連結度要求を持つネットワーク構成問題

石井　利昌

小樽商科大学 商学部 社会情報学科

〒 047-8501 小樽市緑 3 丁目 5-21

ishii@res.otaru-cu.ac.jp

概要

グラフ理論における連結度の概念は, 種々のネットワークの制御・設計において, 耐故障性に関する基本的な評価尺度として用いられる. 所望の連結度を保証するネットワークを最適構成する問題として, 連結度増大問題と供給点配置問題を取り上げる. 近年, これらの問題に対し, 効率的なアルゴリズムの研究が盛んに行われており, また劣モジュラ関数を用いて一般化された離散最適化問題の研究もされてきている. 本稿では, これらの問題に対する最近の研究結果を紹介する.

Keywords: グラフ, アルゴリズム, 連結度, 連結度増大問題, 供給点配置問題

1　はじめに

ネットワークに関する諸現象を理論的に扱う場合, しばしばグラフにモデル化されて考えられる. グラフ理論における連結度の概念は, 種々のネットワークの制御・設計において, 耐故障性に関する基本的な評価尺度として用いられる. 中でも, グラフの辺連結度と点連結度がよく知られている. グラフの辺連結度 (点連結度) とは, グラフを非連結にするために取り除くべき辺の数 (節点の数) の最小値である. また, Menger の定理より, グラフの辺連結度 (点連結度) が k 以上であることは, どの 2 節点間にも互いに辺 (節点) を共有しないパスが k 本以上存在することと同等である. つまり, 辺連結度 (点連結度) が k 以上であるネットワークは, 同時に $k-1$ 本以下の回線 ($k-1$ 個以下のノード) に故障が発生しても, どの 2 節点間も連結である状態を保つことができる. また, コンピュータネットワーク上のミラーサーバのように同種のノードが複数存在するネットワークを考える場合は, 2 節点間の連結度より節点とある特定の節点集合の間の連結度を考える方が有効であるだろう.

本稿では, グラフの連結度を耐故障性の基準としてネットワークを構成する問題として, 連結度増大問題と供給点配置問題と呼ばれる二つの問題を取り上げる. 連結度増大問題とは, 与えられたグラフに, いくつかの辺を新たに加えることでその辺連結度または点連結度を指定された目標の値に増大させ, このとき加える辺の本数を最小にする問題である. この問題は, 1970 年代頃から通信網をはじめとするネットワークの設計問題の 1 分野として研究されてきている [11, 34]. 供給点配置問題とは, 連結度を考慮した施設配置問題の一つである. 与えられたグラフ上でどの節点からも指定された目標値以上の本数のパスが存在するように施設集合 (節点集合) を配置し, そのときの施設数または設置コストを最小にする問題で, 最近注目を集めているテーマの一つである. これらの問題に対して, 問題を解く効率的なアルゴリズムを中心に様々な研究がなされてきているだけでなく, 近年劣モジュラ関数を用いて一

般化された離散最適化問題の研究もされてきている．本稿では，主に無向グラフの問題を中心に，これらの問題に関する最近の研究結果を紹介する．

2　連結度の定義と基本的な性質

$G=(V,E)$ を，節点集合 V，辺集合 E とする無向グラフとする．また，$G=(V,E)$ の各辺 $e\in E$ には，非負実数の重み $c(e)\in R_+$ (R_+ は非負実数集合とする) が与えられているとする．特に，各辺 $e\in E$ の重み $c(e)$ が整数値の場合，G を多重グラフと呼ぶこととする．辺 $e=(u,v)$ の重み $c(e)$ は，$c(u,v)$ とも書く．G が多重グラフの場合，$c(u,v)$ は u, v を端点とする辺の多重度を表わす．$n=|V|, m=|\{\{x,y\}\mid c(x,y)>0\}|$ と記す．空でない互いに素な節点集合 $X,Y\subset V$ に対し，$x\in X$ かつ $y\in Y$ である辺 (x,y) の集合を $E_G(X,Y)$ で表わし，また $\sum_{e\in E_G(X,Y)} c(e)$ を $d_G(X,Y)$ で表わす．特に，$Y=V-X$ のときは単に $E_G(X)$ や $d_G(X)$ と記す．また，$d_G(\emptyset)=d_G(V)=0$ と定義する．節点集合 X に対して，X の隣接点の集合，つまり $\{u\in V-X\mid$ ある $v\in X$ に対して $(u,v)\in E\}$ を $N_G(X)$ と書く．

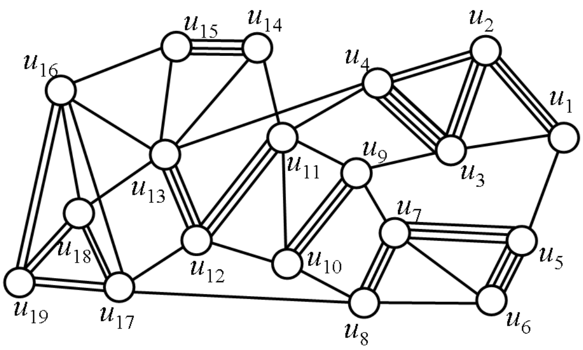

図 1: 無向多重グラフの例

2.1　辺連結度と点連結度

$E_G(X)$ (あるいは，単に X) をカットと呼び，$d_G(X)$ をそのカットの値とする．この節点集合 V 上の集合関数 $d_G: 2^V\to R_+$ は，G のカット関数と呼ばれる．2 節点 $u,v\in V$ を分離するカットの最小値，つまり $\min\{d_G(X)\mid u\in X\subseteq V-v\}$ を，u,v 間の局所辺連結度と呼び，$\lambda_G(u,v)$ と書く．グラフ G の全てのカットの最小値は，G の辺連結度と呼ばれ，$\lambda(G)$ と書く．$\lambda(G)=\min\{\lambda_G(u,v)\mid u,v\in V\}$ であることに注意されたい．$\lambda_G(X)\geq k$ であるグラフ G は k 辺連結と呼ばれる．図 1 のグラフでは，全てのカットの値は 4 以上であり，例えば，カット $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ やカット $\{u_{14},u_{15}\}$ の値は 4 なので，グラフの辺連結度は 4 である．

削除するとグラフが非連結になる節点集合 X を，点カットと呼び，$|X|$ を点カットのサイズとする．2 節点 $u,v\in V$ を分離する点カットのサイズの最小値，つまり $\min\{|X|\mid u,v$ は $G-X$ の異なる連結成分に含まれる $\}$ を，u,v 間の局所点連結度と呼び，$\kappa_G(u,v)$ と書く．グラ

フ G の全ての点カットのサイズの最小値は, G の点連結度と呼ばれ, $\kappa(G)$ と書く. $\kappa(G) \geq k$ であるグラフ G は k 点連結と呼ばれる. 例 1 のグラフでは, 全ての点カットのサイズは 3 以上であり, 例えば, $\{u_1, u_3, u_4\}$ を削除するとグラフは非連結になるので, グラフの点連結度は 3 である.

2.2 節点領域連結度

G が多重グラフの場合, Menger の定理より, $\lambda_G(u, v)$ ($\kappa_G(u, v)$) は u, v 間の互いに辺 (節点) を共有しないパスの最大数と見ることもできる. このように, 前節で紹介した辺連結度や点連結度は, 2 節点間の連結度を基に定義されている. 一方, 次のような状況下では, 2 節点間の連結度より, 節点と節点集合の間の連結度を考える方が有効である.

例えば, WWW (World Wide Web) 上の多くのサイトでは, あるサービスを提供するとき, 負荷分散や耐故障性のために, 同一のサービスを提供する複数のミラーサーバを用意している. このとき, ユーザは, そのサーバ群のいずれか一つに接続できればそのサービスを受けることができる. この状況下では, 各ユーザとサーバ集合の間に, どれくらい辺または節点を共有しないパスが存在するかが耐故障性の一つの基準と言える. この観点から, H.Ito[21, 22] は, 辺連結度や点連結度を拡張した概念であり, 節点と節点集合の間の連結度である, 節点領域連結度を定義した.

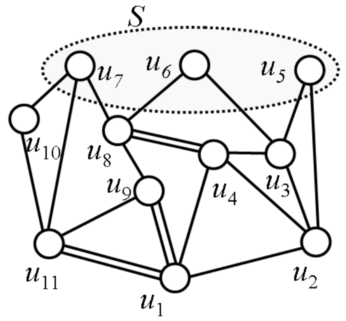

図 2: 領域 $S = \{u_5, u_6, u_7\}$ を持つグラフの例

節点 v と節点集合 $S \subseteq V$ ($v \notin S$ とする) の間の節点領域辺連結度は, v と S を分離するカットの最小値, つまり $\min\{d_G(X) \mid v \in X \subseteq V - S\}$ で定義され, $\lambda_G(S, v)$ と書く. $v \in S$ のときは, $\lambda_G(S, v) = \infty$ と定義する. G が多重グラフの場合, Menger の定理より, $\lambda_G(S, v)$ は v と S の間の辺を共有しないパスの最大数である. 図 2 のグラフでは, u_1 と S を分離する値最小のカットは, $\{u_1, u_9, u_{11}\}$ であり, $\lambda_G(S, u_1) = 5$ である.

節点領域点連結度については, 次の $\kappa_G(S, v)$ と $\hat{\kappa}_G(S, v)$ の 2 通りの定義がある. $\kappa_G(S, v)$ は, S と v を分離する点カット $Y \subseteq V - S - \{v\}$ の最小サイズで定義される. 言い換えれば, $\kappa_G(S, v)$ は, S と v を結び, S と v 以外の節点を共有しないパスの最大数である. $\hat{\kappa}_G(S, v)$ は, S と v を結び, v 以外の節点を共有しないパスの最大数で定義される. $\hat{\kappa}_G(S, v) \geq k$ であれば,

v 以外のどの $k-1$ 個の節点を削除しても, v から S の少なくとも一つの節点までパスが存在する．また, $\hat{\kappa}_G(S,v) \leq \kappa_G(S,v)$ であり, $\hat{\kappa}_G(S,v) \leq |S|$ が成り立つ．上記の WWW 上の例を用いて比較すると, $\kappa(S,v)$ は, サーバ群には故障が起こらない (通常のノードには故障が起こりうる) という仮定の下でのネットワークの耐故障性を表わし, $\hat{\kappa}(S,v)$ はサーバ群にも故障が起こりうるという仮定の下での耐故障性を表わしているといえる．図 2 のグラフでは, u_1 と S を分離するサイズ最小の点カットは, $\{u_2,u_4,u_8,u_{11}\}$ であるので $\kappa_G(S,u_1)=4$ である一方, $\hat{\kappa}_G(S,u_1)=3(=|S|)$ である．

2.3　カット関数の性質と極値集合

集合 $X,Y \subseteq V$ に対して, $X\cap Y$, $X-Y$, $Y-X$ のいずれも空でないとき, X と Y は G において互いに交差する (intersect) という．どの二つの集合も互いに交差しない集合族を, ラミナ (laminar) 族と呼ぶ．$G=(V,E)$ において, どの二つの集合 $X,Y\subset V$ も次の等式を満たす．

$$d_G(X)+d_G(Y) \geq d_G(X\cap Y)+d_G(X\cup Y). \tag{2.1}$$

$$d_G(X)+d_G(Y) \geq d_G(X-Y)+d_G(Y-X). \tag{2.2}$$

一般に, (2.1) を満たす集合関数を劣モジュラ (submodular) 関数という．また, (2.2) は, G が無向グラフであることと (2.1) から簡単に導ける．実際, $d_G(X)+d_G(Y)=d_G(X)+d_G(V-Y)$ $\geq d_G(X\cap(V-Y))+d_G(X\cup(V-Y)) \geq d_G(X-Y)+d_G(V-(Y-X)) \geq d_G(X-Y)+d_G(Y-X)$ である (G が無向なので, 任意のカット X に対して $d_G(X)=d_G(V-X)$ である)．また, X の隣接点の個数を表わす関数 $|N_G(X)|$ も劣モジュラ関数である．どの二つの集合 $X,Y\subset V$ も次の不等式が成り立つ．

$$|N_G(X)|+|N_G(Y)| \geq |N_G(X\cap Y)|+|N_G(X\cup Y)| \tag{2.3}$$

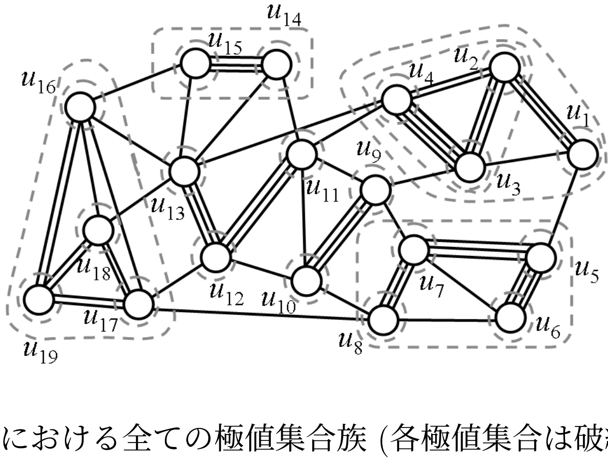

図 3: 図 1 のグラフにおける全ての極値集合族 (各極値集合は破線で表わされている)

次に, 与えられたグラフ上のカットの構造を特徴づける一つの表現方法として, 極値集合 (extreme set) という集合を紹介する．極値集合は, 与えられたグラフの特徴を解析するため

だけでなく, 主にカットに関するグラフアルゴリズムの設計やその効率化のために用いられる. 3.2 節と 4.1 節で極値集合を用いたアルゴリズムを紹介する. カット X は, X に真に含まれるどのカット $Y \subset X$ も $d_G(Y) > d_G(X)$ を満たすとき, 極値集合と呼ばれる. 図 3 において破線で表現されている集合族は, 図 1 のグラフにおける全ての極値集合族である. G の全ての極値集合族 $\mathcal{Z}(G)$ は, ラミナ族である. 実際, 二つの極値集合 X, Y が交差すると仮定すると, (2.2) より $d_G(X) + d_G(Y) \geq d_G(X - Y) + d_G(Y - X) > d_G(X) + d_G(Y)$ となり, 矛盾が生じる. $\mathcal{Z}(G)$ はラミナ族であるため, $|\mathcal{Z}(G)| = O(n)$ である. また, 定義より, 任意の $\emptyset \neq X \subseteq V$ に対して, $d_G(Y) \leq d_G(X)$ である極値集合 $Y \subseteq X$ が存在する. $\mathcal{Z}(G)$ は $O(mn + n^2 \log n)$ 時間で見つかることが H.Nagamochi[29] により示されている.

3 連結度増大問題

この章では, G を多重グラフとする. 辺連結度増大問題とは, 無向グラフ $G = (V, E)$ と非負整数 $k \in Z_+$ (Z_+ は非負整数集合を表わす) が与えられたとき, 最小本数の辺を加えることで, G の辺連結度を k 以上に増大させる問題である. 図 4 に, 図 1 の 4 辺連結グラフを 6 辺連結に増大させた例を表わす. T.Watanabe と A.Nakamura[40] により, 任意の非負整数 k

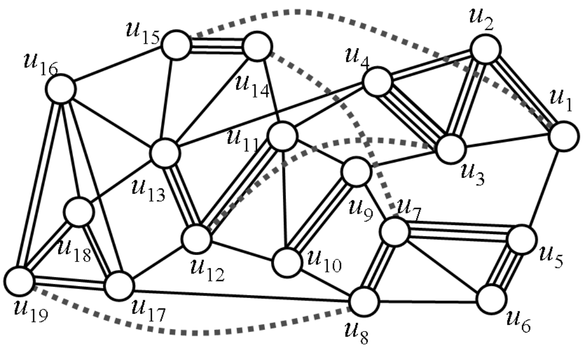

図 4: 図 1 のグラフを 6 辺連結グラフに増大させた例 (加えられた辺は破線で表わされている)

に対してこの問題が多項式時間で解けることが示されている. その後, アルゴリズムの計算量の改善が試みられ, G.-R.Cai と Y.-G.Sun[4] により, L.Lovász の辺遊離定理 (edge-splitting theorem) を用いたアプローチが発見された. このアプローチの発見が, 計算量の改善だけでなく様々な連結度増大問題に対する研究をより発展させたといえる. 現在では, 辺遊離定理を利用したアプローチが様々な連結度増大問題を解く代表的な手法となっている. 現在最良の計算時間は, H.Nagamochi[29] による $O(mn + n^2 \log n)$ 時間である. $O(mn + n^2 \log n)$ は, 辺連結度を求める現在最良の計算時間でもある [30]. 3.2 節では, 辺遊離定理を利用したアルゴリズムの流れを簡単に紹介する. 入力グラフが有向である場合は, A.Frank[6] により多項式時間で解けることが示されている.

点連結度増大問題は, 無向グラフ $G = (V, E)$ と非負整数 $k \in Z_+$ が与えられたとき, 最小本数の辺を加えることで, G の点連結度を k 以上に増大させる問題である. この問題は, 辺連

結度の問題に比べて扱いが難しく, 一般の k に対する多項式時間アルゴリズムは知られておらず, NP 困難であるかどうかも未だに分かっていない. $k = 2$ のときは [5, 16], $k = 3$ のときは [15, 41], $k = 4$ のときは [13, 14] により多項式時間アルゴリズムが与えられている. 最近, B.Jackson と T.Jordán [25] により, 任意の固定された k に対して多項式時間で解けることが示された. 一方で, 入力グラフが有向である場合は, A.Frank と T.Jordán[9] により多項式時間で解けることが示されている. 但し, 彼らの手法は楕円体法によるもので組合せ的ではない.

連結度増大問題に関しては, 他にも様々な研究がなされており, 例えば, 辺を付加する際の制約として, グラフの p 部性, 単純性, 平面性などを考慮した問題なども研究されている. 興味のある方は, [8, 31] のサーベイ論文を参照されたい. 以下では, 無向グラフにおける辺連結度の問題のみを扱い, その一般化やアルゴリズムについて紹介する.

3.1 辺連結度増大問題の一般化

辺連結度増大問題は様々な形で一般化されて研究されている. この節では, 辺連結度増大問題の一般化問題について紹介する.

目標となる連結度が一つの整数 k ではなく, 各 2 節点対 u, v 毎に非負整数値 $r(u, v)$ が指定され, u, v 間の局所辺連結度を $r(u, v)$ 以上に増大させる問題を, 局所辺連結度増大問題と呼ぶ. この問題は, 全ての $r(u, v)$ が同じ値である場合を考えれば, 上記の辺連結度増大問題の一般化になっているのは明らかである. この問題は, A.Frank[6] により, 多項式時間で解けることが示された. 現在最良の計算時間は, H.N.Gabow[10] による $O(n^2 m \log(n^2/m))$ 時間である.

節点集合族 $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ の各節点集合を領域と呼ぶ) と, 非負整数 k が与えられたとき, 任意の節点と任意の領域間の節点領域辺連結度を k 以上に増大させる問題は, 節点領域辺連結度増大問題と呼ばれる. この問題も辺連結度増大問題の一般化問題の一つである. 実際, $\mathcal{S} = \{\{v\}\}, v \in V$ の場合を考えると, 節点領域辺連結度の定義より, 任意の節点 $u \in V - v$ と v を分離する全てのカットの値を k 以上にする問題, つまり辺連結度増大問題と同等である. H.Miwa と H.Ito[28] は, この問題が $k = 1$ の場合 NP 困難である一方, $k = 2$ の場合 $O(|\mathcal{S}|n + m)$ 時間で解けることを示した. その後, $k \geq 3$ の場合も多項式時間で解けることが T.Ishii ら [17] により示されている. さらに, 各領域 $S \in \mathcal{S}$ 毎に非負整数値 $r(S)$ が指定され, 任意の節点 v と S 間の節点領域辺連結度を $r(S)$ 以上にする問題に拡張しても, 各領域 S について $r(S) \geq 2$ であれば, 多項式時間で解けることが T.Ishii と M.Hagiwara[20] により示されている.

また, 辺連結度増大問題が各カット X の値 $d_G(X)$ を k 以上に増大させる問題であることに注目し, 以下のような一般化も考えられる. 辺連結度増大問題において, もしカット X の値が k 未満であれば, X と $V - X$ の間には少なくとも $k - d_G(X)$ 本以上の辺を加える必要がある, 言い換えれば, X と $V - X$ の間には少なくとも $k - d_G(X)$ 本の辺が不足している, と言える. よって, 辺連結度増大問題は, 任意のカット X について, X と $V - X$ の間に $\max\{0, k - d_G(X)\}$ 本以上の辺を加える問題と捉えることができる. この観点から, 有限集合 V と集合関数 $p : 2^V \to Z_+$ が与えられたとき, 最小本数の辺を加えることで, 各カット X の値を $p(X)$ 以上に増大させる問題に一般化できる. この問題を, p-カバー問題と呼び, p を不足関数と呼ぶ. 辺連結度増大問題の場合, $p(X) = \max\{0, k - d_G(X)\}$ である. 局所辺連結度増大問題の場合, 各カット

X について, その値を X によって分離されている 2 節点 u, v に与えられた値 $r(u, v)$ 以上に増大させなければならないため, $p(X) = \max\{0, \max\{r(u, v) \mid u \in X, v \in V - X\} - d_G(X)\}$ である. 節点領域辺連結度増大問題の場合, 各カット X について, $X \cap S = \emptyset$ または $X \supseteq S$ である任意の $S \in \mathcal{S}$ に与えられた値 $r(S)$ 以上に増大させなければならないため, $p(X) = \max\{0, \max\{r(S) \mid X \cap S = \emptyset$ または $X \supseteq S\} - d_G(X)\}$ である.

A.A.Benczúr と A.Frank [3] は, p が対称優モジュラ (symmetric supermodular) 関数であれば, p-カバー問題は多項式時間で解けることを示した. ここで, 対称関数 $p : 2^V \to Z_+$ とは, 任意の集合 $X \subseteq V$ について, $p(X) = p(V - X)$ である関数のことをいう. また, $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$, かつ $X \cap Y \neq \emptyset \neq V - (X \cup Y)$ である任意の $X, Y \subseteq V$ について,

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \tag{3.1}$$

を満たし, $p(\emptyset) = 0$ であるとき, 集合関数 $p : 2^V \to Z_+$ を (交差) 優モジュラ関数と呼ぶ (一般に, 集合関数 f は, $-f$ が劣モジュラのとき, 優モジュラと呼ばれるが, この章ではこの関数を単に優モジュラと呼ぶこととする). この対称優モジュラ関数 p に対する p-カバー問題は, 辺連結度増大問題を部分問題として含んでいる. 実際, 辺連結度増大問題の不足関数 $p(X) = \max\{0, k - d_G(X)\}$ は, カット関数 d_G が対称関数であるため対称関数であり, また (2.1) より優モジュラ関数である.

一方で, 局所辺連結度増大問題や節点領域辺連結度増大問題の不足関数 p は優モジュラではない. 例えば, 次のような局所辺連結度増大問題の例を考えてみよう. 入力グラフを, 4 節点 v_1, v_2, v_3, v_4 から成り, 辺の存在しないグラフとし, $r(v_1, v_2) = r(v_2, v_3) = 1$, 他のペア $\{x, y\}$ に対しては $r(x, y) = 0$ とする. このとき, $X = \{v_1, v_2\}$ と $Y = \{v_2, v_3\}$ について, X は v_2 と v_3 を分離するので $p(X) = r(X) = 1$, Y は v_1 と v_2 を分離するので $p(Y) = r(Y) = 1$, $X \cap Y$ は v_1 と v_2 を分離するので $p(X \cap Y) = 1$, $X \cup Y$ は $r(x, y) = 1$ であるどのペア x, y も分離しないので $p(X \cup Y) = 0$ である (G のどのカットの値も 0 であることに注意). ゆえに, この場合 p は (3.1) を満たさない.

局所辺連結度増大問題や節点領域辺連結度増大問題の不足関数 p は対称優モジュラではないが, 対称弱優モジュラ (symmetric skew-supermodular) であることがそれぞれ [6] と [20] で証明されている. ここで, $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$ である任意の $X, Y \subseteq V$ について, (3.1) または

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X) \tag{3.2}$$

を満たし, $p(\emptyset) = 0$ であるとき, 集合関数 $p : 2^V \to Z_+$ を弱優モジュラ関数と呼び, また $-p$ を弱劣モジュラ (skew-submodular) 関数と呼ぶ. 対称弱優モジュラ関数 p に対する p-カバー問題は, NP 困難問題である節点領域辺連結度増大問題を部分問題として含むため, 一般には NP 困難であることに注意されたい. 最近, Z.Nutov[33] により, この対称弱優モジュラ関数 p に対する p-カバー問題が APX 困難, つまりこの問題に対する PTAS が存在しないことが示され, さらにある弱劣モジュラ関数最小化問題の答えを多項式時間で返すオラクルが存在するという仮定の下で, 7/4 倍近似の解を多項式時間で見つけるアルゴリズムが与えられた (この最小化問題は, p が優モジュラの場合は多項式時間で解けることが [3] で指摘されている). この最小化問題に関しては, 次の節で紹介するが, 局所辺連結度増大問題や節点領域辺連結度増大問題のような特別な場合では, 最大流アルゴリズムなどにより多項式時間で解ける. また, 不足関数が弱優モジュラ関数である問題として, 他に要素連結度 (element connectivity) 増大問題 [33] や T-カット増大問題 [37] なども研究されている.

3.2 辺連結度増大問題を解くアルゴリズム

この節では, 辺遊離定理を利用して辺連結度増大問題を解くアルゴリズムの流れを簡単に紹介する.

まず, 解の下界値を求める. $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ を, 互いに素なカットの集合族とする. 前節で述べたように, 各カット X_i について, X_i と $V - X_i$ の間に少なくとも $p(X_i)$ 本を辺を加える必要がある. $\mathcal{X}$ に含まれるカットの不足関数値 (p の値) の和は $\sum_{X \in \mathcal{X}} p(X)$ であり, これを新しい辺を加えることにより解消しなくてはならない. $\mathcal{X}$ のどの二つのカットも互いに素であるため, 1 本の辺を加えることにより, 高々2 の不足を解消することができる. 従って, 少なくとも $\lceil \sum_{X \in \mathcal{X}} p(X)/2 \rceil$ 本の辺を加える必要があることが分かる. $\alpha(G)$ を, あらゆる互いに素なカット族の不足の和の最大値, つまり $\max\{\sum_{X \in \mathcal{X}} p(X) \mid \mathcal{X}$ は互いに素なカット族 $\}$ と定義すると, 問題の最適値は $\lceil \alpha(G)/2 \rceil$ 以上であるといえる. ゆえに, 得られた実行可能解 E' が $|E'| = \lceil \alpha(G)/2 \rceil$ を満たせば, その解は最適解と言える. 辺連結度増大問題では $k \geq 2$ の場合, 最適値は常に $\lceil \alpha(G)/2 \rceil$ に等しくなる. 以下, $k \geq 2$ と仮定する ($k = 1$ の場合は非連結グラフを連結にするだけの問題である).

$\alpha(G)$ は, 極値集合を用いることで, 次のように計算できる. $\mathcal{Z}(G)$ を G の全ての極値集合の族とする. G に新しい節点 s を加え, さらに s と V を結ぶ辺の集合を加え,

$$\text{どの極値集合 } X \in \mathcal{Z}(G) \text{ についても } d_H(s, X) \geq p(X) \tag{3.3}$$

が成り立つようにグラフ $H = (V \cup \{s\}, E \cup F)$ を作る. このとき, F をこの性質に関して極小であるとする, つまり F のどの一辺を削除しても (3.3) が満足されないとする. このとき, $d_H(s) = \alpha(G)$ が成り立つ. 以下, それを示す. 今, $\mathcal{Z}(G)$ がラミナ族であることと F の極小性から, 次の (1)(2) を満たす互いに素な極値集合族 $\mathcal{Z}'$ が存在することがいえる. (1) 各 $X \in \mathcal{Z}'$ に対して, $d_H(s, X) = p(X)$ が成り立つ. (2) $\cup_{X \in \mathcal{Z}'} X$ は s の隣接点を全て含む. ゆえに, $\alpha(G)$ の最大性から, $d_H(s) = \sum_{X \in \mathcal{Z}'} d_H(s, X) = \sum_{X \in \mathcal{Z}'} p(X) \leq \alpha(G)$ が成り立つ. 一方で, 2.3 節で述べたように G の任意のカット $Y \subset V$ に対して, $d_G(X) \leq d_G(Y)$ である極値集合 $X \subseteq Y$ が存在する. 従って, $d_H(s, Y) \geq d_H(s, X) \geq p(X) = \max\{0, k - d_G(X)\} \geq \max\{0, k - d_G(Y)\} = p(Y)$ が成り立つ. 言い換えれば,

$$\text{どのカット } X \subset V \text{ についても } d_H(s, X) \geq p(X) \tag{3.4}$$

が成り立つ. よって, $\mathcal{X}^*$ を $\sum_{X \in \mathcal{X}^*} p(X) = \alpha(G)$ である (互いに素な) カット族とすると, 明らかに $d_H(s) \geq \sum_{X \in \mathcal{X}^*} d_H(s, X) \geq \sum_{X \in \mathcal{X}^*} p(X) = \alpha(G)$ である.

次に, 辺遊離操作を紹介する. グラフ $H = (V \cup \{s\}, E \cup F)$ において, 2 本の辺 $(s, u), (s, v)$ を 1 本の辺 (u, v) に置き換える操作を, 辺 $(s, u), (s, v)$ を (節点 s において) 遊離する, という. この辺遊離操作により得られるグラフ $(V \cup \{s\}, E \cup F \cup \{(u, v)\} - \{(s, u), (s, v)\})$ を H' で表わす. この操作により, u と v を分離するカット $X \subset V$ について, X と $V - X$ の間の辺が 1 本増える. つまり, 辺遊離操作後の不足関数 p' は, u, v を分離するカット $X \subset V$ については, $p'(X) = \max\{0, p(X) - 1\}$, それ以外のカット X については, $p'(X) = p(X)$ である. H' においても, 各カット $X \subset V$ に対して $d_{H'}(s, X) \geq p'(X)$ が成立するとき, このペア $\{(s, u), (s, v)\}$ は H において辺遊離可能であるという. 辺遊離に関して, 次の L.Lovász の定理が知られている.

定理 1 [26] $H = (V \cup \{s\}, E)$ を，$d_H(s)$ が偶数で，かつ $p(X) = \max\{0, k - d_G(X)\}$, $\emptyset \neq X \subset V$ に関して (3.4) を満足するグラフとし，$k \geq 2$ とする．このとき，任意の $(s, v) \in E_H(s)$ に対して，$\{(s, u), (s, v)\}$ が H において辺遊離可能である辺 $(s, u) \in E_H(s)$ が存在する． □

$\alpha(G)$ が奇数である場合は, s と V を結ぶ辺を 1 本追加し, s の次数を偶数にし, このグラフを改めて H とおく．このグラフ H において, L.Lovász の定理を繰り返し適用すれば, s に接続する辺がなくなるまで辺遊離可能なペアを遊離していくことができる．その結果, G に加えられる辺集合 E_1 が問題の最適解である．以下で, E_1 が最適である理由を述べる．得られるグラフを $H'' = (V \cup \{s\}, E \cup E_1)$ で表わし ($d_{H''}(s) = 0$ であることに注意されたい), $(V, E \cup E_1)$ を $G + E_1$ と書く．このときの不足関数 p'' は, 各カット $X \subset V$ に対して $p''(X) = \max\{0, k - d_{G+E_1}(X)\}$ である．また, H'' は辺遊離可能なペアを遊離することにより得られたグラフであるので, 各カット $X \subset V$ に対して $0 = d_{H''}(s, X) \geq p''(X)$ が成立する．すなわち, 全てのカット X に対して $d_{G+E_1}(X) \geq k$ が成り立ち, $G + E_1$ は k-辺連結である．一方で, $|E_1|$ は, $d_H(s)$ の半分, すなわち $|E_1| = \lceil \alpha(G)/2 \rceil$ である．これは, 解の下界値に等しいため, 得られた辺集合 E_1 は最適解であるといえる．

最後に, 前節で紹介した他の辺連結度増大問題についても簡単に触れておく．上では, $\alpha(G)$ を求めるのに極値集合を用いたが, 不足関数 p が対称弱優モジュラであると仮定するだけで, (3.4) を満たす極小な H において $d_H(s) = \alpha(G)$ が成り立つ．

補題 1 [7] $H = (V \cup \{s\}, E \cup F)$ を，$G = (V, E)$ に新しい節点 s と，s と V を結ぶ辺の集合 F を加え，(3.4) を満たすように作ったグラフとする．さらに，F をこの性質に関して極小であるとする．このとき，p が対称弱優モジュラ関数であれば，$d_H(s) = \alpha(G)$ が成り立つ． □

従って, H において辺遊離可能な遊離操作が行えれば, 上の議論と同様に最適解を得ることができる．但し, 注意しなくてはならないのは, H が (3.4) を満たすかどうか判定できることが前提である．例えば,

$$\min\{d_H(s, X) + d_{(V,E')}(X) - p(X) \mid \emptyset \neq X \subset V\} \tag{3.5}$$

が計算できれば, これは判定できる (E' は辺遊離により G に加えられる辺集合に対応する) が, 一般の場合多項式時間で計算できるか知られていない．前節で紹介した Z.Nutov[33] の結果は, H が (3.4) を満たすかどうか多項式時間で判定できれば, 対称弱優モジュラ関数 p に対する p-カバー問題が 7/4 倍近似できる, というものである．局所辺連結度増大問題や節点領域辺連結度増大問題のような具体的なグラフ問題では, (3.5) は最大流アルゴリズムなどにより多項式時間で計算でき, $\alpha(G)$ も計算できる．それに基づき, 様々な辺遊離操作の研究がなされてきている．例えば, 局所辺連結度増大問題に関しては, どのペア $u, v \in V$ についても $r(u, v) \geq 2$ であれば, $d_H(s)$ が偶数である H において必ず辺遊離可能なペアが存在すること知られており [27], この場合最適値は $\lceil \alpha(G)/2 \rceil$ である ($r(u, v) = 1$ である u, v が存在する場合辺遊離できないこともあるが, 別の特徴づけによりこの場合も多項式時間で最適に解ける．詳細については省略する)．節点領域辺連結度増大問題に関しては, どの領域 $S \in \mathcal{S}$ に対しても $r(S) \geq 2$ である場合, s の次数が 5 以上であれば必ず辺遊離可能なペアが存在し, 最適値は $\lceil \alpha(G)/2 \rceil$ もしくは $\lceil \alpha(G)/2 \rceil + 1$ であることが分かっている．

4　供給点配置問題

供給点配置問題とは, 与えられたネットワーク上に, ある連結度に関する要求を満たすように施設を配置する問題である．より正確には, グラフ $G = (V, E)$ と, 施設設置コスト関数 $w : V \to R_+$, 連結度の要求関数 $r : V \to R_+$ が与えられたとき,

$$\text{各節点 } v \in V - S \text{ に対して, } \psi(S, v) \geq r(v) \tag{4.1}$$

を満たし, $\sum_{v \in S} w(v)$ が最小になるような節点集合 S を求める問題と定義される．ここで, ψ は S と v の間の節点領域辺連結度または節点領域点連結度を表わす．また, S が (4.1) を満たすとき, S に含まれる節点を供給点と呼び, S を供給点集合と呼ぶ．図 5 に供給点集合の例を示す．

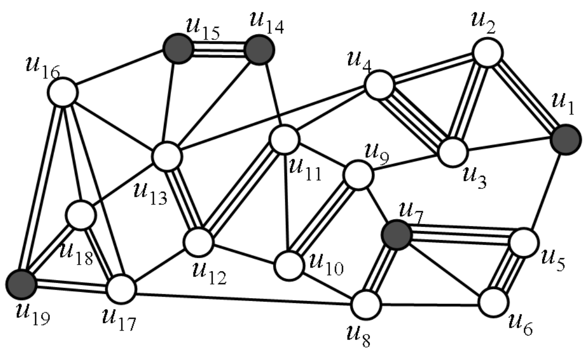

図 5: 図 1 のグラフにおいて, $\psi(S, v) = \lambda_G(S, v)$, $r : V \to \{6\}$ とするときの, 供給点集合 S の例 (各供給点は黒点で表わされている)

まず ψ が辺連結度要求の場合, つまり $\psi(S, v) = \lambda_G(S, v)$ の場合のこれまでの研究結果を紹介する．最初にこの問題に対するアルゴリズムが報告されたのは H.Tamura ら [38] による論文である．彼らは, 各節点のコストと要求が一様である場合, つまり $w : V \to \{1\}$, $r : V \to \{k\}$ である場合, 問題が多項式時間で解けることを示した．その後, 彼らは, $w : V \to \{1\}$ である場合には, r が一般の場合でも多項式時間で解けることを証明した [39]．K.Arata ら [1] は, $r : V \to \{k\}$ であれば, w が一般の場合でも $O(n(m + n \log n))$ 時間で解けることを示した．これは, r が一様である場合の現在最良の計算時間である．また, 彼らは, w が一様である場合の計算時間も $O(nM(n, m))$ に改善している (ここで, $M(n, m)$ は, 2 節点間の最大流を計算するのにかかる時間を表わす)．一般の場合については, 最近, M.Sakashita[36] らにより, 強 NP 困難であることが示された．入力グラフが有向である場合については, H.Ito ら [24] は, $w : V \to \{1\}$ または $r : V \to \{k\}$ である場合でも強 NP 困難であることを証明した．一方で, M.Bárász ら [2], J.Heuvel と M.Johnson[12] は, "$\lambda^+_G(S, v) \geq \ell$ かつ $\lambda^-_G(S, v) \geq k$" を満たすように S を配置する問題に拡張しても, $w : V \to \{1\}$ であれば多項式時間で解けることを示した．ここで, $\lambda^+_G(S, v)$ ($\lambda^-_G(S, v)$) は S から v への (v から S への) 互いに辺を共有しないパスの最大数を表わす.

$\psi(S,v)=\kappa_G(S,v)$ の場合は, H.Ito ら [23] により, $w:V\to\{1\}$ かつ $r:V\to\{k\}$ である場合, $k\le 2$ であれば多項式時間で解けるが, $k\ge 3$ のとき NP 困難であることが示されている．また, 彼らは, $k\le 2$ であれば, $\lambda(S,v)\ge\ell$ という要求も同時に満たすという問題に拡張しても, 多項式時間で解けることを示した.

一方, $\psi(S,v)=\hat{\kappa}_G(S,v)$ の場合は, H.Nagamochi ら [32] により $r:V\to\{k\}$ であれば $O(\min\{k,\sqrt{n}\}kn^2)$ 時間で解けることが示された．また, T.Ishii ら [18] は, $w:V\to\{1\}$ の場合, $r:V\to\{0,1,2,3\}$ であれば問題が線形時間で解けるが, $r(v)=4$ である節点 $v\in V$ がある場合は NP 困難であることを証明した．彼らは, さらに, $r:V\to\{0,1,2,3\}$ であれば, w が一般の場合でも多項式時間で解けることを示した [19]．有向グラフの場合は, 上記の [32] で, "$\hat{\kappa}^+_G(S,v)\ge\ell$ かつ $\hat{\kappa}^-_G(S,v)\ge k$" を満たすように S を配置する問題に拡張しても, 多項式時間で解けることが示されている．ここで, $\hat{\kappa}^+_G(S,v)$ $(\hat{\kappa}^-_G(S,v))$ は S から v への (v から S への) v 以外の節点を互いに共有しないパスの最大数を表わす.

さらに, M.Sakashita ら [36] は, 一般の場合, ψ が λ, κ, $\hat{\kappa}$ のいずれの場合でも, また入力グラフが有向, 無向のいずれの場合でも, NP に属する全ての問題を $O(n^{\log\log n})$ 時間で解く決定性アルゴリズムが存在しない限り, 供給点配置問題が $O(\ln\sum_{v\in V}r(v))$ 倍より良い近似ができないことを示した．一方, 彼らは, これら全ての問題に対し, G が多重グラフで r が整数値を返す関数であるなら $(1+\ln\sum_{v\in V}r(v))$ 倍近似可能であることも示している.

4.1 供給点配置問題の一般化

この節では, まず供給点配置問題に対する考え方を説明した後, 最近研究されている一般化問題について簡単に紹介する．まず, 節点集合 S が供給点集合であるための条件を考えてみよう．$\psi(S,v)=\lambda_G(S,v)$, $\psi(S,v)=\kappa_G(S,v)$, $\psi(S,v)=\hat{\kappa}_G(S,v)$ のそれぞれの場合に分けて考える．節点集合 $X\subseteq V$ に対して, $r(X)=\max\{r(v)\mid v\in X\}$ と定義する.

(1) $\psi(S,v)=\lambda_G(S,v)$ の場合：定義より, 節点 $v\in V-S$ に対して, $\lambda_G(S,v)\ge r(v)$ であるための必要十分条件は, S と v を分離する任意のカットの値が $r(v)$ 以上であることである．つまり, S が供給点集合であるためには, $d_G(X)<r(v)$ かつ $v\in X$ であるカット X には必ず供給点が含まれていなければならない．$d_G(X)<r(X)$ である節点集合 $X\subseteq V$ を, (X に供給点が必要であるという意味で) λ に関する不足集合と呼ぶ．S が供給点集合であるための必要十分条件は, λ に関する任意の不足集合 W に対して, $W\cap S\ne\emptyset$ が成立することである.

特に $r:V\to\{k\}$ の場合, 極値集合族を用いることで次のように最適解を求めることができる．$\mathcal{Z}(G)$ を, G の極値集合族とし, $\mathcal{Z}'$ を, $d_G(X)<k$ である極小な極値集合 $X\in\mathcal{Z}$ の集合族とする (つまり, $X'\subset X$ である任意の $X'\in\mathcal{Z}(G)$ は (存在すれば) $d_G(X')\ge k$)．$\mathcal{Z}(G)$ はラミナ族なので, $\mathcal{Z}'$ 内のどの二つの集合も互いに素である．S^* を, 各集合 $X\in\mathcal{Z}'$ において, コスト最小の節点を一つ選ぶことにより得られる節点集合とする．このとき, S^* は供給点集合である．実際, 任意の不足集合 W に対して, $d_G(X)\le d_G(W)$ である極値集合 $X\subseteq W$ が存在するため, W は $\mathcal{Z}'$ に属する集合を部分集合として含む ($d_G(X)\le d_G(Y)<k$ であるため, X も不足集合であることに注意されたい)．一方で, $\mathcal{Z}'$ は互いに素な不足集合族であるので任意の供給点集合 S' は, どの $X\in\mathcal{Z}'$ に対しても $S'\cap X\ne\emptyset$ を満たす．以上より, S^* は最適といえる.

このように, $r:V\to\{k\}$ の場合, ラミナ族である極値集合族のみを見て, 問題を解くこ

とができる．この観点から, M.Sakashita ら [35] は, 問題を拡張し, 与えられたラミナ族をカバーする問題に取り組んでいる．

(2) $\psi(S,v) = \kappa_G(S,v)$ の場合: 定義より, 節点 $v \in V - S$ に対して, $\kappa_G(S,v) \geq r(v)$ であるための必要十分条件は, S と v を分離する任意の点カット Y のサイズ $|Y|$ が $r(v)$ 以上であること, つまり $v \in N_G(S)$ が成り立つかあるいは, $v \in X$ かつ $X \cup N_G(X) \subseteq V - S$ である任意の節点集合 X が $|N_G(X)| \geq r(v)$ を満たすことである．$|N_G(X)| < r(X)$ である節点集合 $X \subseteq V$ に対して節点集合 $X \cup N_G(X)$ を κ に関する不足集合と呼ぶ．このとき, S が供給点集合であるための必要十分条件は, κ に関する任意の不足集合 W に対して, $W \cap S \neq \emptyset$ が成立することである．

(3) $\psi(S,v) = \hat{\kappa}_G(S,v)$ の場合: 定義より, 節点 $v \in V - S$ に対して, $\hat{\kappa}_G(S,v) \geq r(v)$ であるための必要十分条件は, S と v を結び, v 以外の節点を共有しないパスの数が $r(v)$ 以上であること, つまり $v \in X$ かつ $X \cap S = \emptyset$ である任意の節点集合 $X \subseteq V$ が $|N_G(X)| \geq r(v)$ を満たすことである．$|N_G(X)| < r(X)$ である節点集合 $X \subseteq V$ を $\hat{\kappa}$ に関する不足集合と呼ぶ．S が供給点集合であるための必要十分条件は, $\hat{\kappa}$ に関する任意の不足集合 W に対して, $W \cap S \neq \emptyset$ が成立することである．

以上より, 次の補題が成り立つ．

補題 2 節点集合 S が $\psi(\in \{\lambda_G, \kappa_G, \hat{\kappa}_G\})$ に関する供給点集合であるための必要十分条件は, ψ に関する任意の不足集合 W に対して, $W \cap S \neq \emptyset$ が成立することである． □

この補題により, 供給点配置問題は, 劣モジュラ関数 $f : 2^V \to R_+$, コスト関数 $w : V \to R_+$, 要求関数 $r : V \to R_+$ が与えられたとき, 全ての $X \subseteq V$ に対して $\sum_{v \in X} x(v) + f(X) \geq r'(X)$ を満たし, $\sum_{v \in V : x(v) > 0} w(v)$ を最小化する $x \in R_+^V$ を求める問題として一般化できる (但し, $r' : 2^V \to R^+$ は r を基に得られる関数とする)．実際, (1) $\psi(S,v) = \lambda_G(S,v)$ の場合, $f(X) = d_G(X)$, $r'(X) = r(X)$, (2) $\psi(S,v) = \kappa_G(S,v)$ の場合, $f(X) = |N_G(X - N_G(V - X))|$, $r'(X) = r(X - N_G(V - X))$, (3) $\psi(S,v) = \hat{\kappa}_G(S,v)$ の場合, $f(X) = |N_G(X)|$, $r'(X) = r(X)$ として表現でき, (2.1) と (2.3) よりいずれの場合の f も劣モジュラ関数である．M.Sakashita ら [36] は, これに基づいてさらに一般化した問題に取り組み, 前節の最後に紹介した近似に関する結果などを得ている．

5　最後に

本稿では, おもに無向グラフにおける辺連結度の問題を中心に, 連結度増大問題と供給点配置問題に関する研究の現状を解説した．これらの問題が効率的に解ける理由は, カット関数や隣接点数を表わす関数の劣モジュラ性によるところが大きい．近年, これらの問題に対して劣モジュラ関数を用いた一般化に関する研究が精力的に行われてきている．一方で, これらの一般化された枠組みに入る他の応用例はほとんど知られていない．今後, これらの研究を他の組合せ最適化問題に生かしていくことは, この分野での重要な課題の一つである．

参考文献

[1] K. Arata, S. Iwata, K. Makino, and S. Fujishige: Locating sources to meet flow demands in undirected networks, *Journal of Algorithms* **42** (2002), 54-68.

[2] M. Bárász, J. Becker, and A. Frank: An algorithm for source location in directed graphs, *Operations Research Letters* **33** (2005), 221-230.

[3] A. A. Benczúr and A. Frank: Covering symmetric supermodular functions by graphs, *Mathematical Programming* **84** (1999), 483-503.

[4] G.-R. Cai and Y.-G. Sun: The minimum augmentation of any graph to k-edge-connected graph, *Networks* **19** (1989), 151-172.

[5] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan: Augmentation problems, *SIAM Journal on Computing* **5** (1976), 653-665.

[6] A. Frank: Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **5**(1) (1992), 25-53.

[7] A. Frank: On a theorem of Mader, *Discrete mathematics* **101** (1992), 49-57.

[8] A. Frank: Connectivity augmentation problems in network design, In J.R. Birge and K.G. Murty (eds.), *Mathematical Programming: State of the Art 1994*, (The University of Michigan, Ann Arbor, MI 1994), 34-63.

[9] A. Frank and T. Jordán: Minimal edge-coverings of pairs of sets, *Journal of of Combinatorial Theory Series B* **65** (1995), 73-110.

[10] H. N. Gabow: Efficient splitting off algorithms for graphs, *Proceedings of the 26th ACM Symposium on the Theory of Computing* (1994) 696-705.

[11] M. Grötschel, C. L. Monma and M. Stoer: Design of survivable networks, In *Network Models, Handbook in Operations Research and Management Science* 7, (North-Holland, Amsterdam, 1995), 617-672.

[12] J. van den Heuvel and M. Johnson: Transversals of subtree hypergraphs and the source location in digraphs, *CDAM Research Report*, LSE-CDAM-2004-10, London School of Economics.

[13] T. Hsu: On four-connecting a triconnected graph, *Proceedings of the 33rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (1992), 70-79.

[14] T. Hsu: Undirected vertex-connectivity structure and smallest four-vertex-connectivity augmentation, *Proceedings of the 6th International Symposium on Algorithms and Computation* (1995), 274-283.

[15] T. Hsu and V. Ramachandran: A linear time algorithm for triconnectivity augmentation, *Proceedings of the 32nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (1991), 548-559.

[16] T. Hsu and V. Ramachandran: Finding a smallest augmentation to biconnect a graph, *SIAM Journal on Computing* **22** (1993), 889-912.

[17] T. Ishii, Y. Akiyama, and H. Nagamochi: Minimum augmentation of edge-connectivity between vertices and sets of vertices in undirected graphs, *Electric Notes in Theoretical Computer Science, vol.78, Computing Theory: The Australasian Theory Symposium* (2003).

[18] T. Ishii, H. Fujita, and H. Nagamochi: Source location problem with local 3-vertex-connectivity requirements, *Proceedings of the 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (2003), 368-377.

[19] T. Ishii, H. Fujita, and H. Nagamochi: Minimum cost source location problem with local 3-vertex-connectivity requirements, *Proceedings of the 12th Computing: The Australasian Theory Symposium* (2005), 97-105.

[20] T. Ishii and M. Hagiwara: Minimum augmentation of local edge-connectivity between vertices and vertex subsets in undirected graphs, *Discrete Applied Mathematics*, to appear.

[21] H. Ito: Node-to-area connectivity of graphs, *Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan* **11C**(4) (1994), 463-469.

[22] H. Ito: Node-to-area connectivity of graphs, In M. Fushimi and K. Tone (eds.), *Proceedings of the 3rd Conference of the Association of Asian-Pacific Operational Research Societies* (World Scientific publishing) (1995), 89-96.

[23] H. Ito, M. Ito, Y. Itatsu, K. Nakai, H. Uehara, and M. Yokoyama: Source location problems considering vertex-connectivity and edge-connectivity simultaneously, *Networks* **40** (2002), 63-70.

[24] H. Ito, K. Makino, K. Arata, S. Honami, Y. Itatsu, and S. Fujishige: Source location problem with flow requirements in directed networks, *Optimization Methods and Software* **18** (2003), 427-435.

[25] B. Jackson and T. Jordán: Independence free graphs and vertex connectivity augmentation, *Journal of Combinatorial Theory Series B* **94** (2005), 31-77.

[26] L. Lovász: *Combinatorial Problems and Exercises*, (North-Holland, 1979).

[27] W. Mader: A reduction method for edge-connectivity in graphs, *Annals of Discrete Mathematics* **3** (1978), 145-164.

[28] H. Miwa and H. Ito: NA-edge-connectivity augmentation problem by adding edges, *Journal of Operations Research Society of Japan* **47**(4) (2004), 224-243.

[29] H. Nagamochi: Computing extreme sets in graphs and its applications, *Proceedings of the 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (2003), 349-357.

[30] H. Nagamochi and T. Ibaraki: Computing edge-connectivity of multigraphs and capacitated graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **5** (1992), 54-66.

[31] H. Nagamochi and T. Ibaraki: Graph connectivity and its augmentation: applications of MA orderings, *Discrete Applied Mathematics* **123** (1) (2002), 447-472.

[32] H. Nagamochi, T. Ishii, and H. Ito: Minimum cost source location problem with vertex-connectivity requirements in digraphs, *Information Processing Letters* **80**(6) (2001), 287-294.

[33] Z. Nutov: Approximating connectivity augmentation problems, *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2005), 176-185.

[34] S. Raghavan and T. L. Magnanti: Network Connectivity, In M. Dell 'Amico, F. Maffioli, S. Martello (eds.), *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization* (J. Wiley & Sons), 1997, 335-354.

[35] M. Sakashita, K. Makino, and S. Fujishige: Minimizing a monotone concave function with laminar covering constraints, *Proceedings of the 16th International Symposium on Algorithms and Computation* (2005), 71-81.

[36] M. Sakashita, K. Makino, and S. Fujishige: Minimum cost source location problems with flow requirements, *Proceedings of the 7th Latin American Theoretical Informatics* (2006), 769-780.

[37] Z. Szigeti: On parity families, *2004, Report No. 04938-OR, Research Institute for Discrete Mathematics, Universitat Bonn*, (2004).

[38] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe: Location problems on undirected flow networks, *The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers Transaction* **E73** (1990), 1989-1993.

[39] H. Tamura, H. Sugawara, M. Sengoku, and S. Shinoda: Plural cover problem on undirected flow networks, *The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers Transaction* **J81-A** (1998), 863-869.

[40] T. Watanabe and A. Nakamura: Edge-connectivity augmentation problems, *Journal of Computer System Sciences* **35** (1987), 96-144.

[41] T. Watanabe and A. Nakamura: A smallest augmentation to 3-connect a graph, *Discrete Applied Mathematics* **28** (1990), 183-186.