

整数計画法のポートフォリオ最適化への応用

山本 零

三菱 UFJ トラスト 投資工学研究所

東京都港区芝 2 丁目 5 番 6 号

yamamoto@mtec-institute.co.jp

概要

ポートフォリオ最適化問題は、数理計画法の適用例として古くから利用されている問題である。この問題には、平均・分散モデルをはじめとする様々なモデルが提案されているが、ほとんどのモデルが凸計画問題としてモデリングされている。しかしながら、コストの考慮や非凸型の指標の利用など、非凸型のポートフォリオ構築問題が近年注目されている。

本稿では、このような非凸型のポートフォリオ最適化問題に対し、整数計画法を用いたアルゴリズムを提案し、この問題が効率的に求解できることを報告する。

Keywords: ポートフォリオ最適化, 整数計画法, 大域的最適化, 平均・分散モデル, 取引コスト, 平均・分散・歪度モデル, 予測可能性最大化モデル.

1 はじめに

1952年に Markowitz [10]により平均・分散モデルが提案されて以来、ポートフォリオ最適化の標準モデルとして平均・分散モデルが広く利用されてきた。

しかしながら、平均・分散モデルをはじめとする数理計画法を用いたポートフォリオ最適化問題では、問題の構造が複雑になるため、様々な制約が無視、または簡略化されていることが多い。例えば、売買にかかる取引コストは通常非凸型の形状であるが、そのようなコスト関数を取り入れた場合、問題が非凸型になることから線形で近似される。

また、投資手法も日々進歩しており、様々な非凸型の指標がポートフォリオ構築に必要であるとされている。これらの指標を用いる際には、局所的最適解を用いることが一般的であり、大域的最適解に比べ、著しく目的関数値が劣化する可能性もある。

一方、近年の大域的最適化、整数計画法などの数理計画アルゴリズムの開発、計算機の高速化により、これまで解くことが困難とされてきた数理計画問題が解けるようになっている。それに伴い、ポートフォリオ最適化に関しても、上記で説明した複雑な問題を解く環境が整ってきている。

そこで本稿では、これら様々な非凸型のポートフォリオ最適化問題に対し、整数計画法を利用した区分線形近似アルゴリズムを提案し、これらの問題が効率よく求解できることを示す。

次章では、ポートフォリオ最適化の基本モデルである平均・分散モデルの解説と記述の定義を行う。第3章では、整数計画法を用いた区分線形近似アルゴリズムを説明し、それ以後の章で、このアルゴリズムを適用したいくつかの例を紹介する。

第4章では、取引コストを考慮した平均・分散モデルについて説明する。この問題は、混合整数2次計画問題となるが、区分線形近似アルゴリズムを適用することで、実用的な時間で求解することができる。

第5章では、ポートフォリオ構築に歪度を考慮した平均・分散・歪度モデルを紹介し、第6章では、新しいポートフォリオ構築の指標である決定係数を紹介する。これらの指標は、非凸型の指標であり、取り扱うことが困難とされてきた指標である。この問題に対しても区分線形近似アルゴリズムが有効であることを示す。

2 平均・分散モデル

本章では、以下の章で利用する記述の定義を行い、基本モデルとして平均・分散モデルの定式化について説明する。

市場には n 個の資産 S_j , $j = 1, 2, \dots, n$ があり, R_j を資産 S_j の収益率を表す確率変数, r_j を R_j の期待値とする。また, x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ を資産 S_j に投資する投資比率とする。このとき, ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を投資家の所有するポートフォリオウェイト, $R(\mathbf{x})$ をポートフォリオの収益率とする。

収益率ベクトル (R_1, R_2, \dots, R_n) が $(r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})$, $t = 1, 2, \dots, T$ を実現値集合とする離散分布に従うものとし, その確率

$$f_t = \Pr\{(R_1, R_2, \dots, R_n) = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})\}, t = 1, 2, \dots, T,$$

が与えられているものとする。本研究では r_{jt} に第 j 銘柄の t 期の月次収益率を使用した。また以下では議論を単純化するため, $f_t = 1/T$ とする。このとき, R_j の期待値 r_j は

$$r_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt},$$

と表現でき, ポートフォリオの期待収益率 $E[R(\mathbf{x})]$ は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} E[R(\mathbf{x})] &= \sum_{j=1}^n E[R_j] x_j \\ &= \sum_{j=1}^n r_j x_j. \end{aligned} \quad (1)$$

次に収益率の分散 $V[R(\mathbf{x})]$ は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} V[R(\mathbf{x})] &= E[(R(\mathbf{x}) - E[R(\mathbf{x})])^2] \\ &= E\left[\left(\sum_{j=1}^n (R_j - r_j) x_j\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j\right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

また, 投資家の投資可能集合 X を以下のように表現する。

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1, 0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (3)$$

ここで $\sum x_j = 1$ は与えられた資産を使い切る制約であり、 u_j は各銘柄の投資上限である。このとき平均・分散モデルは以下のように定義される。

$$\left| \begin{array}{l} \text{最大化} \quad \sum_{j=1}^n r_j x_j \\ \text{条件} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right)^2 \leq s^2 \\ \mathbf{x} \in X, \end{array} \right. \text{ or } \left| \begin{array}{l} \text{最小化} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right)^2 \\ \text{条件} \quad \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho \\ \mathbf{x} \in X. \end{array} \right. \quad (4)$$

ここで s は許容するリスク量 (標準偏差) であり、 ρ は要求する期待収益率の水準である。

3 区分線形近似アルゴリズム

この章では、非凸型の最適化問題や混合整数非線形計画問題を解くための区分線形近似アルゴリズムを紹介する。この方法は古くから提案されている方法であるが、この方法で非凸型の関数を表現する場合、多くの0-1変数が必要となるため、実用的な規模の問題を解くことが困難であった [1]。近年の整数計画法のアルゴリズムの発展と計算機の高速化によって、ある程度の規模の整数計画問題が最適化ソフトウェアを用いて求解できるようになり、このアルゴリズムの有効性が高まっている。

分離可能な関数 $f(\mathbf{x})$ を非線形関数 $f_i(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ の和として定義する。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (5)$$

ここで、変数 x_i に対し、有限な定義域 $[x_i^L, x_i^U]$ が与えられているものとする。このとき、区間 $[x_i^L, x_i^U]$ を m 等分した点を $x_i^l = x_{i0} < x_{i1} < \dots < x_{im} = x_i^U$ とし、関数 $f_i(x_i)$ を区分線形近似した関数を $g_i(x_i)$ とする (図1)。

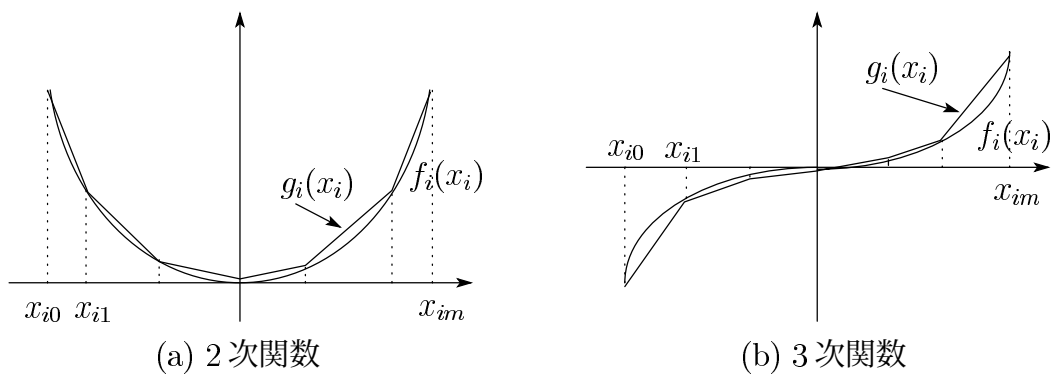


図1. 区分線形近似の例

このとき、関数 $g_i(x_i)$ は、正の補助変数 $\lambda_{il}, i = 1, 2, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots, m$ を導入することで以下のように表現できる。

$$g_i(x_i) = \sum_{l=0}^m f_i(x_{il}) \lambda_{il}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$x_i = \sum_{l=0}^m x_{il} \lambda_{il}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$\sum_{l=0}^m \lambda_{il} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

ここで λ_{il} が節点の内分比を表すためには、各 i について高々隣り合う2つの変数しか正の値を取ってはならない。関数 $f_i(x_i)$ が非凸型の関数の場合には、この条件を満たすため、非凸型の部分に 0-1 変数 $y_{il}, i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m$ を導入して以下のような制約を与える。

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m y_{il} &= 1 \\ \lambda_{i0} &\leq y_{i1} \\ \lambda_{i1} &\leq y_{i1} + y_{i2} \\ &\vdots \\ \lambda_{im-1} &\leq y_{im-1} + y_{im} \\ \lambda_{im} &\leq y_{im}. \end{aligned}$$

このように、非線形関数を区分線形近似することで、非凸型の関数の場合 0-1 混合整数線形計画問題に帰着することができた。このような区分線形近似関数の表現は、Padberg [11] などにより、より効率的な表現方法も提案されている。しかしながら、Konno, Izumi and Yamamoto [3] では、一般的なポートフォリオ最適化に関する制約下では、上記の表現が計算時間が最も短くなることを検証しており、本研究ではこの定式化を利用している。

関数 $g_i(x_i)$ はもとの関数 $f_i(x_i)$ の近似関数であり、その近似誤差が大きくなる場合がある。その場合には、以下の手順を用いて近似誤差を改善する。

アルゴリズム：区分線形近似アルゴリズム

0° $\varepsilon > 0, p = 0$.

1° 区分線形近似関数 $g_i(x_i)$ を用いた問題を解く。最適解を \mathbf{x}^* とし、 $f(\mathbf{x}^*), g(\mathbf{x}^*)$ を計算する。

2° もし $|f(\mathbf{x}^*) - g(\mathbf{x}^*)|/|f(\mathbf{x}^*)| \leq \varepsilon$ であれば 4° へ。そうでなければ 3° へ。

3°

$$x_{is} = \{x_{il} \mid x_{il} \leq x_i^* \leq x_{il+1}, l = 1, 2, \dots, m-1\}$$

となる x_{is} を探し、 $x_i^L := x_{is-1}, x_i^U := x_{is+2}, p := p+1$ として 1° へ。

4° 終了。 \mathbf{x}^* を ε 最適解とする。

4 取引コストを考慮した平均・分散モデル

この章では、取引コストを考慮した平均・分散モデルについて説明する。通常、この問題は 0-1 混合整数 2 次計画問題として定式化される。そのため、取引コストのように整数変数を

取り扱う場合には、リスク指標に絶対偏差など線形の指標を利用することが多い [5,6]. しかしながら、実務上リスク指標に分散を利用することが多く、平均・分散モデルに取引コストを考慮することが必要となる. 本研究では、この問題を区分線形近似アルゴリズムを用いて実用的な時間で求解できることを紹介する.

4.1 定式化

第2章で定義した平均・分散モデルを考える. 全て期初に新規買付けを行う場合、取引コスト関数を $c(x_j)$ としたときのネットの期待収益率は以下のようなになる.

$$E[R(\mathbf{x})] = \sum_{j=1}^n (r_j x_j - c(x_j)). \quad (9)$$

このとき取引コストを考慮した平均・分散モデルを以下のように定義する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad \sum_{j=1}^n (r_j x_j - c(x_j)) \\ \text{条件} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right)^2 \leq s^2 \\ \mathbf{x} \in X. \end{array} \right. \quad (10)$$

次に取引コスト関数として区分線形凹型関数を仮定し、第3章で説明したように補助変数 $\lambda_{jl}, j = 1, 2, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots, k, 0$ -1 変数 $y_{jl}, j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, k$ を導入して以下のように表現する (図2).

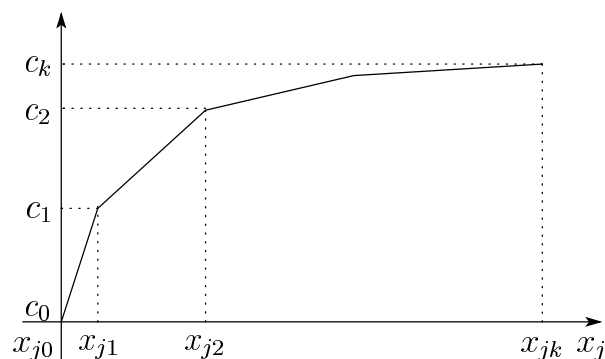


図2. 取引コスト関数

$$\begin{aligned}
& \text{最大化} && \sum_{j=1}^n r_j x_j - \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^k c_l \lambda_{jl} \\
& \text{条件} && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right)^2 \leq s^2 \\
& && x_j = \sum_{l=0}^k x_{jl} \lambda_{jl}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& && \sum_{l=0}^k \lambda_{jl} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& && \sum_{l=1}^k y_{jl} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& && \lambda_{j0} \leq y_{j1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& && \lambda_{jl-1} \leq y_{jl-1} + y_{jl}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, k \\
& && \lambda_{jk} \leq y_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& && \lambda_{jl} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 0, 1, \dots, k \\
& && y_{jl} = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, k \\
& && \mathbf{x} \in X.
\end{aligned} \tag{11}$$

問題 (11) は、0-1 混合整数 2 次計画問題として定式化されている。本研究では、この問題の 2 次の項を区分線形近似し、区分線形近似アルゴリズムを用いることで求解した¹。

4.2 計算機実験

この節では区分線形近似アルゴリズムを使用した計算機実験の結果を示す。計算機環境は PentiumIV(1.82GHz)、メモリ 512Mbyte であり、使用した最適化ソフトは CPLEX8.0(ILOG) である。また使用したデータは、東証一部上場の 900 社 36 期の月次収益率であり、取引コスト関数には、 $k = 8$ の関数を利用した。計算結果は 3 つのデータセット (1998 年 12 月～2001 年 11 月, 1999 年 6 月～2002 年 5 月, 1999 年 12 月～2002 年 11 月) の平均を取ったものであり、 $\varepsilon = 1\%$, $m = 10$ とした。

本研究では一般的に利用される取引コスト関数を下方線形近似したモデルと最適解を比較することで、厳密に取引コストを考慮する有効性を検証した。

表 1 に標準偏差 $s = 4.0\%$ 、資金総額 10 億円の際の問題 (11) の結果を示す。ここで「目的関数改善率」、「コスト改善率」とは、下方線形近似モデルと比較したときの相対的な改善率である。

表 1 より、区分線形近似アルゴリズムを使用することで、どのケースにおいても現実的な時間で求解できていることがわかる。また、厳密な取引コストを考慮することで目的関数値が 0.3%～15%程度、ポートフォリオを構築する際の取引コストは 0.5%～28%程度改善している。特に個別銘柄の投資上限をあげると改善率は著しく増加しており、厳密なコストを考慮することで、同等のリターン/リスク構造のポートフォリオであっても、低コストで構築できることがわかる。

¹アルゴリズムの詳細は [14] を参照。

個別上限	2%			
ユニバース	100	200	300	400
目的関数改善率 (%)	0.47	2.22	0.42	0.27
コスト改善率 (%)	0.47	1.10	0.89	0.72
CPU(秒)	34	780	306	403
保有銘柄数	51	51	51	52

個別上限	5%			
ユニバース	100	200	300	400
目的関数改善率 (%)	15.36	3.51	1.25	1.40
コスト改善率 (%)	4.13	7.63	5.04	6.08
CPU(秒)	1	4	4	8
保有銘柄数	24	27	24	26

個別上限	10%			
ユニバース	100	200	300	400
目的関数改善率 (%)	11.16	4.46	3.31	3.19
コスト改善率 (%)	23.18	23.21	27.37	27.80
CPU(秒)	2	4	5	8
保有銘柄数	16	17	18	17

表 1: ユニバースと最適解の変化

5 平均・分散・歪度モデル

本章では、非凸型の指標である歪度を用いたポートフォリオ最適化問題について説明する。

平均・分散モデルは、資産の収益率分布が多次元正規分布に従っている場合、または投資家が2次型の効用関数を持っている場合には、期待効用最大化の原理と整合的であるという点で経済学的な合理性を持つ理論である。

しかしながら、全ての投資家が2次型の効用関数を持つことは厳しい仮定であり、実際の株式の収益率分布も正規分布でないことが知られている。このような状況で期待効用最大化の原理と整合性を持たせるためには、高次のモーメントである歪度を考慮する必要があるとされている [7]。

また、高い歪度をもつポートフォリオを構築することで、事後パフォーマンスも高いポートフォリオを構築できることが実証されており、歪度を考慮することの重要性が高まっている [12]。

しかしながら、歪度は非凸型の指標であるため、ポートフォリオ最適化に取り入れて厳密に取り扱うことは困難であるとされてきた。先行研究として、分枝限定法を利用した解法が提案されているが、投資対象銘柄数 100 銘柄程度の規模の小さい問題しか求解していない [4,8]。

そこで以下では、区分線形近似アルゴリズムを利用することで、大規模の投資対象銘柄で歪度の高いポートフォリオを構築できることを説明する。

5.1 定式化

第2章と同様の設定の下、平均・分散・歪度モデルは以下のように定義される [7]。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad k[R(\mathbf{x})] \\ \text{条件} \quad V[R(\mathbf{x})] \leq s^2 \\ \quad E[R(\mathbf{x})] = \rho \\ \quad \mathbf{x} \in X. \end{array} \right. \quad (12)$$

ここで、 $E[R(\mathbf{x})]$ 、 $V[R(\mathbf{x})]$ はポートフォリオのリターンと分散であり、第2章の定義と同様である。また、 $k[R(\mathbf{x})]$ はポートフォリオの収益率の3次のモーメントであり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} k[R(\mathbf{x})] &= E\left[\left(\sum_{j=1}^n (R_j - r_j)x_j\right)^3\right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j\right)^3. \end{aligned} \quad (13)$$

これより, 問題 (12) は以下のように書き直すことができる.

$$\begin{array}{l}
 \text{最大化} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t^3 \\
 \text{条件} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t^2 \leq s^2 \\
 \sum_{j=1}^n r_j x_j = \rho \\
 z_t = \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j, t = 1, \dots, T \\
 \mathbf{x} \in X.
 \end{array} \tag{14}$$

問題 (14) は, 凸領域での非凸型関数の最大化問題として定式化されている. 本研究では, 分散と歪度を区分線形近似することで, 区分線形近似アルゴリズムを適用して求解する. この場合, 目的関数の非凸型の部分 (上半分) にのみ 0-1 変数を導入することで, 0-1 混合整数線形計画問題として定式化される².

5.2 計算機実験

この節では, 区分線形近似アルゴリズムを用いた平均・分散・歪度モデル (MVS) の求解時間と, 構築されたポートフォリオの歪度特性, パフォーマンスについて評価を行う.

使用したデータは, 1991年2月から2002年11月までの間上場していた東京証券取引所の900銘柄の月次収益率である. また, 計算機環境はCPUがPentiumIVの2.8GHz, メモリが512Mbyteであり, 整数計画問題を解くためのソフトウェアにCPLEX8.0(ILOG)を利用した.

以下に投資対象銘柄数 n を変化させた場合の結果について示す. ここで, $u_j = 2\%$, $T = 36$, $m = 20$ であり, ρ と s にはインサンプル期間でのTOPIXと同じ期待収益率と標準偏差の値を設定した. また, $\varepsilon = 1\%$ としている.

n	歪度	t 値	計算時間 (秒)	反復回数
200	1.82	4.86	73	2
300	2.33	6.21	42	2
400	2.87	7.66	67	2
500	3.26	8.70	66	2
600	3.34	8.91	58	2
700	3.52	9.38	139	2
800	3.77	10.05	115	2
900	3.88	10.34	350	2

表 2: 最適解の構成

表 2 より, 投資対象銘柄数を増やしても現実的な計算時間で求解できていることがわかる. また, t 値は歪度の関する正規性の検定を行ったものであり, $n = 200$ のときでさえ, 正規分布

²アルゴリズムの詳細は [7] を参照.

に比べて十分大きな歪度を得られている。さらに $n = 100$ 程度の規模で求解していた先行研究と比較した場合、 $n = 900$ とすることで、かなり大きい歪度を獲得できることがわかる。

次に事後分析の結果について考察する。表3は、ポートフォリオを構築してから数ヶ月(3,6,11)後のポートフォリオのパフォーマンスを計測し、それがTOPIXを上回っている回数、勝率を示している。また、同条件の平均・分散モデル(MV)についても比較を行っている。ここで試行回数は16回であり、 $n = 900$, $T = 36$ である。

u_j	2%		5%		100%	
	MVS	MV	MVS	MV	MVS	MV
3カ月後	12(75%)	9(56.3%)	8(50.0%)	12(75%)	9(56.3%)	11(68.8%)
6カ月後	10(62.5%)	9(56.3%)	8(50.0%)	10(62.5%)	7(43.8%)	10(62.5%)
11カ月後	9(56.3%)	9(56.3%)	8(50.0%)	8(50.0%)	8(50.0%)	9(56.3%)

表 3: 事後分析の統計

表3より、 $u_j = 2\%$ のときには、3カ月後の事後分析は16ケース中12ケースがTOPIXを上回る結果となっている。また、この結果は、一般的な平均・分散モデル(MV)よりも良い結果である。しかしながら、 u_j を増加させた場合には、事後パフォーマンスが悪化している。これより、パフォーマンスを高めるためには、ある程度の分散投資を行った方が良いことがわかる。また、事後分析期間を長く取った場合も、パフォーマンスが劣化している。これは歪度の効果が長期間持続しないことを表している。

このように、歪度の高いポートフォリオを構築することで、短期的であれば平均・分散モデルやTOPIXを上回るパフォーマンスを得る可能性があることがわかる。

6 予測可能性最大化モデル

本章では、近年提案されたポートフォリオ構築手法として予測可能性最大化モデルについて解説する。

1997年に収益率の予測可能性に着目した新しいポートフォリオ構築方法として予測可能性最大化モデル(Maximal Predictability Portfolio (MPP))が、Lo and MacKinlayにより提案された[9]。Lo and MacKinlayは、決定係数を高めることで、より高い予測力を持つポートフォリオを構築できるとし、MPPをファクターモデルにより収益率を表現した場合の決定係数を最大化したポートフォリオとして定義した。

しかしながら、MPPの構築問題は、凸2次関数の比の最大化問題という大域的最適解を得ることが困難な問題として定式化されている。本研究では、この問題を分数計画法の代表的な解法であるDinkelbachの解法と区分線形近似アルゴリズムを組合わせた解法を提案し、実際の市場データを用いて分析することで、解法の効果とMPPの有効性を検証する。

6.1 定式化

市場には n 個の資産 $S_j, j = 1, 2, \dots, n$ が存在するものとし, $\mathbf{r}_t \in R^n$ を各資産の t 期の収益率を表すベクトルとする. このとき以下のマルチファクターモデルを考える.

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{B}\mathbf{F}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, t = 1, 2, \dots, T. \quad (15)$$

ここで $\mathbf{B} \in R^{n \times K}$ はファクター感応度行列, $\mathbf{F}_{t-1} \in R^K$ は $t-1$ 期のファクターリターンベクトル, $\boldsymbol{\varepsilon}_t \in R^n$ は条件 $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{F}_{t-1}] = 0$ を満たす誤差ベクトルとする. また, $\tilde{\mathbf{r}}_t = E[\mathbf{r}_t | \mathbf{F}_{t-1}]$, $\text{Var}[\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathbf{F}_{t-1}] = \boldsymbol{\Sigma}$ であり, $\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値行列とする.

次に $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in R^{n \times n}$ を $\mathbf{r}_t, \tilde{\mathbf{r}}_t$ の分散共分散行列とし, 以下のように記述する.

$$\mathbf{P} = \text{Var}[\mathbf{r}_t] = \mathbf{B}\text{Var}[\mathbf{F}_{t-1}]\mathbf{B}^T + \boldsymbol{\Sigma}, \quad (16)$$

$$\mathbf{Q} = \text{Var}[\tilde{\mathbf{r}}_t] = \mathbf{B}\text{Var}[\mathbf{F}_{t-1}]\mathbf{B}^T. \quad (17)$$

ポートフォリオウェイトを $\mathbf{x} \in R^n$ としたとき, ポートフォリオの収益率の予測可能性 (Predictability) として決定係数を以下のように定義する.

$$R^2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}. \quad (18)$$

$R^2(\mathbf{x})$ は, 期待リターン $\tilde{\mathbf{r}}^T \mathbf{x}$ のバラツキと実測のリターン $\mathbf{r}^T \mathbf{x}$ のバラツキの比で表現されている. Lo and MacKinlay は, 予測可能性最大化ポートフォリオを投資可能集合の下で決定係数 $R^2(\mathbf{x})$ を最大とするポートフォリオ $\mathbf{x} \in R^n$ として定式化し, 設定した期待収益率を最も実現しやすいポートフォリオであるとしている.

これより, 予測可能性最大化ポートフォリオ構築問題を以下のように定義する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad R^2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}} \\ \text{条件} \quad \tilde{\mathbf{r}}_t^T \mathbf{x} \geq \rho \\ \quad \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \end{array} \right. \quad (19)$$

ここで \mathbf{P} は対称な正定値行列, \mathbf{Q} は対称な半正定値行列, \mathbf{X} は空でない有界な集合とする.

本研究では, 問題 (19) に対し, Dinkelbach の解法と区分線形近似アルゴリズムを組合わせた解法を提案し, この問題が現実的な時間で求解できることを実証する³.

6.2 計算機実験

この章では, 現実の市場データを用いた計算機実験について説明する. 使用したデータは, 日経 225 採用銘柄の 1998 年 5 月~2005 年 7 月までの月次データ 88 期であり, ファクターには, [2,9] で使用されているものを利用して, 3, 5, 7 ファクターのファクターモデルを作成した.

実験方法は, 同条件の下で予測可能性最大化ポートフォリオ (MPP) と標準的な平均・分散モデルから得られるポートフォリオ (MVP) を月次で 88 回求解し, 計算時間, パフォーマンスを比較した. 計算機には PentiumIV (512Mbyte, 2.8GHz) を利用し, 最適化パッケージには CPLEX8.0 (ILOG) を利用した.

K	3			5			7		
ρ	1%	2%	3%	1%	2%	3%	1%	2%	3%
平均	859	854	785	736	808	824	746	706	772
標準偏差	540	508	488	444	420	469	414	367	380
最大	2896	2515	2657	2241	2174	3314	1962	1931	1883
最小	128	251	71	51	146	115	122	97	89

表 4: 計算時間の統計値 (秒)

はじめにポートフォリオ構築を行った 88 期間の計算時間の統計値を記す。

表 4 より, MPP の計算が約 800 秒程度で行うことができ, 期待収益率制約, ファクター数には大きく影響を受けないことがわかる。

次に図 3 にポートフォリオの決定係数を示す。ここで”Average”は, 投資対象の 225 銘柄の決定係数の平均値である。図 3 より, 個別銘柄や MVP に比べ, MPP は非常に高い決定係

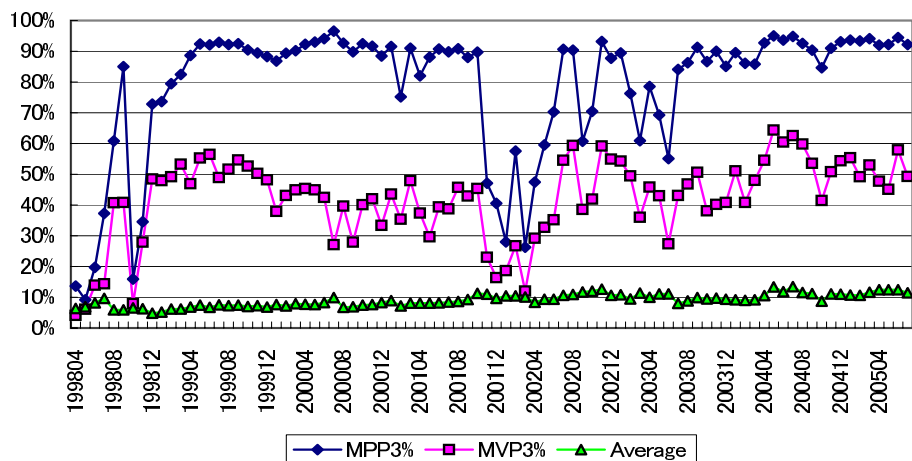


図 3. 決定係数の推移 ($K=3, \rho=3\%$)

数を得られていることがわかる。

次に, MPP と MVP の事後的なパフォーマンスを分析する。図 4 より, MPP は MVP よりも高いパフォーマンスを得られており, その結果がファクターモデルに依存しないことがわかる。

このように区分線形近似アルゴリズムを用いることで, これまで求解することが困難とされてきた MPP の構築問題が現実的な時間で求解できることがわかった。また, MPP は通常の MVP よりも高い決定係数を持ち, その結果事後パフォーマンスもインデックス, MVP よりも高まる可能性があることがわかった。

³アルゴリズムの詳細は, [13] を参照。

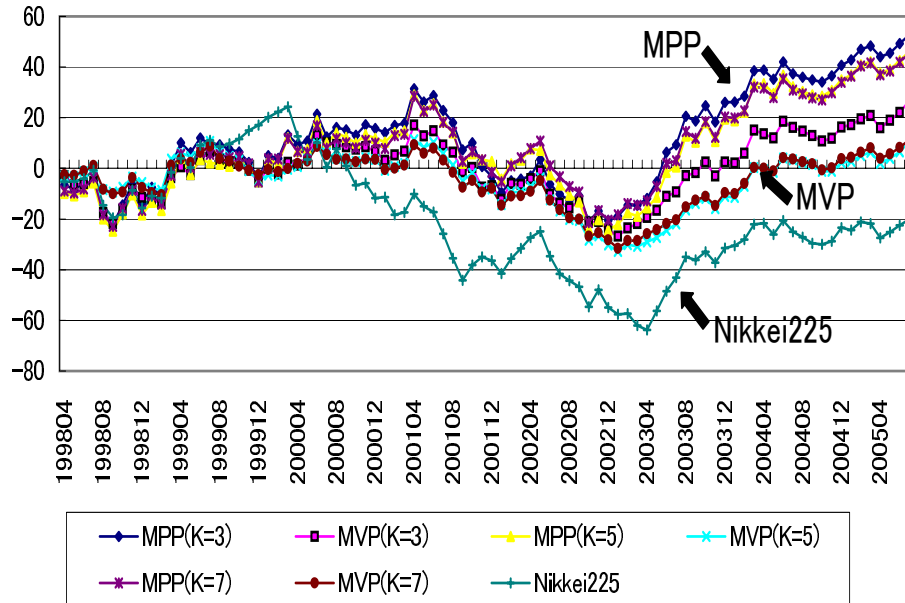


図 4. ファクターモデルの違いによるパフォーマンス ($\rho = 3\%$)

7 結論

本研究では、非凸型の数理計画問題を解くアルゴリズムとして、整数計画法を利用した区分線形近似アルゴリズムを提案し、いくつかの非凸型のポートフォリオ最適化問題に対して適用した。

提案したアルゴリズムを用いることで、これらの非凸型の問題を実用的な時間で解くことができることを紹介した。また、実際の市場データを用いた分析を行い、取引コストや非凸型の指標の有効性を実証した。これらの結果は、整数計画法や大域的最適化のアルゴリズムの進歩によって可能となったものである。

ただし、これらの実験は非常に単純な制約条件の下で行われたものであり、より実際の運用条件に近い状況では、計算時間に大きな影響を及ぼすかもしれない。また、様々な運用手法の開発により、紹介した問題以外にも非凸型のポートフォリオ最適化問題が数多く提案されている。これらの問題を解決するために、数理計画法の技術の進歩がこれからも必要である。

参考文献

- [1] G.B. Dantzig: Portfolio Selection, *Linear Programming and Extensions*, (Princeton University Press, 1963).
- [2] F. Fama and K. French: Common Risk Factors in the Returns on Stock and Bonds, *Journal of Financial Economics* **33** (1993), 3-56.
- [3] H. Konno, K. Izumi and R. Yamamoto: Comparison of Hyperrectangular Subdivision Algorithm and Mixed 0-1 Integer Programming Algorithm for Portfolio Optimization under Nonconvex Transaction Costs, *ISE 06-01, Department of Industrial and Systems Engineering, Chuo University* (2006).

- [4] H. Konno and K. Suzuki: A Mean-Variance-Skewness Portfolio Optimization Model, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **38** (1995), 173-187.
- [5] H. Konno and A. Wijayanayake: Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model Under Transaction Costs, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **42** (1999), 422-435.
- [6] H. Konno and R. Yamamoto: Integer Programming Approaches in Mean-Risk Models, *Computational Management Science* **4** (2005), 339-351.
- [7] H. Konno and R. Yamamoto: A Mean-Variance-Skewness Model -Algorithm and Applications-, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **8** (2005), 409-423.
- [8] H. Konno and H. Yamazaki: A Mean-Absolute Deviation-Skewness Portfolio Optimization Model, *Annals of Operations Research* **45** (1993), 205-220.
- [9] A. Lo and C. MacKinlay: Maximizing Predictability in the Stock and Bond Markets, *Macroeconomic Dynamics* **1** (1997), 102-134.
- [10] H. Markowitz: Portfolio Selection, *Journal of Finance* **7** (1952), 77-91.
- [11] M. Padberg: Approximating Separable Nonlinear Functions via Mixed Zero-one Programs, *Operations Research Letters* **27** (2000), 1-5.
- [12] H.S. Ryoo: A Compact Mean-Variance-Skewness Model for Large-Scale Portfolio Optimization and Its Application to the NYSE Market, *Journal of the Operational Research Society* **58** (2007), 505-515.
- [13] R. Yamamoto, D. Ishii and H. Konno: A Maximal Predictability Portfolio Model - Algorithm and Performance Evaluation-, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* (to appear).
- [14] R. Yamamoto and H. Konno: An Efficient Algorithm for Solving Mean-Variance Model under Transaction Costs, *Pacific Journal of Optimization* **2** (2006), 385-398.