

ロバスト最適化問題への確率的アプローチ Probabilistic Approach to Robust Optimization

武田 朗子
Akiko Takeda

東京工業大学大学院 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
Department of Mathematical & Computing Sciences
Graduate School of Information Science and Engineering
Tokyo Institute of Technology

Tokyo 152-8552, Japan
takeda@is.titech.ac.jp

概要

現実の問題には様々な不確実性が存在しており、その不確実性に対処するための1つの方法としてロバスト最適化が注目を集めている。ロバスト最適化法は、不確実なパラメータ \mathbf{u} のとりうる範囲 U をあらかじめ設定し、想定されるすべての制約式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0$, $\mathbf{u} \in U$ に対して実行可能な解の中から、最もよいものを見つける手法である。不確実なパラメータがうまく記述されている場合には、ロバスト最適化問題を解きやすい問題(二次錐計画問題や半正定値計画問題)に帰着できる。しかしながら、不確実なパラメータの記述を限定してしまう、という欠点もある。そこで、より一般的な記述(有界閉凸集合ならば充分)の U を持つロバスト最適化問題に対して、 U からベクトルをランダムに N 点サンプリングして、 N 本の制約式を持つ緩和問題を解くことを提案する。Calafiore & Campi はサンプル数 N のもとで制約式を破る確率を確率的に評価したが、ここではさらに、制約式を破る大きさについての確率的な評価を示す。さらに提案手法をロバスト偏差問題に適用した結果についても報告する。

Keywords: ロバスト最適化, 不確実性, ランダムサンプリング, 確率的評価, ロバスト偏差問題

1 はじめに

ロバスト最適化法は、不確実性の範囲をあらかじめ設定し、その中で最悪の状況が生じた場合を想定して最適化を行う方法である。Ben-Tal&Nemirovski が1998年にロバスト最適化法を提案して以来、不確実なパラメータの変動に対して頑健な意思決定を行うための手法として注目され、近年盛んに研究が行われるようになった。最悪状況を想定した意思決定方法は新しいものではなく、70年代にSoyster [9]によって既に用いられていたが、Ben-Tal&Nemirovskiの研究をきっかけに、再び脚光をあびるようになった。また、時期を同じくして、ロバスト制御の流れからEl Ghaoui&Lebret [4]が同様の定式化を示している。近年、脚光をあびている理由として、

- 不確実性の高い時代に、最悪状況で被る損失をなるべく小さくしたいというロバスト最適化の考え方がマッチしていること
- Ben-Tal&Nemirovski[2] の提案するロバスト最適化問題は、二次錐計画問題や半正定値計画問題に帰着され、簡単に解けるようになったこと

などが考えられる。不確実なパラメータに対してある一般的な範囲が与えられる場合には、ロバスト最適化問題は無限本の制約を含むことになり、求解が難しい。[2] のロバスト最適化問題では、不確実なパラメータに対して楕円型の範囲を想定しており、この場合には解きやすい問題へ帰着可能である。とはいえ、このパラメータ設定はロバスト最適化の適用をかなり限定してしまうことになる。

本稿では、楕円型といった条件を仮定せずにロバスト最適化問題を定式化する。Calafiore & Campi[3] は、無限本の制約式から有限本の制約式をランダムに N 本サンプリングして、 N 本の制約式を持つ緩和問題を解くことを提案した。そのサンプル数 N は、制約式を破る確率の確率的な評価に基づいて見積もられる。ここではさらに、制約式を破る確率に加えて、制約式を破る大きさについての確率的な評価を示す。また、その確率的な評価に基づいて、制約式を破る確率・制約式を破る大きさがある基準以下になるまで、ランダムサンプリングを繰り返し制約式を追加していく、逐次的緩和アルゴリズムを提案する。そして、提案アルゴリズムをロバスト偏差問題に適用した結果を用いて、その有効性について報告したい。

2 ロバスト最適化問題

本稿では、ロバスト最適化問題を

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad (1)$$

と記述することにする。不確実なパラメータの取りうる範囲 \mathcal{U} をあらかじめ想定して、それらのパラメータよる制約式をすべて満たす解の中から、最もよいものを見つける問題である。関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ は \mathbf{x} について凸、 X は閉凸集合、 \mathcal{U} は有界な集合と仮定する。この問題は制約式 1 本、目的関数は確定的で制約式にのみ不確実なパラメータを含んでいる。かなり限定された問題に見えるが、目的関数が不確実なパラメータを含む問題 $\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ も問題 (1) に帰着される。実際に、新たな変数 t と制約式 $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq t$ を追加して、

$$\min_{\mathbf{x} \in X, t} t \quad \text{s.t.} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq t, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$$

と変形すれば、問題 (1) となる。また、凸制約式が $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0, i = 1, \dots, m$, のように複数本ある時には、 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \max_{i=1, \dots, m} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0$ とすることで問題 (1) とみなすことができる。

\mathcal{U} がある領域で与えられるならば、問題 (1) は無限本の制約式を含む問題になり、たとえ制約式が線形であろうと、一般に求解は困難である。しかしながら、 \mathcal{U} が矩形や楕円形であれば、凸計画問題に帰着されることが知られている。図 1 はロバスト最適化問題のイメージを示している。斜線部分が問題 (1) の実行可能領域にあたる。この領域は無限本の制約式で

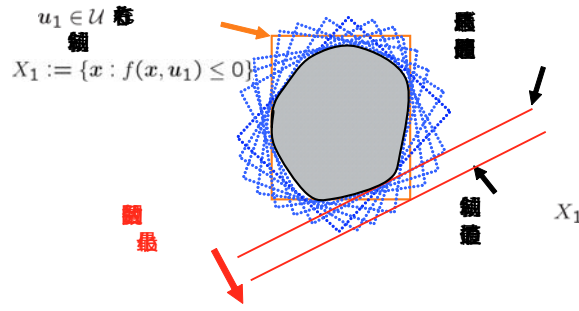


図 1: ロバスト最適化問題のイメージ

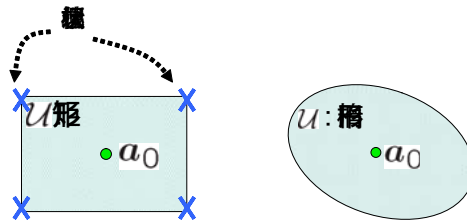


図 2: 矩形と楕円形の U

記述されるが、最も厳しい状況を想定した 1 本の制約式 $\max_{u \in U} f(x, u) \leq 0$ を用いて表現可能である。よって、最悪の事態を想定して最適化を行う方法とみなすことができる。

線形不等式制約 1 本の、不確実な線形計画問題に対するロバスト最適化問題：

$$\min_{x \in X} c^T x \quad \text{s.t.} \quad f(x, u) \leq 0, \quad \forall u \in U. \quad (2)$$

を例にあげ、 U が矩形や楕円形であれば、ロバスト最適化問題を解きやすい問題に帰着できることを示す。

●矩形 $U = [a_0 - \bar{a}, a_0 + \bar{a}]$ の場合： (Soyster [9])

$\bar{a} \geq 0$ より、問題 (2) の制約式は 1 本の不等式：

$$\max_{a \in U} a^T x = a_0^T x + \bar{a}^T |x| \leq b \quad (3)$$

で表される。さらに、新たな変数 y を導入して、この制約式を

$$a_0^T x + \bar{a}^T y \leq b, \quad -y \leq x \leq y, \quad y \geq 0$$

と記述すると、ロバスト線形計画問題 (2) は通常の線形計画問題として定式化される。図 2 (左) が示すように、 U は直方体であり、その角は、各成分について上限もしくは下限値がとられる極端な状況に対応している。さらに、式 (3) より、ロバスト最適化問題ではこの極端な状況のみ考慮されることが分かる。その結果、得られる最適意思決定は保守的になりがちである。

●楕円形 $U = \{a_0 + Au : \|u\| \leq 1\}$ の場合: (Ben-Tal&Nemirovski [2])

この場合, 不確実なパラメータ a は, u について線形に影響を受けるように記述される. 不確実なパラメータに対して楕円形の U を想定することで, 各成分が上・下限値を同時に取るような極端な状況を排除することができる. この U のもとで, 問題 (2) の制約式は

$$\begin{aligned} & \max_{u: \|u\| \leq 1} (a_0 + Au)^\top x \leq b \\ & = a_0^\top x + \max_{u: \|u\| \leq 1} (A^\top x)^\top u \end{aligned}$$

となる. 右辺第2項の最適解は $u^* = \frac{A^\top x}{\|A^\top x\|}$ と陽に得られ, 上記の制約式は1本の制約式 $a_0^\top x + \|A^\top x\| \leq b$ で表現される. つまり, ロバスト線形計画問題 (2) は, 二次錐計画問題:

$$\min_x c^\top x \quad \text{s.t.} \quad a_0^\top x + \|A^\top x\| \leq b$$

に変形され, 内点法で効率的に解くことができる.

他にも, 文献 [2, 5] 等において, 扱いやすい U がいくつか提案されている. また, 本稿で示したロバスト線形計画問題だけでなく, ロバスト二次錐計画問題等も提案されている.

3 サンプリングによる緩和問題

本節では, 不確実なパラメータの範囲 U に対して, 矩形や楕円形といった仮定を除き, (特に記述がない限り) 一般的な範囲とする. ここで, ロバスト最適化問題の U 上に確率分布を想定することに異論もあるかと思うが, Calafiore&Campi の論文に従い, U 上に確率分布 P が与えられているものと仮定する. 確率分布 P について, パラメータ $u \in U$ に対する相対的な重要度を示すものと解釈してもよい. パラメータ $u \in U$ がどれも等しく重要な場合には, 一様分布を利用するのが良いだろう.

ロバスト最適化において用意される無限本の制約式をすべて満たす解を求めることは諦め, サンプリングされた有限本の制約式を用いて緩和問題を構築し, 緩和解を求めることを考える. その際にサンプル数を決める基準として,

(C-C 基準) 得られた緩和解 \hat{x} がロバスト最適化問題の制約式を破る確率: $V(\hat{x}) = P\{u \in U : f(\hat{x}, u) > 0\}$

(K-T 基準) 制約式を破る大きさ: $f_{max}(\hat{x}) = \max_{u \in U} f(\hat{x}, u)$

が提案されている. $V(\hat{x})$ や $f_{max}(\hat{x})$ が十分に小さい値であれば, 緩和解 \hat{x} は十分にロバスト最適解に近いと言えるだろう. 以下では, これらの基準が十分に小さくなるような緩和解を得るために必要なサンプル数 N の見積りについて紹介する.

ロバスト最適化問題 (1) に対して, U からベクトルをランダムに N 個サンプリングして, N 本の制約式を持つ緩和問題 (P_N):

$$(P_N) \mid \min_{x \in X} c^\top x \quad \text{s.t.} \quad f(x, u_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

を構築する. (P_N) の最適解を \hat{x}_N とする. Calafiore&Campi は, 問題 (1) の制約式を破る確率 $V(\hat{x}_N)$ を用いて, その解 \hat{x}_N の精度のよさについて評価した. 以下の定理は, 確率的に

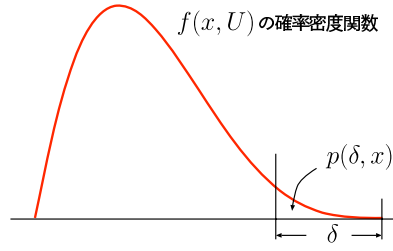


図 3: $f(\mathbf{x}, U)$ の裾確率

$V(\hat{\mathbf{x}}_N) \leq \epsilon$ を満たすために必要なサンプル数を示している。そのサンプル数 N は、パラメータ ϵ と η の関数 (n は \mathbf{x} の次元) :

$$N(\epsilon, \eta) = \frac{2}{\epsilon} \log \frac{1}{\eta} + 2n + \frac{2n}{\epsilon} \log \frac{2}{\epsilon}$$

に基づいて決められる。

定理 1 (Calafiore&Campi [3]) $\epsilon \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 1)$ とする。サンプル数 $N > N(\epsilon, \eta)$ の問題 (P_N) の最適解 $\hat{\mathbf{x}}_N$ は、確率 $1 - \eta$ 以上で $V(\hat{\mathbf{x}}_N) \leq \epsilon$ を満たす。

解のロバスト性はパラメータ ϵ で調節される。ほとんど全ての制約式を満たすようなロバスト解が必要であれば、 ϵ を 0 近くに設定すればよいだろう (ただし、 $N(\epsilon, \eta)$ が大きくなり、 (P_N) の求解が難しくなるが)。

制約式を破る確率だけでなく破る大きさ $f_{\max}(\hat{\mathbf{x}}_N)$ の見積りも与えるように、定理 1 の主張を拡張することができる。

定理 2 (Kanamori&Takeda [6]) $\epsilon \in (0, q(B))$, $\eta \in (0, 1)$ とする。サンプル数 $N > N(\epsilon, \eta)$ の問題 (P_N) の最適解 $\hat{\mathbf{x}}_N$ は、確率 $1 - \eta$ 以上で $V(\hat{\mathbf{x}}_N) \leq \epsilon$ と同時に $f_{\max}(\hat{\mathbf{x}}_N) \leq q^{-1}(\epsilon)$ も満たす。

定理 2 で用いられる関数 $q(\delta)$, $0 \leq \delta \leq B$, は $f(\mathbf{x}, U)$ の裾確率 (図 3 参照) :

$$p(\delta, \mathbf{x}) := P \left\{ \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \delta < f(\mathbf{x}, U) \right\}$$

に対して、一様な下限

$$0 \leq q(\delta) \leq p(\delta, \mathbf{x}), \quad 0 \leq \delta \leq B, \quad (\forall \mathbf{x} \in X) \quad (4)$$

になるように作られた増加関数である。次の仮定 :

(1) 関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ は、 \mathbf{u} についてリプシッツ連続、つまり、

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v})| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad \forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}$$

(2) \mathcal{U} は有界閉凸集合¹

¹凸集合に限らず、より広いクラスの集合 (星型を含む非線形な集合) でよい。詳細は文献 [6] 参照のこと。

(3) P は U 上の一様分布 (簡単のため)

のもとで、一様な下限を与える関数 $q(\delta)$ と B が必ず存在することを、文献 [6] は示している。その $q(\delta)$ と B は、リプシッツ定数 L 、 U の体積、 U の直径: $:= \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ 、 U の内接円の半径を用いて記述される。 U の直径を計算するのが難しいのであれば、 U を含む直方体を見つけて、 U の直径の上界値を計算すればよいだろう。 U の体積をモンテカルロ法で推定した場合や、 U の内接円半径の下界値の見積もりについても、文献 [6] で言及している。その関数形 $q(\delta)$ と B はかなり複雑な形をしているので割愛するが、興味のある方は文献 [6] を参照していただきたい。

定理 2 より、高い近似精度の解を得るためには、 $q^{-1}(\epsilon)$ と ϵ が充分小さくなるように ϵ を設定すればよいことが分かる。緩和問題 (P_N) を解く前に、所与の近似精度を保証するために必要なサンプル数 N を見積もることができるので、定理 2 では“精度の事前評価”が行われている。しかし、充分小さい ϵ を選ぶと、サンプル数 $N(\epsilon, \eta)$ が非常に大きくなるため、サンプリングによる緩和問題 (P_N) が解けなくなってしまう。そこで、現実的な方法として、“精度の事後評価”が考えられる。

定理 3 (Kanamori&Takeda [6]) サンプル数 N で生成した問題 (P_N) の最適解を $\hat{\mathbf{x}}_N$ とする。 $\delta \in (0, B]$, $\eta \in (0, 1)$, $M (\geq \frac{\ln \eta}{\ln(1-q(\delta))})$ とする。 U 上の確率分布に従ってサンプリングを行い、得られた $\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_M$ を用いると、 $f_{max}(\hat{\mathbf{x}}_N)$ について

$$P^M \left\{ \begin{aligned} f_{max}(\hat{\mathbf{x}}_N) &< \max_{i=1, \dots, M} f(\hat{\mathbf{x}}_N, \tilde{\mathbf{u}}_i) + \delta \\ &\geq 1 - \eta \end{aligned} \right\}$$

が成り立つ。

上の定理は、(P_N) の最適解 $\hat{\mathbf{x}}_N$ が得られた後、 U からサンプル $\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_M$ を生成し、解精度の事後評価のために用いている。たとえ M が大きくなっても、 $f(\hat{\mathbf{x}}_N, \tilde{\mathbf{u}}_i)$ の関数値評価の回数が増えるだけで、大規模な最適化問題を解く必要はない。そこで、ロバスト最適化問題 (1) を扱うため、次の現実的な方法が考えられる。ある点数 N のもとで緩和問題 (P_N) を構築し、最適解 $\hat{\mathbf{x}}_N$ を求める。その最適解に対して、定理 3 に従って事後評価を行なう。

$$\max_{i=1, \dots, M} f(\hat{\mathbf{x}}_N, \tilde{\mathbf{u}}_i) + \delta$$

が充分に 0 に近ければ、 $\hat{\mathbf{x}}_N$ をロバスト最適化問題 (1) の近似解として受け入れればよい。0 に近くないならば、さらにサンプル数 N を増やして緩和問題 (P_N) を構築し求解する操作を、充分に 0 に近くなるまで繰り返せばよいだろう。

4 ロバスト偏差問題への適用

本節では、解の事前評価や事後評価手法をロバスト偏差問題に適用し、その結果について紹介する。本題に入る前に、ロバスト偏差問題について補足説明をしたい。Kouvelis&Yu [7] は、不確実なパラメータ \mathbf{u} を含む最適化問題 $\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ に対して、3つのロバスト性基準によるロバスト最適化問題を提示している。

- (Absolute Robustness) 最悪状況下でのコスト関数の最小化：

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (5)$$

- (Deviation Robustness) 最適な意志決定による最適値との最大差の最小化：

$$(RD) \mid \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f^*(\mathbf{u})\}, \quad (6)$$

ただし, $f^*(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

- (Relative Robustness) 最適な意志決定による最適値との相対差の最小化：

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f^*(\mathbf{u})}{f^*(\mathbf{u})},$$

ただし, $f^*(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

既に述べたように, (5) はロバスト最適化問題 (1) として定式化される問題である. (6) の $f^*(\mathbf{u})$ は, 不確実なパラメータ \mathbf{u} が確定した後に最適な意志決定を行った場合の最適値を意味している. 問題 (6) では, $f^*(\mathbf{u})$ との乖離が最小化されるため, どんな状況が起こったとしても, 各状況下での最適な方策と大きな違いのない方策が選ばれることが期待される. この問題は, 連続最適化問題に対するロバスト最適化において, ほとんど扱われていないものの, 組合せ最適化問題に対しては, (5) と同様にしばしば研究されている. 例えば, (6) の定式化を用いて, ロバスト最短路問題 [12] やロバスト最小木問題 [1, 11] 等が提案されている.

本節では, 不確実な連続最適化問題に対して Deviation Robustness を考慮し, ロバスト偏差問題 (6) を解くことを試みる. ただし, 関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ が \mathbf{x} について凸であっても, $f^*(\mathbf{u})$ を \mathbf{u} の関数として明示的に扱えないため, ロバスト偏差問題 (6) はかなり難しい問題になる. そこで, この問題に対してサンプリング解法を適用し, 精度のよい近似解を得ることを目標にする.

ロバスト偏差問題 (RD) の制約式をサンプリングすることで, 緩和問題

$$(RD_N) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in X, t} t \\ \text{s.t.} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) - f^*(\mathbf{u}_i) \leq t, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

が得られる. 関数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ が \mathbf{x} について凸であれば, 各サンプル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ を用いて凸計画問題：

$$f^*(\mathbf{u}_i) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7)$$

を解くことにより, 最適値 $f^*(\mathbf{u}_i)$ が得られる. その結果, (RD_N) は有限本の制約式を持つ凸計画問題となる.

ここでは, 緩和問題 (RD_N) よりもタイトな緩和値を与える, 次の緩和問題：

$$(CRP_N) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{x} \in X, t} t \\ \text{s.t.} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) \leq t, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \\ \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}) \leq t, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \end{array} \right.$$

を扱うことにする。ここで、 \mathbf{x}_i は最適値 $f^*(\mathbf{u}_i)$ に対応する最適解である。 i 番目の制約式 $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) \leq t, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$, において、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$ を想定すると、これは $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) - f^*(\mathbf{x}_i) \leq t$ となる。つまり、 (RD_N) の i 番目の制約式に等しい。このように、 (RD_N) の全ての制約式が (CRP_N) に含まれているため、 (CRP_N) の方が (RD_N) よりもタイトな緩和を与えることができる。

定理 2 を用いると、ロバスト偏差問題の最適値と緩和値の差を評価することができる。

定理 4 $\epsilon \in (0, q(B)), \eta \in (0, 1), N \geq N(\epsilon, \eta)$ とする。ロバスト偏差問題の最適値を $opt(RD)$, また、緩和問題 (CRP_N) と (RD_N) の最適値をそれぞれ、 $opt(CRP_N), opt(RD_N)$ と示す。このとき、確率 $1 - \eta$ 以上で、次のことが成り立つ。

$$opt(RD) - opt(CRP_N) \leq opt(RD) - opt(RD_N) \leq q^{-1}(\epsilon)$$

Proof (RD_N) より得られる緩和解を $(\hat{\mathbf{x}}_N, \hat{t}_N)$ とする。定理 2 を、緩和問題 (RD_N) に適用すると、 $1 - \eta$ 以上の確率で

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{f(\hat{\mathbf{x}}_N, \mathbf{u}) - f^*(\mathbf{u}) - \hat{t}_N\} \leq q^{-1}(\epsilon) \quad (8)$$

が成り立つことが分かる。 \hat{t}_N は緩和問題 (RD_N) の最適値であり、またロバスト偏差問題の最適値は $\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{f(\hat{\mathbf{x}}_N, \mathbf{u}) - f^*(\mathbf{u})\}$ 以下の値を取るから、(8) 式より

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f^*(\mathbf{u})\} - \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{i=1, \dots, N} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) - f^*(\mathbf{u}_i)\} \leq q^{-1}(\epsilon),$$

つまり $opt(RD) - opt(RD_N) \leq q^{-1}(\epsilon)$ が示された。さらに、 $opt(RD_N) \leq opt(CRP_N)$ を考慮すると、命題が示せた。□

定理 4 は、ロバスト偏差問題の最適値と緩和値の差の事前評価を示している。同様に、事後評価のための定理 3 をロバスト偏差問題に適用すると、最適値と緩和値の差についての事後評価が可能になる。

定理 5 サンプル数 N で生成した問題 (CRP_N) の最適解を (\mathbf{x}_N^*, t_N^*) とする。 $\eta \in (0, 1), \delta \in (0, B], M \geq \lceil \frac{\ln \eta}{\ln(1-q(\delta))} \rceil$ とする。 \mathcal{U} 上の確率分布に従ってサンプリングを行い、得られた $\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_M$ を用いて、

$$\beta_M = \max_{i=1, \dots, M} \{f(\mathbf{x}_N^*, \tilde{\mathbf{u}}_i) - f^*(\tilde{\mathbf{u}}_i) - t_N^*\}$$

を算出する。そのとき、 $1 - \eta$ 以上の確率で

$$opt(RD) - opt(CRP_N) < \beta_M + \delta \quad (9)$$

が成り立つ。

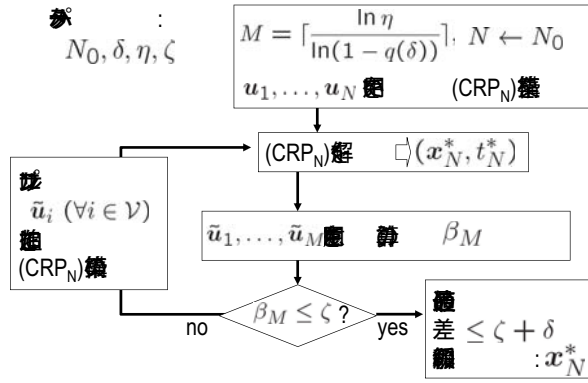


図 4: 精度保証のついた逐次的緩和アルゴリズム

定理 5 の事後評価に基づく，精度保証のついた逐次的緩和アルゴリズムを提案する．アルゴリズムの概略を図 4 に示した．このアルゴリズムより得られる解 \mathbf{x}_N^* は，最適値との誤差が $\zeta + \delta$ 以下になるような緩和値 t_N^* を与えることが $1 - \eta$ 以上の確率で保証される．最初の反復では，初期サンプル数 $N = N_0$ の緩和問題 (CRP_N) を解き，緩和解 (\mathbf{x}_N^*, t_N^*) の事後評価を通して，満たされていない制約式の集合

$$\mathcal{V} = \{i : f(\mathbf{x}_N^*, \tilde{\mathbf{u}}_i) - f^*(\tilde{\mathbf{u}}_i) - t_N^* > 0\}$$

が見つげられる．それらの制約式を追加して，次の反復で $N > N_0$ の緩和問題 (CRP_N) を解き，終了条件を満たすまでこの操作が繰り返される．

5 シャーププレシオ最大化問題

具体的な問題例として，次のシャーププレシオ最大化問題：

$$\max_{\mathbf{x} \in X} \frac{\boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{x} - r_f}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}},$$

を考えてみよう． \mathbf{Q} は分散共分散行列を示す正定値行列， $r_f \geq 0$ は無差別資産の平均収益率とする．シャーププレシオは，ポートフォリオの収益率から無リスク証券の収益率を差し引いた値を，ポートフォリオの収益率の標準偏差で割ることで，算出される．分子は，リスクを取ることによって得た超過リターンを意味しており，分母はリスクを意味している．つまり，リスクを取ることによってどれだけ効率よくリターンを上げることができたかを示しており，この値が大きいほど効率が良いとされている．Krishnamurthy[8] は $\boldsymbol{\mu}$ を不確実なパラメータとみなして，

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{j=1}^{\ell} u_j \boldsymbol{\mu}_j, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U} := \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$$

と記述し，以下のロバスト偏差問題を提案した．

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{f^*(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}. \quad (10)$$

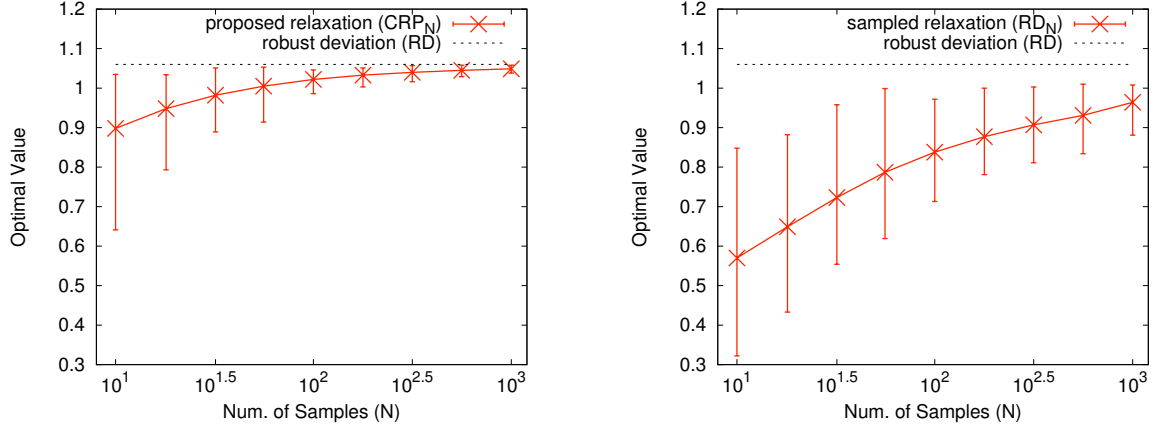


図 5: 左図 : (CRP_N) の最適値, 右図 : (RD_N) の最適値

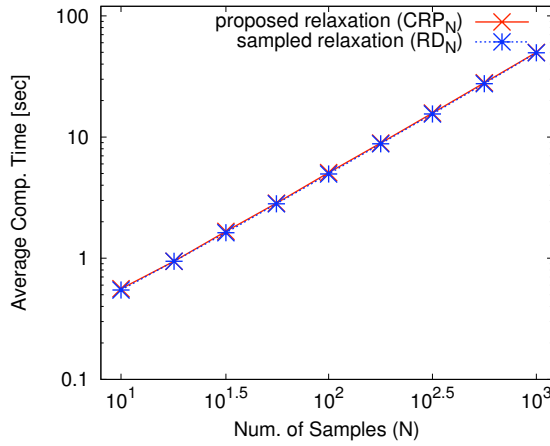


図 6: (CRP_N) and (RD_N) の平均計算時間

ここで, $X := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{e}^\top \mathbf{x} = 1\}$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{(\boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{j=1}^{\ell} u_j \boldsymbol{\mu}_j - r_f \mathbf{e})^\top \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}}, \quad \text{and} \quad f^*(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{x} \in X} \frac{(\boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{j=1}^{\ell} u_j \boldsymbol{\mu}_j - r_f \mathbf{e})^\top \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}}}.$$

シャープレシオについての最大化問題のため, ロバスト偏差問題の目的関数は $f^*(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ となる. それにともない, (RD_N) と (CRP_N) の制約式は, それぞれ, $f^*(\mathbf{u}_i) - f(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) \leq t$ ($i = 1, \dots, N$), $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq t, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, N$), となることに注意しなければならない. 文献 [8] では, 数値実験結果は示されていないものの, サンプルによる緩和問題 (RD_N) が提案されている. (RD_N) の最適解は, まず, $f^*(\mathbf{u}_i), i = 1, \dots, N$, を計算の後, (RD_N) の凸二次計画問題を解くことで得られる. 一方, Takeda, Taguchi-Tanaka [10] は, ロバスト偏差シャープレシオ最大化問題 (10) に対する緩和問題 (CRP_N) が二次錐計画問題に帰着されることを示しており, $f^*(\mathbf{u}_i), i = 1, \dots, N$, を計算の後, 二次錐計画問題を解くことで (CRP_N) の最適解が得られる.

ここでは, 20 資産 ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{20}$), $\ell = 4$ ($\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$) の例題を扱い, (CRP_N) と (RD_N) から得られる緩和値の比較や, 精度の事前/事後評価を行うことにする. パラメータ $\boldsymbol{\mu}_j, j =$

表 1: $\text{opt}(RD) - \text{opt}(CRP_N)$ に対する事前評価 ($\eta = 0.01$)

ϵ	$N(\epsilon, \eta)$	$q^{-1}(\epsilon)$	R.err [%]
0.787	100	1.397	131.8
0.125	1000	0.724	68.3
0.020	10000	0.429	40.4

表 2: $\text{opt}(RD) - \text{opt}(CRP_N)$ に対する事後評価 ($\eta = 0.01$)

δ	$\mathbf{x}_{N_1}^*$ ($N_1 = 100$)				$\mathbf{x}_{N_2}^*$ ($N_2 = 1000$)			
	M	β_M	A.err	R.err [%]	M	β_M	A.err	R.err [%]
0.15	2297	0.030	0.180	16.9	2294	0.006	0.156	14.7
0.10	11074	0.016	0.116	11.0	11057	0.006	0.106	10.0
0.05	169026	0.031	0.081	7.6	168759	0.010	0.060	5.7
δ	$\mathbf{x}_{N_3}^*$ ($N_3 = 10000$)							
	M	β_M	A.err	R.err [%]				
0.15	2285	-0.077	0.073	6.9				
0.10	11013	-0.020	0.080	7.5				
0.05	168073	-0.003	0.047	4.4				

$0, 1, \dots, 4$ の設定や (CRP_N) から帰着される二次錐計画問題については, [10] に記されている. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ のサンプルを 100 回取り直して緩和問題 (CRP_N) と (RD_N) を解き, それらの最適値 (100 回の試行における最大値, 最小値, 平均値) を図 5 に示した. ロバスト偏差問題 (RD) の最適値を求めるのが困難なため, ここでは, $N = 5 \times 10^4$ の緩和問題 (CRP_N) の最適値 ($t_N^* = 1.060$) を (RD) の最適値とみなして用いている. 図 5 から分かるように, (CRP_N) は (RD_N) に比べ, タイトな緩和値を与えている. 一方で, $f^*(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, \dots, N$ の計算から緩和問題の求解までの計算時間にあまり差異がないことが図 6 から読み取れる. よって, 緩和問題として (CRP_N) を解く方がよいだろう.

次に, (CRP_N) より得られた緩和解に対して, 精度の事前・事後評価を行った. 表 1 において, $N(\epsilon, \eta)$ はパラメータ η と ϵ のもとでのサンプル数を示し, $q^{-1}(\epsilon)$ は最適値と緩和値のギャップの事前見積もりを示している. 相対誤差 R.err は $\text{R.err} := \frac{q^{-1}(\epsilon)}{|\text{opt}(RD)|} \times 100$ を用いて算出した値である. 表 1 より, ロバスト偏差問題の最適値と緩和値の差の事前評価が非常に甘いことがわかる. 事前評価により, サンプル数 $N = 10^3$ の場合には, 最適値と緩和値の差が $q^{-1}(\epsilon) = 0.724$ 以下になることが 99% 以上の確率で保証されている. しかし, 図 5 を見ると, 実際にはサンプル数 $N = 10^3$ で (CRP_N) は充分によい緩和解を与えていることが分かる.

表 2 は, サンプル数 $N = 10^2, 10^3, 10^4$ の緩和問題 (CRP_N) , それぞれに対する事後評価を示している. それぞれの緩和解に対して,

$$\beta_M = \max_{i=1, \dots, M} \{f^*(\tilde{\mathbf{u}}_i) - f(\mathbf{x}_N^*, \tilde{\mathbf{u}}_i) - t_N^*\},$$

表 3: 逐次的緩和アルゴリズムによる結果 ($N_0 = 10$, $\eta = 0.01$, $\zeta = 0.01$)

$\delta = 0.15$ ($\zeta + \delta \leq 0.16$)				$\delta = 0.10$ ($\zeta + \delta \leq 0.11$)			
itr.	V.rate (V/M)	β_M	t_N^*	itr.	V.rate (V/M)	β_M	t_N^*
1	42/2274	0.275	0.856	1	248/10963	0.275	0.856
2	0/2276	-0.043	1.041	2	0/11002	-0.012	1.057

$\delta = 0.05$ ($\zeta + \delta \leq 0.06$)			
itr.	V.rate (V/M)	β_M	t_N^*
1	3653/167295	0.349	0.856
2	0/168250	-0.004	1.060

絶対誤差 $A.\text{err} := \beta_M + \delta$, 相対誤差 $A.\text{err} := \frac{A.\text{err}}{|\text{opt}(RD)|} \times 100$ を計算した. $N = 10^2$ の緩和問題 (CRP_N) より得られた緩和解に対して, $\delta = 0.05$ のときに絶対誤差 $A.\text{err} = 0.081$ となり, 事前評価による絶対誤差 $q^{-1}(\epsilon) = 1.397$ に比べてずっとタイトな精度評価ができた. 高い精度を求めてパラメータ δ を小さく設定すると, サンプル数 M が大きくなり β_M の計算に手間がかかるものの, 緩和解 \mathbf{x}_N^* の精度評価がタイトにできるメリットがある. また, このサンプルは緩和問題 (CRP_N) の解評価のために用いられるもので, 緩和問題 (CRP_N) 自体は変わらない.

最後に, 精度保証のついた逐次的緩和アルゴリズムを適用する. パラメータ N_0 , δ , η , ζ を設定して図 4 に示した逐次的緩和アルゴリズムを実行すると, 確率 $1 - \eta$ 以上で

$$\text{opt}(RD) - \text{opt}(CRP_N) \leq \zeta + \delta$$

を満たす, ロバスト偏差問題 (RD) の緩和値 $\text{opt}(CRP_N)$ が得られる. 実際, $N_0 = 10$, $\eta = 0.01$, $\zeta = 0.01$ に設定して, ロバスト偏差問題 (10) に適用した結果が表 3 になる. 高い精度評価を得るためにパラメータ δ に小さい値を設定すると, 精度評価の為にサンプル $\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_M$ が数多く必要になる. V.rate (V/M) は, サンプル数 M のうち V 本の制約式が緩和解 (\mathbf{x}_N^*, t_N^*) によって満たされなかったことを意味する. したがって, サンプル数 M が大きいと, 満たされなかった制約数 V も多くなっている. これらの満たされなかった制約は, 逐次的緩和アルゴリズムの次反復で追加されることになり, 反復を重ねるにつれ精度の高い緩和解が得られる. 表 3 は, いずれのパラメータ δ においても, ロバスト偏差シャープレシオ最大化問題 (10) が 2 回の反復で終了したことを示している. 特に, $\delta = 0.05$ のパラメータ設定により, $N = 5 \times 10^4$ の緩和問題 (CRP_N) の最適値 ($t_N^* = 1.060$) と同じ結果が得られている. 具体的に言えば, 反復 1 回目では $N = 10$ の (CRP_N), 破られた 3653 本の制約式を加えて, 2 回目には $N = 3663$ の (CRP_N) の緩和問題を解くことで, 精度保証つき (絶対誤差 $\zeta + \delta \leq 0.06$) の最適値 $t_N^* = 1.060$ が得られた.

6 おわりに

対象とする最適化問題が凸計画問題だとしても、不確実性を考慮してロバスト最適化問題にすると、問題が数段に難しくなってしまう。本稿では、ロバスト最適化問題の不確実性集合 U からベクトルをランダムに N 点サンプリングして、 N 本の制約式を持つ緩和問題を構築して解く方法を紹介した。Calafiore & Campi [3] の成果を拡張することにより、制約式を破る確率を確率的に評価するだけでなく、制約式を破る大きさについての確率的な評価を示すことができる。制約式を破る大きさについての確率的評価をもとに、精度保証のついた逐次的緩和アルゴリズムを構築し、この提案アルゴリズムをロバスト偏差問題に適用した。その結果、数回の反復で最適値に近い緩和値が得られることが観察できた。

今後は、提案アルゴリズムを他のロバスト性基準 (Relative Robustness) を用いたロバスト最適化問題に適用して、有効性を調べていきたい。また、サンプリングを通して作られた緩和問題の求解を簡単にするため、あまり役に立たないサンプルを捨てる方法についても考えていきたい。

参考文献

- [1] I.D. Aron and P.V. Hentenryck: On the complexity of the robust spanning tree problem with interval data, *Operations Research Letters*, **32** (2004) 36-40.
- [2] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: Robust convex optimization, *Mathematics of Operations Research*, **23** (1998) 769-805.
- [3] G. Calafiore and M.C. Campi: A new bound on the generalization rate of sampled convex programs, *43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC04)*, **5** (2004) 5328-5333.
- [4] L. El Ghaoui and H. Lebret: Robust solutions to least-squares problems with uncertain data, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **18** (1997) 1035-1064.
- [5] D. Goldfarb and G. Iyengar: Robust portfolio selection problems, *Mathematics of Operations Research*, **28** (2003) 1-38.
- [6] T. Kanamori and A. Takeda: Worst-case violation of sampled convex programs for optimization with uncertainty, *Research Report B-425, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology* (2006).
- [7] P. Kouvelis and G. Yu: *Robust discrete optimization and its applications*, (Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997).
- [8] V. Krishnamurthy: *Robust optimization in finance*, (Second Summer Paper for the Doctoral Program, Tepper School of Business, Carnegie Mellon University, 2004).
- [9] A.L. Soyster: Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming, *Operations Research*, **21** (1973) 1154-1157.

- [10] A. Takeda, S. Taguchi and T. Tanaka: Relaxation methods for robust deviation and relative robust decision models, *Research Report B-427, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology* (2006).
- [11] H. Yaman, O.E. Karaslan and M.Ç. Pinar: The robust spanning tree problem with interval data, *Operations Research Letters*, **29** (2001) 31-40.
- [12] G. Yu and J. Yang: On the robust shortest path problem, *Computers & Operations Research*, **25** (1998) 457-468.