\mathbf{f}$  の不確定性が例 3.2, 例 3.3 のように与えられた場合を考える.  $\mu = 1$  として  $G = \mathbf{e}_i^{(n)}$  と選ぶと, 問題 (21) は(11) の解の成分  $u_i$  が存在し得る区間を求める問題に相当する. この問題は, NP 困難であることが知られている [24]. 従って, 問題 (21) の大域的最適解を求めることは, 一般に困難である. そこで次節では, 問題 (21) を解きやすい問題で近似することを考える. 特に, 条件(20) を必ず満たす楕円体を最適解に持つような SDP 問題を定式化する.

## 5 安全側の境界を与える半正定値計画問題

行列  $\Psi_j$  およびベクトル  $\mathbf{q}_j$  を

$$\Psi_j = (\beta_{1j}, \dots, \beta_{sj}) \in \mathbb{R}^{m \times s}, \quad \mathbf{q}_j = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^s, \quad j = 1, \dots, r$$

で定義する. 行列  $F_0$  の左零空間を  $\mathcal{N}(F_0^T)$  と書き,  $\mathcal{N}(F_0^T)$  の基底を並べてできる行列を  $(F_0^T)^\perp$  で表す. また,  $F_0$  の擬逆行列 (Moore–Penrose pseudo-inverse) を  $F_0^\dagger \in \mathbb{R}^{n^f \times n}$  で表す. 以下ではまず, ULE (11) をより扱い易い形式に書き直すことを考える.

**命題 5.1.** 条件  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  が成り立つための必要十分条件は, 条件

$$[(F_0^T)^\perp]^T \left[ \tilde{K}\mathbf{u} + \sum_{j=1}^r \Psi_j \mathbf{q}_j - \tilde{\mathbf{f}} \right] = \mathbf{0}, \quad (22)$$

$$F_0^\dagger \left[ \tilde{K}\mathbf{u} + \sum_{j=1}^r \Psi_j \mathbf{q}_j - \tilde{\mathbf{f}} \right] = \zeta_f, \quad \zeta_f \in \mathcal{Z}_f, \quad (23)$$

$$q_{ij} = \zeta_{ai} a_i^0 \mathbf{b}_{ij}^T \mathbf{u}, \quad j = 1, \dots, r; \quad i = 1, \dots, m, \quad \zeta_a \in \mathcal{Z}_a \quad (24)$$

を満たす  $\mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^s$  ( $j = 1, \dots, r$ ) が存在することである.

命題 5.1 は, ULE (11) が条件(22)–(24) と等価であることを主張している. (11) と比較すると, (22)–(24) では不確定パラメータ  $\zeta_f, \zeta_a$  が等式の右辺にのみ現れることが特徴である.

次に,  $\zeta_f, \zeta_a$  を消去し, (22)–(24) を 2 次不等式で表現することを考える. このためには, 次の事実を用いる.

**補題 5.2.**

- (i)  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を定行列,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  を定ベクトルとする.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  が  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  を満たすための必要十分条件は, 2 次不等式  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \leq 0$  が成り立つことである.
- (ii) 条件  $\zeta_f \in \mathcal{Z}_f$  は, 2 次不等式系  $1 - \|\Delta_l \zeta_f\|_2^2 \geq 0$  ( $l = 1, \dots, n^\Delta$ ) と等価である.
- (iii)  $\mathbf{y} = (y_i) \in \mathbb{R}^r, \mathbf{z} = (z_i) \in \mathbb{R}^r$  ( $r \geq 2$ ) とおく. 条件

$$\mathbf{y} = \zeta \mathbf{z}, \quad 1 \geq |\zeta| \quad (25)$$

を満たす  $\zeta \in \mathbb{R}$  が存在するための必要十分条件は,  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  が条件

$$\|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{z}\|^2, \quad y_i z_{i+1} = y_{i+1} z_i, \quad i = 1, \dots, r-1$$

を満たすことである.

(iv)  $r = 1$  のとき, (iii) の条件(25) を満たす  $\zeta \in \mathbb{R}$  が存在するための必要十分条件は,  $y, z$  が 2 次不等式  $y^2 \leq z^2$  を満たすことである.

条件(22)–(24)において, まず(22) および(23) は, 補題 5.2 (i) および (ii) を用いることで, 2 次不等式系に帰着できる. また, (24) は補題 5.2 (iii) または (iv) を用いることで, 2 次不等式と 2 次の等式に帰着できる. 以上をまとめると, 次の結果が得られる.

**命題 5.3.**  $\hat{n} = sr + n$ ,  $\xi = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r, \mathbf{u}, 1) \in \mathbb{R}^{\hat{n}+1}$  とおく. (22)–(24) を満たす  $\zeta_f, \zeta_a$  が存在するための必要十分条件は,  $\xi$  に関する有限個の 2 次不等式に帰着できる. 即ち, 定行列  $\Omega_l \in \mathcal{S}^{\hat{n}+1}$ ,  $\Theta_{ij} \in \mathcal{S}^{\hat{n}+1}$  を用いて

$$\xi^T \Omega_l \xi \geq 0, \quad l = 1, \dots, n^\Delta + s + 1, \quad (26)$$

$$\xi^T \Theta_{ij} \xi = 0, \quad j = 1, \dots, r - 1; i = 1, \dots, s \quad (27)$$

の形式に帰着できる ( $\Omega_l, \Theta_{ij}$  の具体的な定義は [15] を参照).

次に, 問題 (21) の制約条件(20) について考える.  $\mathbf{w} = (w_l) \in \mathbb{R}^{n^\Delta+s+1}$ ,  $S = (S_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times (r-1)}$  とおき,  $Y : \mathbb{R}^{n^\Delta+s+1} \times \mathbb{R}^{s \times (r-1)} \rightarrow \mathcal{S}^{\hat{n}+1}$  を

$$Y(\mathbf{w}, S) = \sum_{l=1}^{n^\Delta+s+1} w_l \Omega_l + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{r-1} S_{ij} \Theta_{ij} \quad (28)$$

で定義する. さらに, Schur complement に関する次の補題を準備する.

**補題 5.4** ([9, pp.28]). 行列  $P \in \mathcal{S}^n$ ,  $Q \in \mathcal{S}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  に対し, 対称行列  $X$  を

$$X = \begin{pmatrix} P & A^T \\ A & Q \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき,  $X \succeq O$  が成り立つための必要十分条件は, 条件

$$P \succeq O, \quad Q - AP^\dagger A^T \succeq O, \quad (I - P^\dagger P)A^T = O$$

が成り立つことである.

$S$ -lemma (命題 2.3) と補題 5.4 を用いることで, 条件(20) の十分条件が得られる.

**命題 5.5.** 条件(20) が成り立つための十分条件は, 条件

$$\begin{pmatrix} P & \begin{pmatrix} O & G^T & -\hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} O \\ G \\ -\hat{\mathbf{u}}^T \end{pmatrix} & \text{Diag}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 1) - Y(\mathbf{w}, S) \end{pmatrix} \succeq O, \quad (29)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (30)$$

を満たす  $\mathbf{w}, S$  が存在することである.

証明. 簡単のため  $\widehat{G} = \begin{pmatrix} O & G^T & -\widehat{\mathbf{u}} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(\widehat{n}+1) \times \mu}$  とおくと,

$$\widehat{G}^T \boldsymbol{\xi} = G^T \mathbf{u} - \widehat{\mathbf{u}} \quad (31)$$

が成り立つ. (18), (31) より, 楕円体  $\mathcal{E}(P, \widehat{\mathbf{u}})$  が点  $G^T \mathbf{u}$  を含むための必要十分条件は, 条件

$$\begin{pmatrix} P & \widehat{G}^T \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi}^T \widehat{G} & 1 \end{pmatrix} \succeq O \quad (32)$$

が成り立つことである. 補題 5.4 より, (32) は次の条件に等価である:

$$1 - (\widehat{G}^T \boldsymbol{\xi}) P^\dagger (\widehat{G}^T \boldsymbol{\xi}) \geq 0, \quad (33)$$

$$P \succeq O, \quad (34)$$

$$(I - P^\dagger P) \widehat{G}^T \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad (35)$$

一方, 楕円体  $\mathcal{E}(P, \widehat{\mathbf{u}})$  が線形空間  $\{G^T \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$  に存在するための必要十分条件は,  $P$  が

$$(I - P^\dagger P) \widehat{G}^T = O \quad (36)$$

を満たすことであることが知られている. (36) が満たされれば, (35) は成り立つ. このことと命題 5.3 より, (34) を満たす楕円体  $\mathcal{E}(P, \widehat{\mathbf{u}})$  が

$$\mathcal{U}_G \subseteq \mathcal{E}(P, \widehat{\mathbf{u}}) \subseteq \{G^T \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

を満たすための必要十分条件は, (36) が成り立ち, かつ(26), (27) を満たす任意の  $\boldsymbol{\xi}$  に対して(33) が成り立つことである. ここで, (33) は

$$\boldsymbol{\xi}^T \left[ \text{Diag}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 1) - \widehat{G} P^\dagger \widehat{G}^T \right] \boldsymbol{\xi} \geq 0$$

と書き直せることに注意する. 命題 2.3 を用いると, (26)–(27) を満たす任意の  $\boldsymbol{\xi}$  に対して(33) が成立するための十分条件は, 条件

$$\left[ \text{Diag}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 1) - \widehat{G} P^\dagger \widehat{G}^T \right] \succeq Y(\mathbf{w}, S), \quad (37)$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad (38)$$

を満たす  $\mathbf{w}, S$  が存在することである. さらに補題 5.4 より, 条件(34), (36), (37) は条件(29) に等価である.  $\square$

命題 5.5 は, 楕円  $\mathcal{E}(P, \widehat{\mathbf{u}})$  が集合  $\mathcal{U}_G$  の安全側の近似であるための十分条件を与えている. そこで,  $\mathcal{U}_G$  を含み, かつ  $\mathcal{U}_G$  をできるだけ精度良く近似する楕円体は, 問題 (21) の代わりに次の問題を解くことで得られる:

$$\left. \begin{array}{l} \min \text{tr}(P) \\ \text{s.t.} \left( \begin{array}{c} P \\ \left( \begin{array}{c} O \\ G \\ -\widehat{\mathbf{u}}^T \end{array} \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} O & G^T & -\widehat{\mathbf{u}} \\ \text{Diag}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 1) - Y(\mathbf{w}, S) \end{pmatrix} \succeq O, \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0}. \end{array} \right\} \quad (39)$$

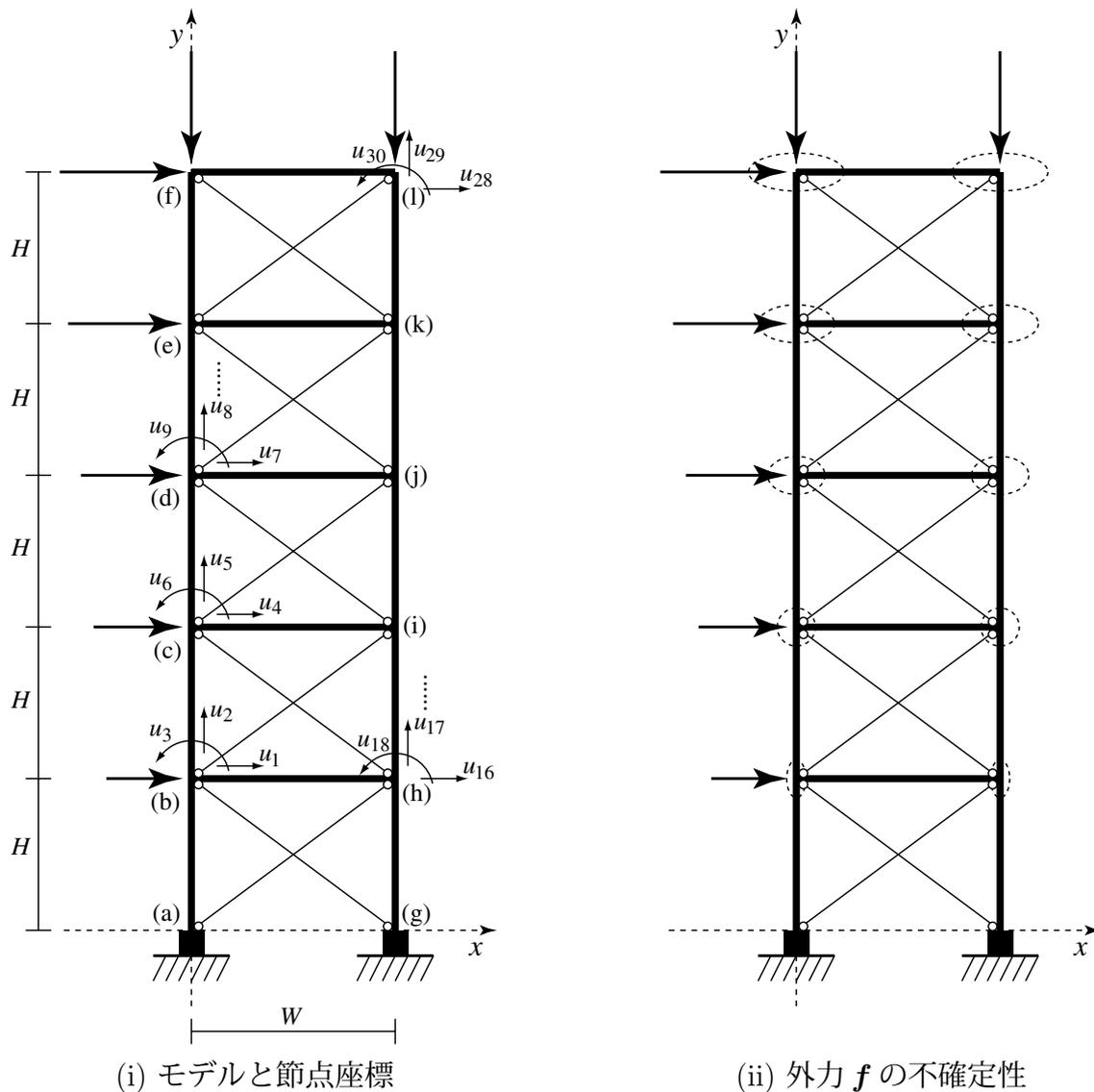


図 1: 5層平面骨組.

ここで、変数は  $P \in \mathcal{S}^\mu$ ,  $\hat{u} \in \mathbb{R}^\mu$ ,  $w \in \mathbb{R}^{n^\Delta+s+1}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{s \times (r-1)}$  である. 定義(28)より  $Y(w, S)$  は線形関数であるから, 問題 (39) は SDP である. 実際, 問題 (39) は等式標準形 (2) に帰着することができる.

## 6 例題

不確定性を有する構造系を考え, 提案手法を用いることで, 構造物の応答の近似楕円体を求める. 以下では, 主双対内点法の実装である SeDuMi Ver. 1.05 [26] を用いて SDP 問題 (39) を解く. 数値実験には, Pentium M (1.5 GHz: 1GB メモリ) および MATLAB Ver. 6.5.1 [28] を用いる.

図 1 に示す, 2次元平面上のブレース付き骨組を考える. この骨組は, 10本の柱, 5本の梁, 10本のブレース (斜材) で構成されている. 柱および梁は梁要素としてモデル化し, ブ

表 1: 外力  $\tilde{\mathbf{f}}$  の公称値.

節点	$\tilde{\mathbf{f}}_j$ (kN)	
	$x$ 方向	$y$ 方向
(b)	150.0	0
(c)	200.0	0
(d)	250.0	0
(e)	300.0	0
(f)	350.0	-1000.0
(l)	0	-1000.0

表 2: 外力の不確定性モデル(8) の係数  $\mathbf{f}^0$ .

節点	$\mathbf{f}_j^0$ (kN)	
	$x$ 方向	$y$ 方向
(b), (h)	16.0	32.0
(c), (i)	32.0	32.0
(d), (j)	48.0	32.0
(e), (k)	64.0	32.0
(f), (l)	80.0	32.0

レースはトラス要素としてモデル化する. 梁要素の数を  $n^b$ , トラス要素の数を  $n^t$  とおくと, 図 1 の骨組では  $n^b = 15$ ,  $n^t = 10$  である. 節点 (a), (g) は固定されており, 変位の自由度の総数は  $n^d = 30$  である.

以下では, 梁, 柱, ブレースの剛性(ヤング率)と外力の双方が不確定であることを仮定する. 骨組の釣合式は,  $m = n = n^d$  とおくと, ULE (11) の形式で表される. ここで,  $K$  は剛性行列,  $\mathbf{u}$  は節点変位ベクトル,  $\mathbf{f}$  は外力ベクトルに対応する. 第  $i$  部材のヤング率を  $a_i$  で表すと, 骨組の剛性行列は

$$K = \sum_{i=1}^{n^b} a_i K_i^b + \sum_{i=n^b+1}^{n^b+n^t} a_i K_i^t \quad (40)$$

と書ける. ただし,  $a_i K_i^b$  および  $a_i K_i^t$  は梁要素およびトラス要素に関する要素剛性行列であり, ともに半正定値対称行列である. いま, トラス要素については  $\text{rank}(K_i^b) = 1$ , 平面内の梁要素については  $\text{rank}(K_i^t) = 3$  であることが知られている. 従って, (40) は定ベクトル  $\mathbf{b}_{ij}$  を用いて

$$K = \sum_{i=1}^{n^b} a_i \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_{ij} \mathbf{b}_{ij}^T + \sum_{i=n^b+1}^{n^b+n^t} a_i \mathbf{b}_{i1} \mathbf{b}_{i1}^T \quad (41)$$

と表すことができる. 各部材のヤング率  $a_i$  の不確定性を

$$a_i = \tilde{a}_i + a_i^0, \quad 1 \geq |\zeta_{ai}| \quad (42)$$

とモデル化すると, (41) で定義される剛性行列  $K$  の不確定性集合  $\mathcal{K}$  は(9) の形式で表される. ここで  $s = n^b + n^t$  であり, 梁要素に対しては  $r = 3$ , トラス要素に対しては  $r = 1$  である.

梁の断面積および断面 2 次モーメントを  $60.0 \text{ cm}^2$ ,  $500.0 \text{ cm}^4$  とする. また, 柱の断面積および断面 2 次モーメントを  $40.0 \text{ cm}^2$ ,  $213.3 \text{ cm}^4$  とする. ブレースの断面積を  $8.0 \text{ cm}^2$  とする. (42) において, 各部材のヤング率の公称値を  $\tilde{a}_i = 200.0 \text{ GPa}$ , 不確定性の大きさを表す係数を  $a_i^0 = 20.0 \text{ GPa}$  とおく.

外力の公称値  $\tilde{\mathbf{f}}$  として, 節点 (b)–(f) および (l) に対して表 1 に示す荷重を作用させる. 節点 (b)–(f), (h)–(l) に不確定な荷重が付加的に作用することを考える. 不確定な荷重のばらつく範囲は, 図 1 (ii) に点線で示す楕円とする. また, 楕円の主軸は  $x$  軸および  $y$  軸に平行

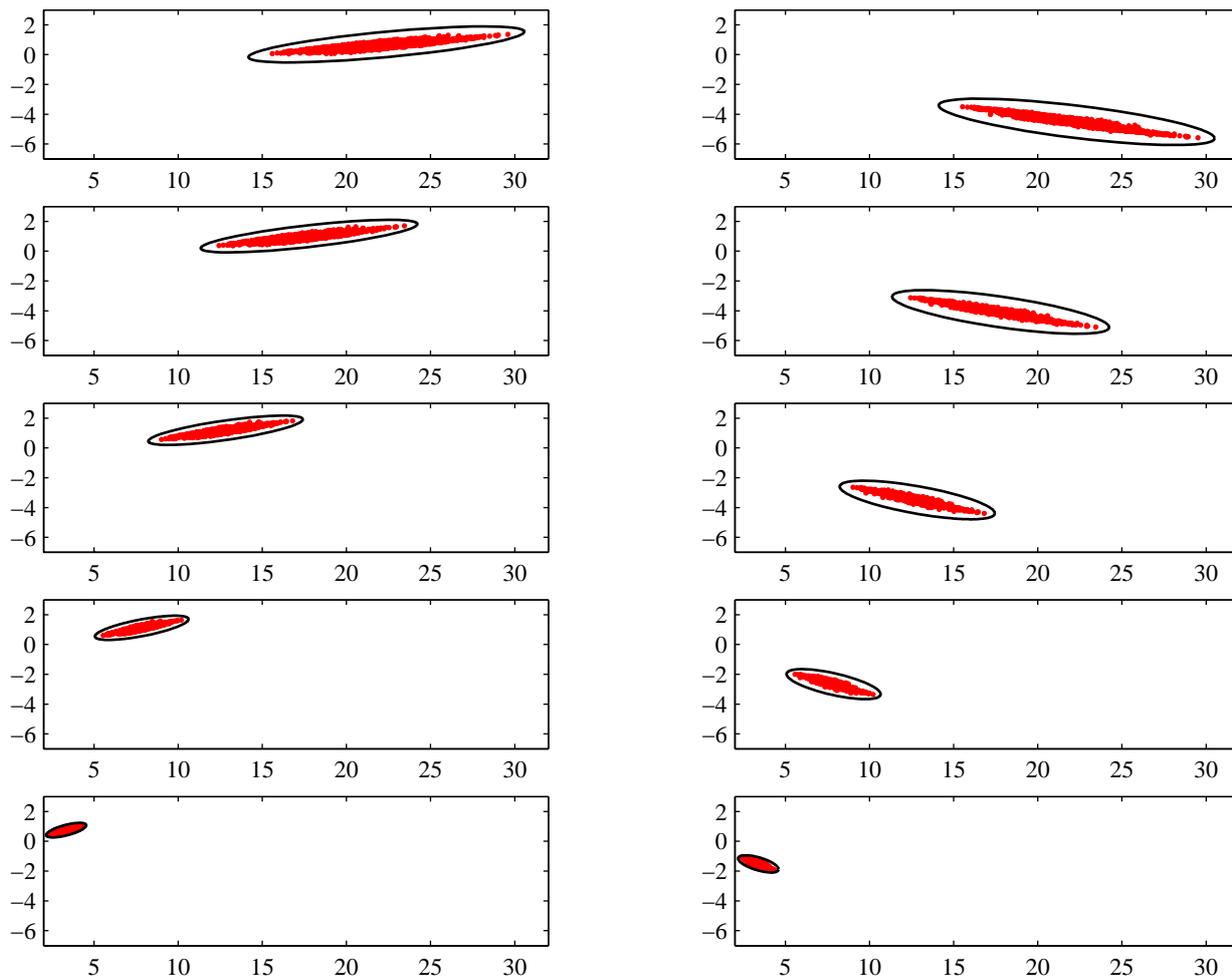


図 2: 節点変位の近似楕円体とランダム生成結果 (cm).

であり、各節点どうしで荷重の不確定性に相関はないものとする。このような不確定性モデルは、 $\Delta_l$ を適当に選ぶことで、(8)の形式で記述できる。ここで、 $F_0$ の非ゼロ成分を表2に示す。

着目する応答量として、各節点 (b)–(f), (h)–(l) の  $x$  および  $y$  方向の変位を選ぶ。ここで、節点の回転角のばらつきは評価しない。 $\mu = 2$  とおき、節点変位を含む2次元平面内の楕円を得ることを考える。SDP 問題 (39) を解いて得られた楕円を図2に示す。節点が10個あるため、図2は10個のSDP問題を解いて得られた結果である。1個のSDP問題を解くのに要した時間の平均は7.89秒である。次に、結果を検証するため、(7), (8)を満たす $\zeta_a, \zeta_f$ をランダムに生成したときの対応する節点変位を図2に点で示す。図2より、得られた楕円はランダムに生成された節点変位を全て含み、そのばらつきを精度良く近似していることが分かる。また、楕円体を用いることで、節点変位のばらつきの特徴が直観的に捉えられることが分かる。

同様に、 $\mu = 1$  とおき、 $x$  および  $y$  方向の節点変位を含むような区間を求める。従って、10個の節点に対して20個のSDP問題を解く。得られた区間およびランダムに生成した節点変位を図3に示す。図3より、得られた区間は節点変位の安全側の近似であり、かつ節点変

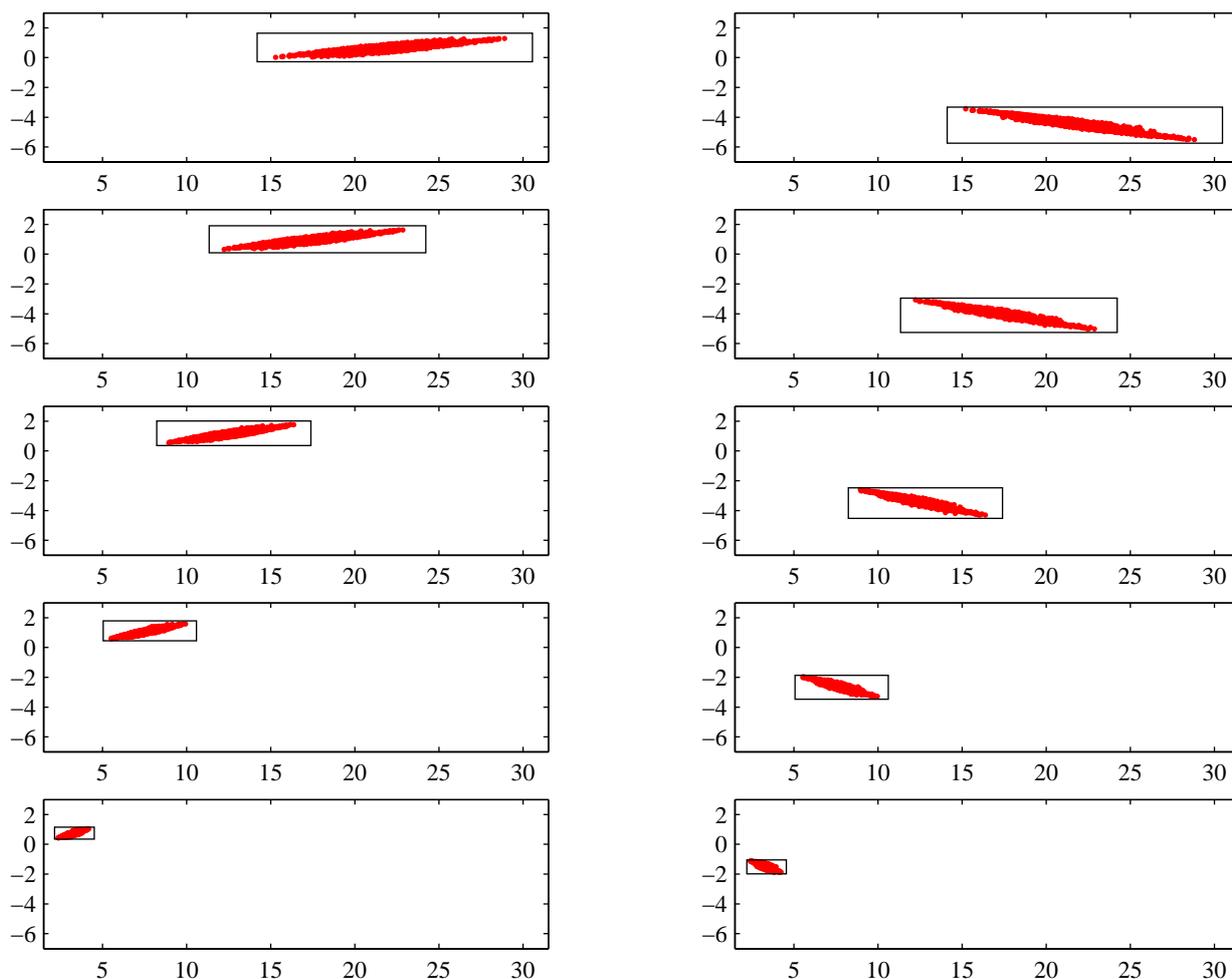


図 3: 節点変位の近似区間とランダム生成結果 (cm).

位のばらつきを精度良く近似していることが分かる.

## 7 結論

本稿では、不確定な線形方程式の解集合を含む楕円体を、半正定値計画法を用いて求める手法を提案した。線形弾性理論における構造系の不確定性をモデル化するために、釣合式の係数行列および右辺ベクトルに対して、非確率論的な不確定性モデルを導入した。現実の構造物は、施工誤差、剛性の同定の誤差や外乱の予測の限界など、種々の不確定な要因を含むため、構造物の応答のばらつきを精度良く予測することは極めて重要である。

不確定な線形方程式の解集合を含む最小の楕円体を求める問題を定式化し、 $S$ -lemmaを用いることで、この問題の制約に対する十分条件を導いた。得られた十分条件を用いることで、最小の楕円体を安全側に近似する半正定値計画問題を定式化した。平面骨組に対する数値実験を通じて、提案手法により近似楕円体が効率よく得られることを示した。

半正定値計画問題を解いて得られる楕円体が、条件を満たす最小の楕円体をどの程度よく近似するのか、理論的には明らかではない。しかし、構造系に対する数値実験では、応答

量のばらつきを十分に精度良く近似する楕円体が得られている。半正定値計画問題を導く際に中心的な役割をした  $\mathcal{S}$ -lemma は、制御の分野では比較的古くから知られている [9, 22]。近年、構造物のロバスト最適設計 [14] やロバスト性解析 [13] などにも  $\mathcal{S}$ -lemma が応用され、半正定値計画法を用いた解法が提案されている。

## 参考文献

- [1] Alefeld, G. and Mayer, G., Interval analysis: theory and applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121** (2000) 421–464.
- [2] Ben-Haim, Y., *Information-gap Decision Theory: Decisions under Severe Uncertainty*, (2nd ed.), Academic Press, London, UK, 2006.
- [3] Ben-Haim, Y. and Elishakoff, I., *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, New York, NY, 1990.
- [4] Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. and Nemirovski, A., Robustness, in: H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe (eds.), *Handbook of Semidefinite Programming — Theory, Algorithms, and Applications*, Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, 2000, pp. 139–162.
- [5] Ben-Tal, A., Jarre, F., Kočvara, M., Nemirovski, A. and Zowe, J., Optimal design of trusses under a nonconvex global buckling constraint, *Optimization and Engineering*, **1** (2000) 189–213.
- [6] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., Robust truss topology optimization via semidefinite programming, *SIAM Journal on Optimization*, **7** (1997) 991–1016.
- [7] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [8] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A., Robust optimization — methodology and applications, *Mathematical Programming*, **B92** (2002) 453–480.
- [9] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [10] Calafiore, G. and El Ghaoui, L., Ellipsoidal bounds for uncertain linear equations and dynamical systems, *Automatica*, **40** (2004) 773–787.
- [11] Chen, S., Lian, H. and Yang, X., Interval static displacement analysis for structures with interval parameters, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53** (2002) 393–407.
- [12] Kanno, Y., Ohsaki, M. and Katoh, N., Sequential semidefinite programming for optimization of framed structures under multimodal buckling constraints, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **1** (2001) 585–602.
- [13] Kanno, Y. and Takewaki, I., Robustness analysis of trusses with separable load and structural uncertainties, *International Journal of Solids and Structures*, **43** (2006) 2646–

- [14] Kanno, Y. and Takewaki, I., Sequential semidefinite program for robust truss optimization based on robustness functions associated with stress constraints, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **130** (2006) 265–287.
- [15] Kanno, Y. and Takewaki, I., Semidefinite programming for uncertain linear equations in static analysis of structures, *Mathematical Engineering Technical Report*, METR2007-45, Dept. of Mathematical Informatics, University of Tokyo, Japan, July 2007.
- [16] Kočvara, M., Zowe, J. and Nemirovski, A., Cascading — an approach to robust material optimization, *Computers & Structures*, **76** (2000) 431–442.
- [17] Kojima, M., Shindoh, S. and Hara, S., Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices, *SIAM Journal on Optimization*, **7** (1997) 86–125.
- [18] Muhanna, R.L. and Mullen, R.L., Uncertainty in mechanics problems — interval-based approach, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **127** (2001) 557–566.
- [19] Neumaier, A., *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.
- [20] Ohsaki, M., Fujisawa, K., Katoh, N. and Kanno, Y., Semi-definite programming for topology optimization of truss under multiple eigenvalue constraints, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **180** (1999) 203–217.
- [21] Pantelides, C.P. and Ganzerli, S., Design of trusses under uncertain loads using convex models, *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, **124** (1998) 318–329.
- [22] Pólik, I. and Terlaky, T., A survey of  $\mathcal{S}$ -lemma, *SIAM Review*, **49** (2007) 371–418.
- [23] Qiu, Z. and Elishakoff, I., Antioptimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **152** (1998) 361–372.
- [24] Rohn, J., Overestimations in bounding solutions of perturbed linear equations, *Linear Algebra and its Applications*, **262** (1997) 55–65.
- [25] Schuëller, G.I., Developments in stochastic structural mechanics, *Archive of Applied Mechanics*, **75** (2006) 755–773.
- [26] Sturm, J.F., Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, **11/12** (1999) 625–653.
- [27] Takewaki, I. and Ben-Haim, Y., Info-gap robust design with load and model uncertainties, *Journal of Sound and Vibration*, **288** (2005) 551–570.
- [28] *Using MATLAB*, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2002.