

## 待ち行列事始め(1)

### 1. はじめに

待ち行列研究部会のホームページを開くに当たって、待ち行列研究の歴史を執筆するよう主査の滝根先生から依頼されました。筆者は1989年1月のシンポジウムにおいて、「待ち行列事始め」と題する講演を行いました。その時の報告集の原稿に加筆訂正を加えて掲載したい、というお話でした。講演の詳しい内容は、今となっては覚えておりませんが、かなり長い時間知っていることをいろいろお話したような気は致します。それで、ここでは、報告集掲載の一文を幾分読み物風に加筆しながら纏めてみたいと考えました。ただ、この講演から大分時間も経ってしまっていて、その間に筆者の環境も変わっています。たとえば、すべての資料が見やすい形で手元に揃っていませんし、特に待ち行列研究部会発足の経緯などの資料は残っておりません。学会の事務局などで探してみてもすぐには見つからない状況です。このため、全部揃えてから執筆にとりかかったのでは、何時になったらお見せできる物が仕上がるのか心許ない状態です。むしろ、こういう試みをしていることを多くの方にお見せして、ご存じの方からご教示を得ながら纏める方が賢いのではないかと考えました。それで、出来たところからお見せして、大方のご教示を頂戴しながら適宜修正を加えて出来るだけ正確を期するという趣旨で、3回程度に分けてホームページに載せていただこうと思っております。

第1回と第2回は、前記の報文で取り上げた内容を、前後半に分け、且つ若干膨らましながら書いてゆくつもりです。第1回は「世界における待ち行列研究小史」です。

### 2. 待ち行列研究の始り

今更言うまでもなく、待ち行列の研究は1900年代初頭のA.K.Erlang(1878-1929)の電話交換の理論に始ることはよく知られていると思います。

Erlang,A.K.: Probability and Telephone Calls, *Nyt. Tidsskr. Mat. Ser.B*,vol.20, pp.33 - 39, 1909

を最初の論文としたり、呼損式を与えた彼の最も重要な論文

Erlang,A.K.: Solution of Some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges, *Post Office Elec. Eng. J.*, vol.10, pp.189 - 197, 1917

から待ち行列の歴史を説き起こしたり、と幾分の流儀の差はあるかもしれませんが、とにかく Erlang の仕事から始まったという点においては、あまり異論はないようです。このあたりの論文や歴史は

Brockmeyer,E. , H.L.Halstrom & A.Jensen: The life and works of A. K. Erlang, Copenhagen Tel. Com., 1948

に纏められていますが、それによりますと、電話交換の分野に確率論を導入したのは、1907年と1908年に待ち時間と呼数や話中についてのエッセイを書いた Johannsen だとしています。彼はコペンハーゲン電話会社の managing director で、1908年に physico-technical

laboratory を立ち上げ、その head として Erlang を招いたそうです。そして、彼の仕事を数学的に明確にすることを Erlang に suggest したとあります。

ところで、呼損式の導出はまさに「ノーベル賞もの」と言ってもよいのではないのでしょうか。電話がまだほとんど普及していない時期に、このように画期的な成果が得られていたために、その後の世界の電話、更には通信事業は過大な投資を避け、適切な施設を用意することで順調な発展をすることが出来たと思うのです。数学が直接市民生活や産業の発展に寄与した実例として、オペレーションズ・リサーチ特に待ち行列に関心を持つ者は、いつも引き合いに出して宣伝に努めたいと、筆者は常々考えております。

電話交換に限らず適当なバッファを置くことでシステムを日常的に運営することを可能とする場合は、私達の周囲に溢れています。ということは、待ち行列の知識が直接そのために役立つということになります。オペレーションズ・リサーチによる問題解決に人々の目が向けられる機会が多くなると、自然にいろいろなタイプの待ち行列に目が向けられるのも自然な成り行きでしょう。こうして、電話交換以外の分野に対する待ち行列モデルの利用が試みられるようにもなりました。

電話交換の分野では更に、1920年代に、Molina・Martin・O’ Dell等の研究が続いて着実に発展しつづけます。一方、1人の作業員に何台の機械を受け持たせればよいのか、といういわゆる機械干渉の問題を、確率的に扱われるべきだとして最初に取り上げたのは1936年のW.R.Wrightだそうですが、彼は電話交換における中継線の待ち時間を評価したT.C.Fryの公式(1925年)を利用したとのこと。この段階では、まだ待ち行列という名前は登場していないと思われ。ついでですが、Fryは何と1928年にかなり厚い次の本を書いています。

Fry,T.C.: Probability and its Engineering Uses , D.Van Nostrand,1928

そして、この分野の仕事は後述の Palm へと繋がります。

さて、Erlangの次に位置する忘れられない研究者はF・PollachekとA・Y・Khinchineでしょう。前者は1930年から、後者は1932年から「待ち行列」という言葉が表題に入った論文を発表しております。そして、そのアプローチの基盤が特性関数であるという点でも類似点を持っております。彼等は、現在Lindley過程という呼び方がかなり普及してきた待ち時間の再帰式

$$X_{n+1} = [X_n + U_n]^+$$

の両辺で、その特性関数を取ることから始めています。彼等の主な関心は待ち時間の定常分布にあるので、 $X_{n+1}$ と $X_n$ との特性関数は同一になります。それで、特性関数についての「方程式」が作れるわけです。もちろん、定常分布への収束については、かなりきちんとした義論をしていますし、その速度の議論に及んでいるものもあります。

ただ、2人の行き方はかなり異なり、Khinchinは後にPalmの仕事の紹介も含め、徹底的に初等的な方法でしかも厳密な議論でこのときの仕事も書き直しました。これはステックロフ研究所報告と言う形で、1955年に刊行されましたが、

ア・ヤ・ヒンチン(森村訳): 待ち合わせ理論入門, 広川書店,1960

として訳されています。

これに対し，Pollachek は + オペレーションが

$$e^{i\xi x^+} = \frac{\xi}{2\pi i} \int_{iC-\infty}^{iC+\infty} e^{i\eta x} \frac{d\eta}{\eta(\xi - \eta)} \quad (\mathcal{I}(\xi) > C > 0)$$

と書けることに基づいて，徹底的に関数論的議論に持込みました．そして数十年にわたって，その方法を貫いています．彼の仕事は，後に

Pollaczek,F.: Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés, Gauthier-Villars, 1957

や

Pollaczek,F.: Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente, Gauthier-Villars, 1961

に纏められ<sup>1</sup>，更に

Le Gall,P.: Les systems avec ou sans attente et les processus stochastiques, dunod, 1962

の著書にも大幅に取入れられましたが，それまでは，結果の引用はたびたびされるものの，手法を真似たものは皆無とってよい程でした．

Khinchin によりますと，Erlang の仕事の最大の後継者は Palm であるということです．Palm は 1936 年から電話交換の分野で精力的に論文を書いております．その中には，呼損式の数表も含まれています．Khinchin は，上記の書物の中で，Palm の流れについて 1 章を割いていますが，これは，現在点過程の理論において，Palm 測度として活用されている概念の基です．それとは別に，Palm は

Palm,C: The Repairmen in Servicing Automatic Machines, *Industritidn. Norden*, vol.75, pp.75-80,90-94,119-123,1947

の中で，多数の自動機械が動いているとき，偶発的故障により停止した機械の修理をする修理工の配置人数を決める数表と図表を与えています．この仕事は

Feller,W.: An Introduction of Probability Theory and Its Applications, John Wiley,1950 [河田龍夫監訳：確率論とその応用 紀伊国屋書店]

に紹介されて有名になりました．第 2 次世界大戦中に始められたオペレーションズ・リサーチでは，しばしば待ち行列の知識が利用されたようですが，その基は Palm の仕事あたりにあったのでしょうか．

### 3. 1950 年代前半の待ち行列研究

このような「前史」の後，1951 年に D. G. Kendall による第 1 の論文

<sup>1</sup> 前者については「経営科学」第 5 巻第 1 号 (1961, pp.59-60) に書評を書きましたが，後者については見ていません．

Kendall,D.G.: Some Problems in the Theory of Queues, *J.Roy.Statist.Soc.,Ser.B*,  
vol.13,no.2,pp.151–158,1951

が発表されて、待ち行列研究の火がつけられました。この論文はイギリスの Royal Society  
の招待講演として読まれたようで、そのときの討論として Lindley が翌年の彼のエルゴード  
条件に関する論文

Lindley,D.V.: The Theory of Queues with a single server, *Cambridge Phil.Soc.*,  
vol.48,pp.227–289,1952

の基本的なアイデアを述べています。この2つの論文が数学者の興味を呼んだのは確かな  
ようで、1950年代前半にその後の諸研究の基礎となるいくつかの基本的な論文が書か  
れています。たとえば、「Kendallの記号」を提唱し、隠れマルコフ連鎖の概念を導入した  
D.G.Kendallの第2の論文

Kendall,D.G.: Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their  
Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain, *Ann.Math.Statist.*,vol.24,  
pp.338–354,1953

や、Lindleyの仕事を many servers の場合に拡張した

Kiefer,J. and J.Wolfowitz: On the Theory of Queues with Many Servers, *Trans.Am.  
Math.Soc.*,vol.78,pp.1–18,1955

更には、仮待ち時間の導入による

Takacs,L.: Investigation of Waiting Time Problems by Reduction to Markov Pro-  
cesses, *Acta.Math.Acad.Sci.Hung.*,vol.6,pp.101–129,1955

などです。最も基本的な待ち行列モデルにおけるエルゴード条件やマルコフ的性質の重要  
性、その仮定出来ない場合の攻略法など、後の待ち行列研究の基礎となる数学的議論の  
アイデアは、この時代に整備されたように感じております。

一方では、現実問題への適用が探られ、それに付随していくつかの待ち行列規律の研究  
が始められました。規律の方から述べますと、集団サービスの

Bailey,N.T.J.: On Queueing Processes with Bulk Service, *J.Roy.Statist.Soc.,Ser.B*,  
vol.16,pp.80–87,1954

や priority の

Cobham,A.: Priority Assignment in Waiting Line Problem, *J.Opns.Res.Soc.Am.*,  
vol.2,pp.70–76,1954

更には tandem を最初に扱ったらしい

O'Brien,G.G.: The Solution of Some Queueing Problems, *J.Soc.Ind.Appl.Math.*,  
vol.2,pp.133–142,1954

などが、この時代に入ります。また、balking については

Kawata,T.: A Problem in the Theory of Queues, *Repts.Statist.Appl.Res.JUSE*, vol.3,pp.122–129,1955

が最初の成果でしょう。

電話交換や機械干渉の分野以外での現実問題への適用については、

Morse,P.M., H.N.Garber and M.L.Ernst: A Family of Queuing Problems, *J.Opns. Res.Soc.Am.*,vol.2,pp.444–445,1954

という article もありますが、個別の分野について言えば、病院での待ち、有料道路の料金所での待ちについての先駆的な研究が目につきます。病院については

Bailey,N.T.J.: A Study of Queues and Appointment Systems in Hospital Out-patient Department,with Special Reference to Waiting Time, *J.Roy.Statis.Soc.,Ser.B*, vol.14,pp.185–199,1952

以来、Bailey が精力的に研究を進めておりまして、前記の集団サービスについての研究もこの中から生まれてきました。

有料道路につきましては、ランチェスター賞を受けたとして有名な

Edie,L.C.: Traffic Delays at Toll Booths,*Opns. Res.*,vol.2,pp.107–138,1954

の仕事が 1950 年代前半のめばしい成果でしょう。

1950 年と言えば、第 2 次世界戦争が終息してからまだ 5 年という時代です。当時の日本は、アメリカの占領下にあって、「全国民の第 1 の関心事は食料」という時代から漸く脱しようかという頃でした。この年に勃発した朝鮮戦争の特需で我が国の産業が復活し発展したことが思い出されます。新しい外国の学術雑誌などはなかなか見ること出来ない状況におかれていました。そのような時代でしたが、当時東京工大で教授をされていた河田龍夫先生は、これらの論文の所在に気づかれ、わが国に待ち行列研究の芽を持ち込まれました。その状況については次回(2)で、稿を改めてお話しさせていただきます。

#### 4. 1950 年代後半の待ち行列研究の発展と整理

前節で述べたような 1950 年代に入ってから待ち行列の研究は、まさに火がついたという表現が適切に思えるほど、各方面で急速に進められました。応用範囲の広がりとともに、理論的研究も進みました。1957 年になると

Doig,A.: A Bibliography on the Theory of Queues, *Biometrika*, vol.44,pp.490–514,1957

という文献リストだけの論文が出たほどです。この論文をご存じない方も、このページ数をご覧になると驚かれると思います。もちろん全部が全部、待ち行列そのものを論じた論文ばかりではありませんが、D.G.Kendall の第 1 の論文以来数年でこれだけの研究がなされたわけです。1959 年には Lunger,G.F. も文献表を作っており、それらの助けを借りて、

Saaty, T.L.: Elements of Queueing Theory with Applications, McGraw-Hill, 1961

には 910 編に及ぶ文献がリストアップされています。待ち行列の成書としては、この本以前に

Morse, P.M.: Queues, Inventories and Maintenance, John Wiley, 1958

と

Syski, R.: Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems, Oliver and Boyd, 1960

がありますが、前者は基本的待ち行列に限られ、後者はとても大部なものです。電話交換を主題に書かれていますので、幅広い分野に目を向けた待ち行列の本としては、この Saaty の本が最初のものと言って良いのではないかと、思っています。Saaty 先生は、現在では AHP の創始者としての方がはるかに有名ですが、当時この本を手にしたとき、それこそ何でも書いてあるので、私達は「物知り Saaty」と呼んでいました。

この時代以降も待ち行列の研究は盛んに続けられましたので、発表された文献は鰻登りに増え続け、専門家を自称する連中もとてもついていけない状態になってしまいました。遂には Wagner をして、その著

Wagner, H.M.: Principles of Operations Research, Prentice-Halls, 1975

の中で、「昆虫についていえることはまた、待ち行列モデルについてもいえる。」と嘆かせる程になりました。彼はその第 1 版で「鳥」と言っていたのに、第 2 版では「昆虫」に変えてしまったのです。何でも鳥の種類は千のオーダーだそうですが昆虫の種類は万のオーダーだというのがその理由のようでした。

閑話休題。話を 1950 年代後半に戻しましょう。筆者は、1962 年 7 月、日科技連が主催した第 1 回数学計画シンポジウムで、「Queueing Theory の現状と今後の動向」と題して報告させていただきました。その際のテキストと討議内容は

国沢清典編：待ち行列理論、日科技連数学計画シンポジウム邦文シリーズ、No.2, 1962

に収録されています。その中で、筆者は 170 近くの文献を基に、6 つの表を作って様々な「型」にそれらの成果を分類致しましたが、その表に記載された論文の内、1955 年以前のもものは 2 割にも及んでいません。その大半は 1956 年から 62 年前半までに発表されたもので占められているのです。第 1 表は「通常の規律」ですが、第 2 表以下は、Bulk, Priority, Tandem, Balking, Impatient となっております。本稿前節の指摘と併せてご覧いただくと、50 年代後半に、先着順以外の規律に如何に多くの関心が寄せられたかがおわかりいただけるでしょう。第 2 表以下では、前節で指摘した各テーマの「初もの」論文以外は、ほとんど 56 年以降のもので占められていますし、何よりも、表に出来るほど、それらのテーマで論文が書かれていたという事実に注目して頂きたいと思っております。

筆者は、この報告の中で「60 年代を迎えて、いままでに確立された approach の方法に基づく研究はある程度開拓し終わり、…、過去の成果を整理統一して新しい見方でまとめ

る傾向が出てきた」ことから、「現在は整理期の門口にある」と、読みようによっては、待ち行列研究が一段落したとも取れる発言をしています。これは、当時の筆者の眼が数学的な議論に傾きがちだったためで、若気の至りといしか言いようも無いのでしょうか、Wagner の嘆きに照らしてみれば不明を恥じるべきでしょう。

筆者がこのような発言をした根拠は、一つには、Saaty などの本が出てきたことであり、一つには

Little, J.D.C.: A Proof of the Queuing Formula  $L = \lambda W$ , *Opns. Res.*, Vol.9, pp.383–387, 1961

に象徴されるような、個々の待ち行列の型に依らない成果の出現にありました。呼損式がサービス時間分布に依らないという

Sevast'yanov, B.A.: An Ergodic Theorem for Markov and its Applications to Telephone Systems with refusals, *Theory Prob. Applications*, Vol.2, pp.104–112, 1957

の仕事も影響したことでしょう。

このように 1960 年代を迎えても待ち行列の研究はますます盛んになり、専門雑誌がいくつも発行されてるような現在へと繋がってまいりますので、「事始め」と題する拙稿の話題も、世界的な展望をこの辺で打ち止めとして、日本の研究状況へと移させていただきます。ただ本節を閉じるに当たり、時代はやや下がりますが、待ち行列研究の歴史としては、到着間隔の独立性に関して、現実への応用という観点から疑問を投げかけた Kendall の講演

Kendall, D.G.: Some Recent Works and Further Problems in the Theory of Queues, *Theory Prob. Applications*, Vol.9, pp.1–13, 1964

と、基本的な待ち行列モデルの数学的側面を見事に統一した Kingman の

Kingman, J.F.C.: On the Algebra of Queues, *J. Appl. Prob.*, Vol.3, pp.285–326, 1966

にもご注目頂きたいと思い、ここに付け加えておきます。

次回(2)は、日本において待ち行列研究が始められた頃の話をも、「QR会」の活動に重点を置いて致したいと思っております。

2003.1.27

2003.3.17 改訂

[森村英典]