漸近解析入門
ー 理論とその応用（裾の軽い分布編）ー

第 8 回「学生・初学者のための待ち行列チュートリアル」

佐久間 大

防衛大学校 情報工学科

2014 年 6 月 21 日

目次

1. はじめに
   - 漸近解析とは？
   - 漸近解析の利点
2. 対象となる待ち行列の例２つ
   - 例１：M/M/1 と M/M/1/1+K
   - 例２：MMPP/Er/1 と MMPP/Er/1/1+K
3. 有限レベル QBD 過程の漸近特性
   - 無限レベル・有限レベル QBD 過程
   - マルコフ連鎖の初到達確率・占有測度
   - QBD 過程の定常分布（行列幾何形式）
   - 有限レベル QBD 過程の漸近特性
4. 応用例

なぜ漸近解析か？

待ち行列モデルの性能評価量（ex. 平均待ち時間，待ち人数分布，到着客のロス確率など）について：

- 解析的に扱い易い表現により得ることは難しいことが多い.
- それでも性能評価量に関する情報を何か得られないか？
- シミュレーションによる評価が難しい稀少事象の確率？

待ち行列モデルの漸近解析とは

本講演での待ち行列モデルの漸近解析とは，モデルのシステムパラメータ n について，性能評価量 $f(n)$ の漸近的な振る舞いを調べること．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$$

を満たす関数 $g(n)$ と定数 $c(>0)$ を見つけることである．

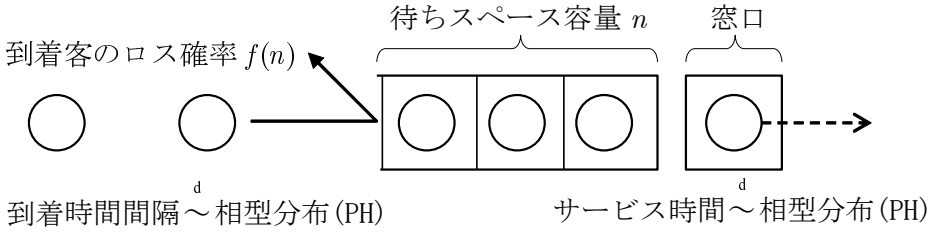
$(n, f(n))$ のペアとして例えば，以下が挙げられる：

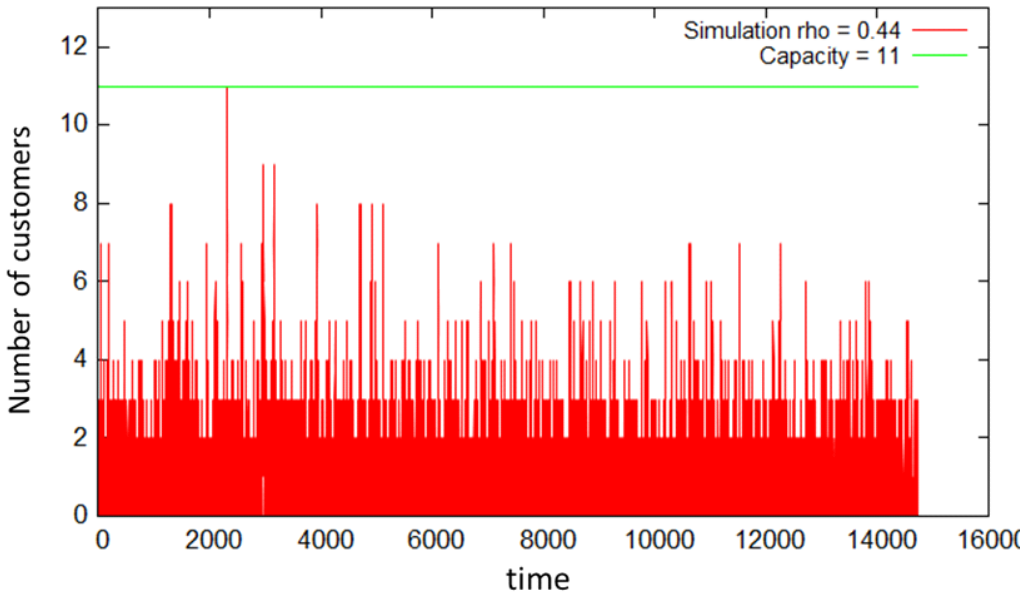
- 待ち人数が n 人である定常確率 $f(n)$
- 待ちスペース容量が n であるときの到着客のロス確率 $f(n)$

※ここでは $g(n) = \alpha^n (\in (0,1))$ となる場合を考える（『裾が軽い』という）．

漸近解析の利点（数値例）

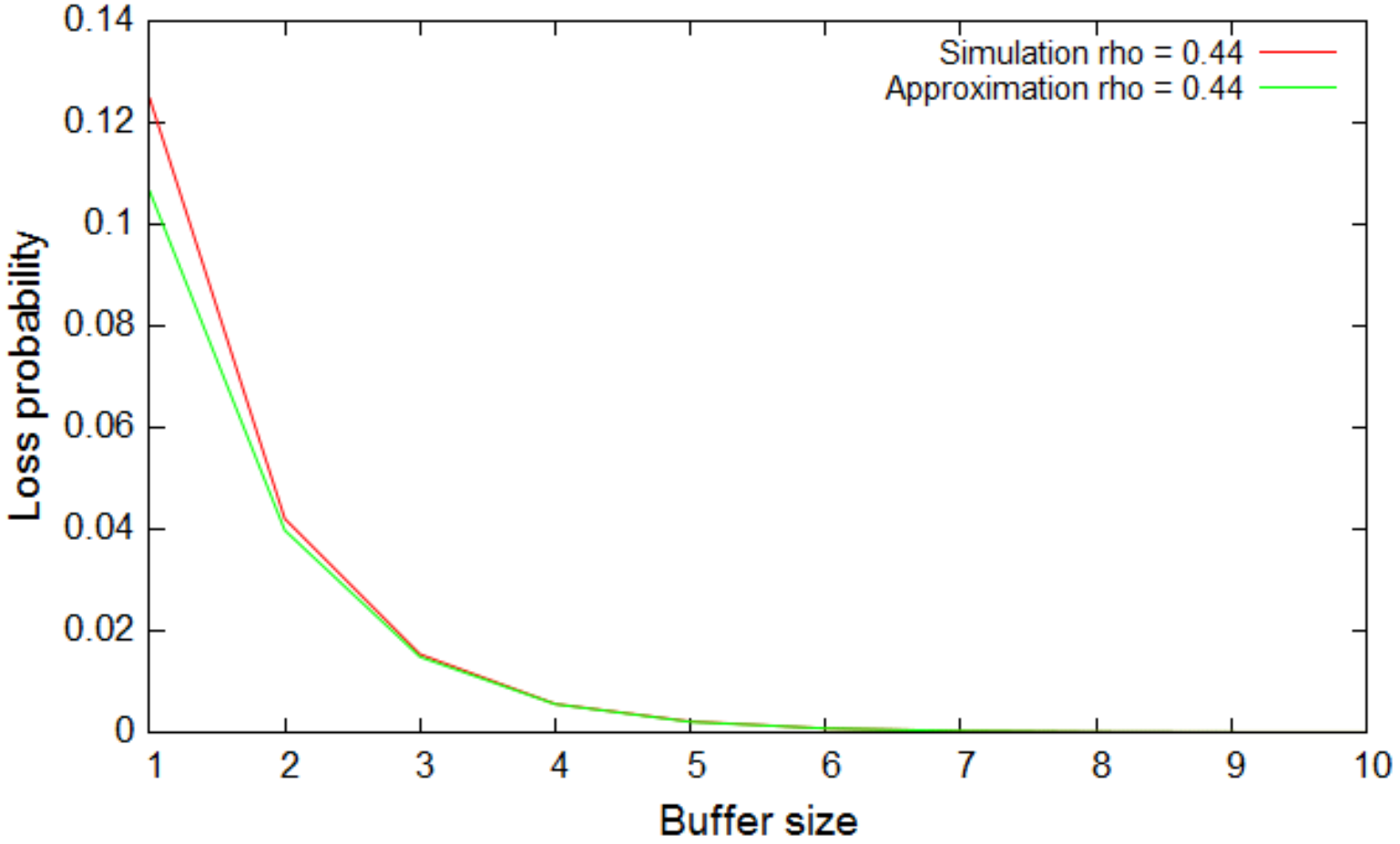
待ちスペース容量 $n = 10$ である $PH/PH/1/1 + n$ 待ち行列について，シミュレーション実験を行った（トラヒック密度 $= 0.44$）．





ロス確率の見積もりは多くの時間を必要とする可能性がある．

漸近解析の利点（数値例）



※ロス確率の近似は待ち行列モデルの漸近解析から導いた（後述）。

本講演では

有限容量の待ちスペースをもつ待ち行列モデルに対する漸近解析の解説を行う．ここで対象となる待ち行列モデルは有限レベル準出生死滅（QBD:Quasi-Birth-and-Death）過程で表現されるため，

- 無限レベル QBD 過程における初到達確率（G 行列），占有測度（N 行列，R 行列）の関係
- 無限レベル QBD 過程における定常分布（行列幾何形式解）の導出

について解説を行う．そして，ここでの話が鍵となり，

- 有限レベル QBD 過程に対する定常分布の漸近特性

が得られることを示す．さらにこの結果から，有限容量の待ちスペースをもつ待ち行列モデルのロス確率の近似式を導く．

まず初めに，解析対象となる待ち行列モデルの例を 2 つ（M/M/1, MMPP/Er/1）紹介する。

1 はじめに

2 対象となる待ち行列の例２つ
- 例１：M/M/1 と M/M/1/1+K
- 例２：MMPP/Er/1 と MMPP/Er/1/1+K

3 有限レベル QBD 過程の漸近特性

4 応用例

例 1 ）M/M/1 待ち行列

M/M/1 待ち行列の定義：

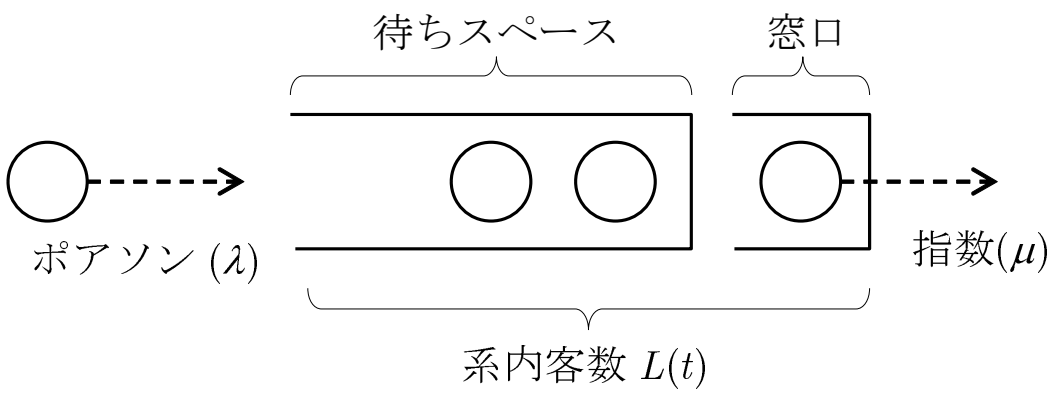
- 単一窓口，無限容量の単一待ちスペース
- 客が率 λ[人 / 時] のポアソン過程に従い到着：

$$\Pr([0,t]\text{ の間に }n\text{ 人到着}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- 客の要求サービス時間は平均 μ^{-1}[時 / 人] の指数分布に従う：

$$\Pr(\text{要求サービス時間} \leq x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

ここで，安定条件 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ を仮定する．



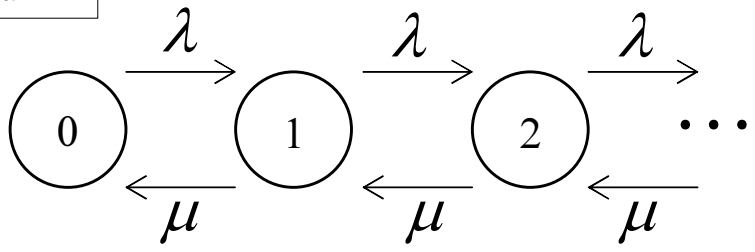
例 1 ）M/M/1 待ち行列（BD 過程）

系内客数過程 $\{L(t); t \geq 0\}$ は状態空間 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 上の連続時間型マルコフ連鎖であり，その推移速度行列 Q は以下で与えられる：

$$
Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & & & \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\
 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

このマルコフ連鎖は出生死滅（BD：Birth-and-Death）過程と呼ばれる．

状態推移図



例 1）M/M/1 待ち行列（定常分布）

ここでは性能評価量として，マルコフ連鎖の定常方程式：

$$\boldsymbol{\pi} Q = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\pi}\mathbf{1} = 1 \quad (\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots))$$

の解 $\boldsymbol{\pi}$（定常分布）に興味がある．ここで，

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{L(u)=i\}} du}{t}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

M/M/1 待ち行列の定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ は，定常方程式における 3 項間漸化式を解くことで，幾何分布として得られる：

$$\pi_i = (1-\rho)\rho^i, \quad i \geq 1.$$

例１）M/M/1/1+K 待ち行列（有限待ちスペースモデル）

待ちスペース容量を $K(\geq 0)$ に制限した場合，M/M/1/1+K 待ち行列と呼ぶ．その推移速度行列 $Q^{(K+1)}$ は以下の通り：

$$
Q^{(K+1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ K-1 \\ K \\ K+1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & K-1 & K & K+1 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & & & & & \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & & \\
 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\
 & & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\
 & & & & & \mu & -\mu
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

このとき，定常分布 $\boldsymbol{\pi}^{(K+1)} = (\pi_0^{(K+1)}, \pi_1^{(K+1)}, \ldots, \pi_K^{(K+1)}, \pi_{K+1}^{(K+1)})$ は，

$$
\pi_i^{(K+1)} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+2}}\rho^i, \quad 0 \leq i \leq K+1.
$$

例 1 ）M/M/1/1+K 待ち行列のロス確率

M/M/1/1+K に限らず，有限容量の待ちスペースをもつ待ち行列について，到着客のロス確率を次で定義する：

$$(\text{ロス確率}) = \frac{(\text{単位時間当たりの平均ロス人数})}{(\text{単位時間当たりの平均到着人数})}.$$

ゆえに，M/M/1/1+K 待ち行列のロス確率 $p_{\text{loss (M/M/1/1+K)}}$ は，

$$\begin{aligned} p_{\text{loss (M/M/1/1+K)}} &= \frac{\lambda \pi_{K+1}^{(K+1)}}{\lambda} \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+2}} \rho^{K+1} \end{aligned}$$

であり，（言うまでもないが）次の漸近特性を得る：

$$\lim_{K \to \infty} \rho^{-(K+1)} p_{\text{loss (M/M/1/1+K)}} = 1 - \rho.$$

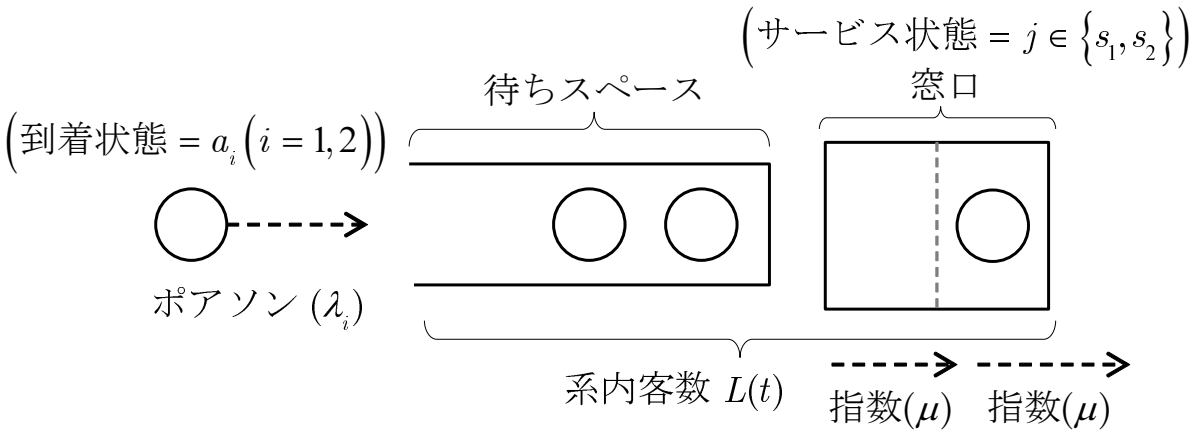
例２）MMPP/Er/1 待ち行列

MMPP/Er/1 待ち行列の定義：

- 単一窓口，無限容量の単一待ちスペース
- 到着：$A(t) = a_i$（$i = 1, 2$）のとき，客が率 λ_i のポアソン過程に従い到着，ここで，$A(t)$ は次の推移速度行列をもつマルコフ連鎖とする：

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

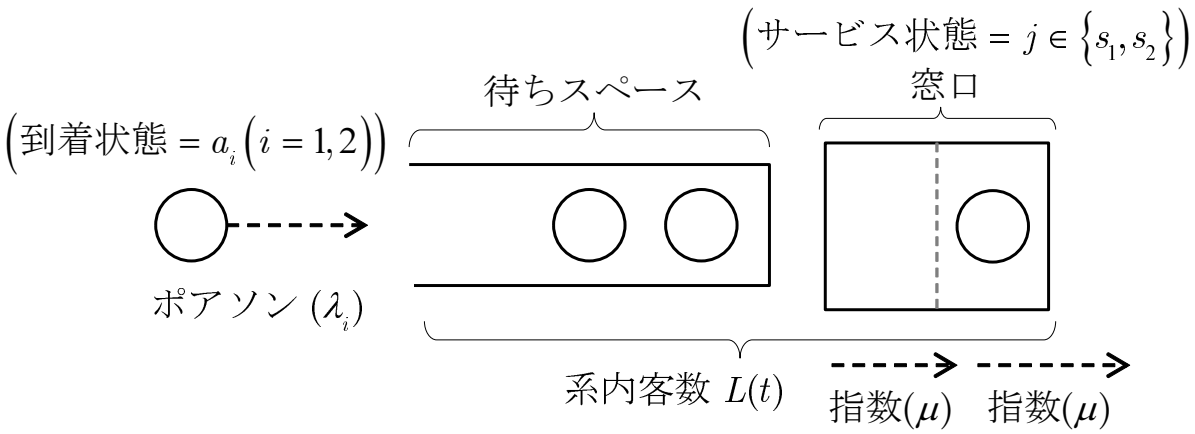
- サービス：窓口は 2 段階サービスを行う．各段のサービス時間は平均 μ^{-1} の指数分布に従う．サービス中の客の状態を $S(t) \in \{s_1, s_2\}$ で表す．



例２）MMPP/Er/1 待ち行列

MMPP/Er/1 待ち行列の定義：

- 到着：$C = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \lambda_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 - \lambda_2 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とし，推移速度行列 $C + D$ のマルコフ連鎖が状態変化した際，その変化が D によるものであったときのみ，客の到着が起こる [1]．
- サービス：表現 $(\boldsymbol{\beta}, T)$，ここで，$\boldsymbol{\beta} = (1, 0)$，$T = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$，の相型分布 [2] に従う．



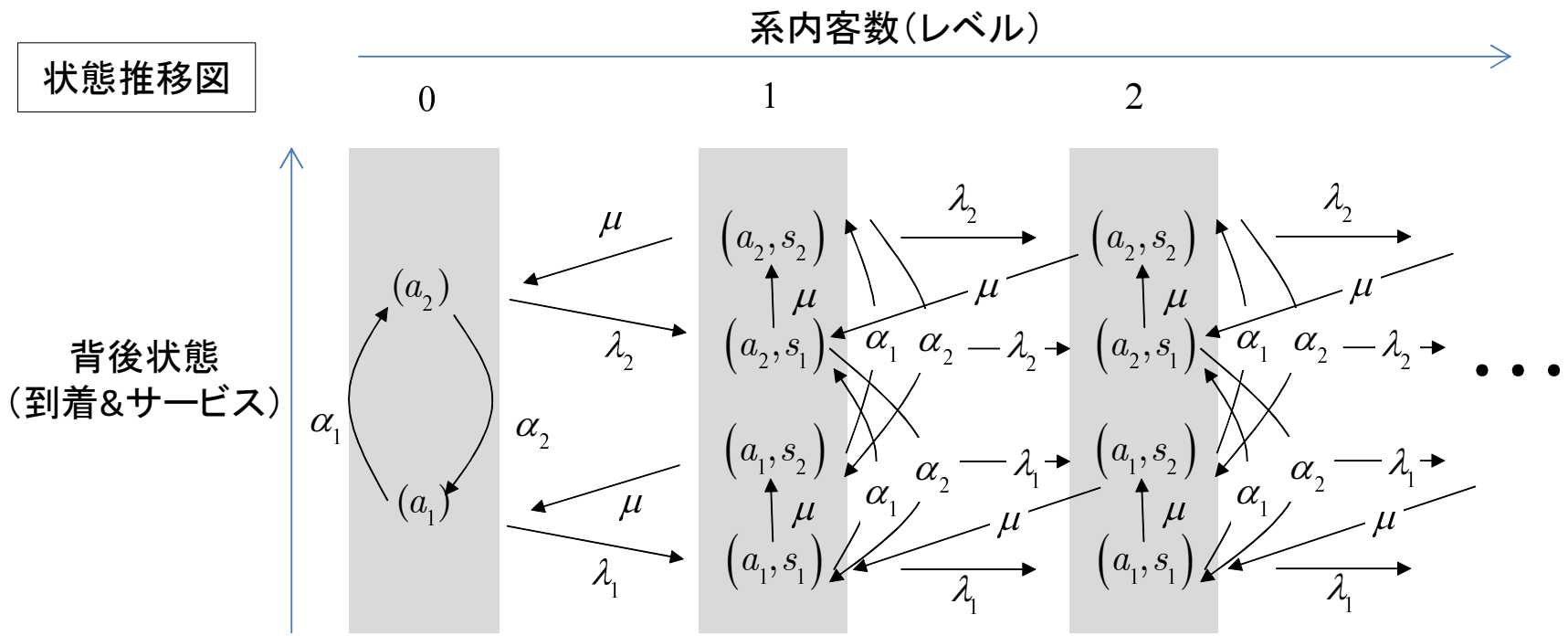
[1] マルコフ変調ポアソン過程（MMPP:Markov Modulated Poisson Process）という

[2] 一時的なマルコフ連鎖（初期分布 $\boldsymbol{\beta}$，推移速度行列 T）が吸収状態に入るまでの時間分布

例２）MMPP/Er/1 待ち行列

このとき，$(\underbrace{L(t)}_{\text{レベルと呼ぶ}}, \underbrace{A(t), S(t)}_{\text{背後状態と呼ぶ}})$ は状態空間 $\cup_{\ell=0}^{\infty}\mathcal{L}_\ell$ 上のマルコフ連鎖である．ここで，$\mathcal{L}_0 = \{0\} \times \{a_1, a_2\}$，$\mathcal{L}_\ell = \{\ell\} \times \{a_1, a_2\} \times \{s_1, s_2\} (\ell \geq 1)$ とする．

状態推移図



例２）MMPP/Er/1 待ち行列（QBD 過程）

レベル 1 より先において，レベルが $i(=0,\pm 1)$ 変化した際，背後状態の変化を表す推移速度行列を A_i と表記すると，

$$A_{-1} = I \otimes \boldsymbol{t}\boldsymbol{\beta}, \quad A_0 = C \oplus T, \quad A_{+1} = D \otimes I.$$

同様にレベル 1 から -1 変化する場合を $\underline{B}_{-1}$，レベル 0 から $0(+1)$ 変化するときを $\underline{B}_0(\underline{B}_{+1})$ と表記すると，

$$\underline{B}_{-1} = I \otimes \boldsymbol{t}, \quad \underline{B}_0 = C, \quad \underline{B}_{+1} = D \otimes \boldsymbol{\beta}.$$

ここで，$\otimes$（$\oplus$）はクロネッカー積（和）と呼ばれ，例えば，行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と行列 B について，

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

で定義される．さらに，$A \oplus B = A \otimes I + I \otimes B$ とする．

例２）MMPP/Er/1 待ち行列（QBD 過程）

MMPP/Er/1 待ち行列 $(L(t), A(t), S(t))$ の推移速度行列 Q は以下の三重対角構造をもつ：

$$
Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\underline{B}_0 & \underline{B}_{+1} & & & \\
\underline{B}_{-1} & A_0 & A_{+1} & & \\
 & A_{-1} & A_0 & A_0 & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

この推移構造をもつマルコフ連鎖を QBD 過程と呼ぶ.

例２）MMPP/Er/1/1+K 待ち行列（有限待ちスペースモデル）

待ちスペース容量を $K(\geq 0)$ に制限した場合，MMPP/Er/1/1+K 待ち行列と呼ぶ．対応するマルコフ連鎖の推移速度行列 $Q^{(K+1)}$ は以下の通り：

$$
Q^{(K+1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ K-1 \\ K \\ K+1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & K-1 & K & K+1 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\underline{B}_0 & \underline{B}_1 & & & & & \\
\underline{B}_{-1} & A_0 & A_{+1} & & & & \\
 & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & \\
 & & & & A_{-1} & A_0 & A_{+1} \\
 & & & & & A_{-1} & \overline{B}_0
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

ここで，$\overline{B}_0 = (C+D) \oplus T$ である．この推移構造をもつマルコフ連鎖を有限レベル QBD 過程と呼ぶ．

1 はじめに

2 対象となる待ち行列の例２つ

3 有限レベル QBD 過程の漸近特性
- 無限レベル・有限レベル QBD 過程
- マルコフ連鎖の初到達確率・占有測度
- QBD 過程の定常分布（行列幾何形式）
- 有限レベル QBD 過程の漸近特性

4 応用例

表現の単純化：連続時間から離散時間へ

ここまでは，連続時間型マルコフ連鎖について考えてきたが，これ以降，表現の単純にするため，離散時間型マルコフ連鎖で話を進める．
ここで，あるマルコフ連鎖の推移速度行列が Q で与えられ，

$$\theta = \max_{\text{全ての } i \text{ について}} |Q \text{ の } (i,i) \text{ 要素}|, \quad \theta < \infty$$

とする．このとき，この連続時間型マルコフ連に対応する離散時間型マルコフ連鎖として，

$$P = I + \frac{1}{\theta} Q$$

を推移確率行列とする離散時間型マルコフ連鎖を考える [3]．

[3] $\boldsymbol{\pi} Q = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$，つまり，連続時間型と対応する離散時間型マルコフ連鎖の定常分布は一致する．またマルコフ連鎖の QBD 構造も維持される．

準出生死滅過程（QBD 過程）

2 次元の離散時間型マルコフ連鎖 (X_n, Y_n) を考える，ここで，

- X_n（レベル）は非負整数 $\mathbb{Z}_+$，Y_n（背後状態）は有限集合（$X_n = 0$ のとき $\mathcal{S}_0$，$X_n \geq 1$ のとき $\mathcal{S}_B$）に値をとる
- 各時刻のレベルの変化は背後状態に依存し，変化量は高々± 1
- レベル 1 以上の推移構造は同質

(X_n, Y_n) を準出生死滅（QBD: Quasi-Birth-and-Death）過程と呼ぶ.

QBD 過程の推移確率行列 P は次の三重対角構造をもつ：

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\underline{B}_0 & \underline{B}_{+1} & & & \\
\underline{B}_{-1} & A_0 & A_{+1} & & \\
 & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

以下では，この QBD 過程が正再帰的であるとする，つまり，

$A_{-1} + A_0 + A_{+1}$ の定常分布 $\boldsymbol{\nu}$ とすると，$\boldsymbol{\nu} A_{-1} \mathbf{1} > \boldsymbol{\nu} A_{+1} \mathbf{1}$ を仮定する.

有限レベル QBD 過程

有限なレベル m（≥ 1）で状態空間を打ち切られた QBD 過程を $(X_n^{(m)}, Y_n^{(m)})$ で表す．つまり，有限レベル QBD 過程 $(X_n^{(m)}, Y_n^{(m)})$ の推移確率行列 $P^{(m)}$ は以下の三重対角構造をもつ：

$$
P^{(m)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-2 \\ m-1 \\ m \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & m-2 & m-1 & m \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\underline{B}_0 & \underline{B}_1 & & & & & \\
\underline{B}_{-1} & A_0 & A_{+1} & & & & \\
 & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & A_{-1} & A_0 & A_{+1} & \\
 & & & & A_{-1} & A_0 & A_{+1} \\
 & & & & & \overline{B}_{-1} & \overline{B}_0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

定常分布を $(\boldsymbol{\pi}_0^{(m)}, \boldsymbol{\pi}_1^{(m)}, \ldots, \boldsymbol{\pi}_m^{(m)})$ で表す．

ここからの話

- ゴールは，有限レベル QBD 過程の定常分布の漸近特性を得ること，特に，

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\boldsymbol{\pi}_m^{(m)}}{\alpha^m} = \boldsymbol{c}$$

を満たす定数 $\alpha(\in (0,1))$ および非負ベクトル $\boldsymbol{c}$ を特定すること．

そのために，

- マルコフ連鎖における初到達確率（G 行列）および占有測度（N 行列，R 行列）の関係．
- 無限レベル QBD 過程の定常分布（行列幾何形式）の導出．

についての考察が役に立つ．

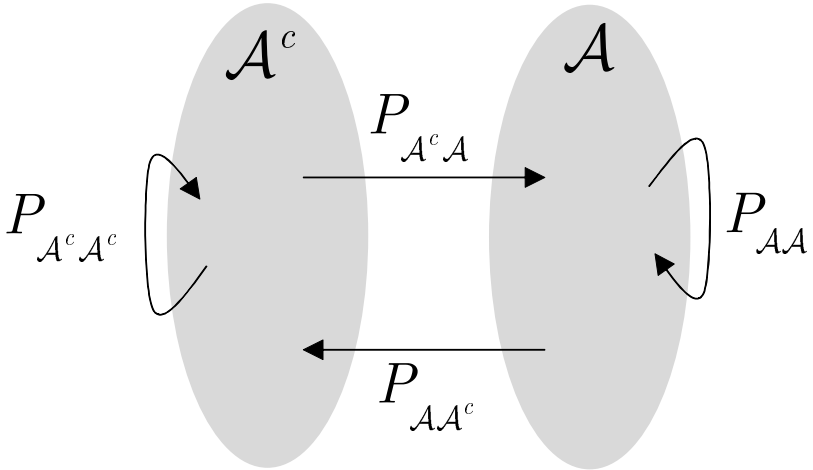
マルコフ連鎖の初到達確率 G，占有測度 N・R

ある可算状態空間 $\mathcal{A}^c \cup \mathcal{A}$（分割されている）をもつマルコフ連鎖について，分割に対応する定常方程式：

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}, \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}}) \begin{pmatrix} P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}^c} & P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}} \\ P_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c} & P_{\mathcal{A}\mathcal{A}} \end{pmatrix} &= (\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}, \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}), \qquad (1) \\
\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}\mathbf{1} + \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}}\mathbf{1} &= 1.
\end{aligned}
$$

(1) 式は以下と同一：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c} P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}^c} + \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c} &= \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}, \qquad (2) \\
\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c} P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}} + \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A}\mathcal{A}} &= \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$



マルコフ連鎖の初到達確率 G，占有測度 N・R

(3) 式より，

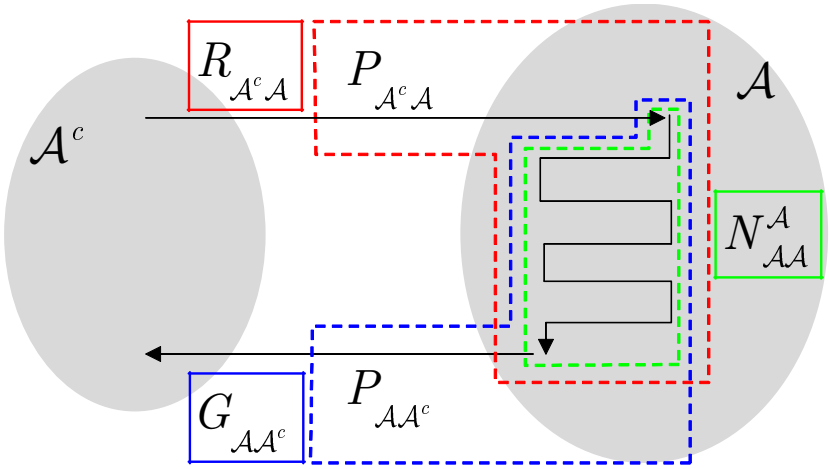
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}} &= \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c} P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}} (I - P_{\mathcal{A}\mathcal{A}})^{-1} \\
&= \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c} \underbrace{P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (P_{\mathcal{A}\mathcal{A}})^i}_{\mathcal{A}^c \text{ に入ることなく } \mathcal{A} \text{ に滞在する平均時間：} \boxed{N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}} \text{ と表記}}}_{\mathcal{A}^c \text{ から出発し途中 } \mathcal{A}^c \text{ に入ることなく } \mathcal{A} \text{ に滞在する平均時間：} \boxed{R_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}}} \text{ と表記}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(2) 式と (4) 式より，

$$
\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c} \left(P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}^c} + P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (P_{\mathcal{A}\mathcal{A}})^i P_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c}}_{\mathcal{A} \text{ から出発していつか } \mathcal{A}^c \text{ に入る確率：} \boxed{G_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c}} \text{ と表記}} \right) = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c} \tag{5}
$$

初到達確率 G と占有測度 N・R の関係

- $\boxed{N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}}$ $(= \sum_{i=0}^{\infty}(P_{\mathcal{A}\mathcal{A}})^i)$：$\mathcal{A}^c$ に入ることなく $\mathcal{A}$ に滞在する平均時間
- $\boxed{R_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}}}$ $(= P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}}\boxed{N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}})$：$\mathcal{A}^c$ から出発し $\mathcal{A}^c$ に戻るまでに $\mathcal{A}$ に滞在する平均時間
- $\boxed{G_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c}}$ $(= \boxed{N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}}P_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c})$：$\mathcal{A}$ から出発していつか $\mathcal{A}^c$ に入る確率
- (4) 式：$\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}\boxed{R_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}}}$
- (5) 式：$\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}(P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}^c} + P_{\mathcal{A}^c\mathcal{A}}\boxed{N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}}P_{\mathcal{A}\mathcal{A}^c}) = \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{A}^c}$



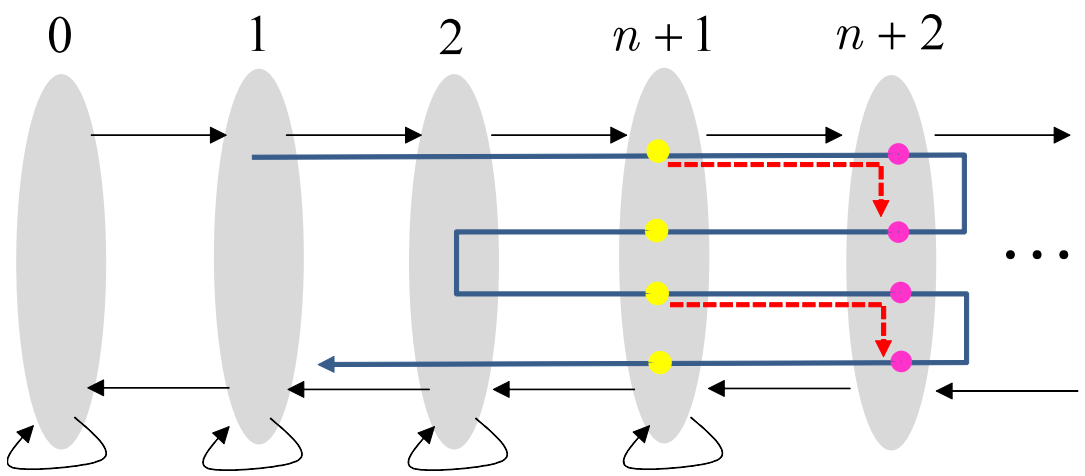
QBD 過程の定常分布（行列幾何形式）

$\mathcal{A}^c = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$，$\mathcal{A} = \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \cdots$（$= (1,+)$ と略）とし，$\mathcal{A}$ の分割に応じて $N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = (N^{(1,+)}_{ij}; i,j \geq 2)$ と表す．このとき (4) 式は，

$$(\boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3, \ldots) = (\boldsymbol{\pi}_1 \underbrace{A_{+1} N^{(1,+)}_{22}}_{R^+ \text{ と表記}}, \underbrace{\boldsymbol{\pi}_1 A_{+1} N^{(1,+)}_{23}, \ldots}_{\text{（ア）}})$$

と書ける．このとき（ア）において，$n \geq 1$ について，

$$\boxed{A_{+1} N^{(1,+)}_{2,n+2}} = \boxed{A_{+1} N^{(1,+)}_{2,n+1}} \underbrace{A_{+1} N^{(n+1,+)}_{n+2,n+2}}_{\boxed{R^+} \text{ に等しい}} \tag{6}$$



QBD 過程の定常分布（行列幾何形式）

$\mathcal{A}^c = \mathcal{L}_0 \cup \mathcal{L}_1$，$\mathcal{A} = \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3 \cup \cdots$（$= (1,+)$ と略）とし，$\mathcal{A}$ の分割に応じて $N^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = (N^{(1,+)}_{ij}; i,j \geq 2)$ と表す．このとき (4) 式は，

$$(\boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3, \ldots) = (\boldsymbol{\pi}_1 \underbrace{A_{+1} N^{(1,+)}_{22}}_{R^+ \text{ と表記}}, \underbrace{\boldsymbol{\pi}_1 A_{+1} N^{(1,+)}_{23}, \ldots}_{\text{（ア）}})$$

と書ける．このとき（ア）において，$n \geq 1$ について，

$$\boxed{A_{+1} N^{(1,+)}_{2,n+2}} = \boxed{A_{+1} N^{(1,+)}_{2,n+1}} \underbrace{A_{+1} N^{(n+1,+)}_{n+2,n+2}}_{\boxed{R^+} \text{ に等しい}} \tag{6}$$

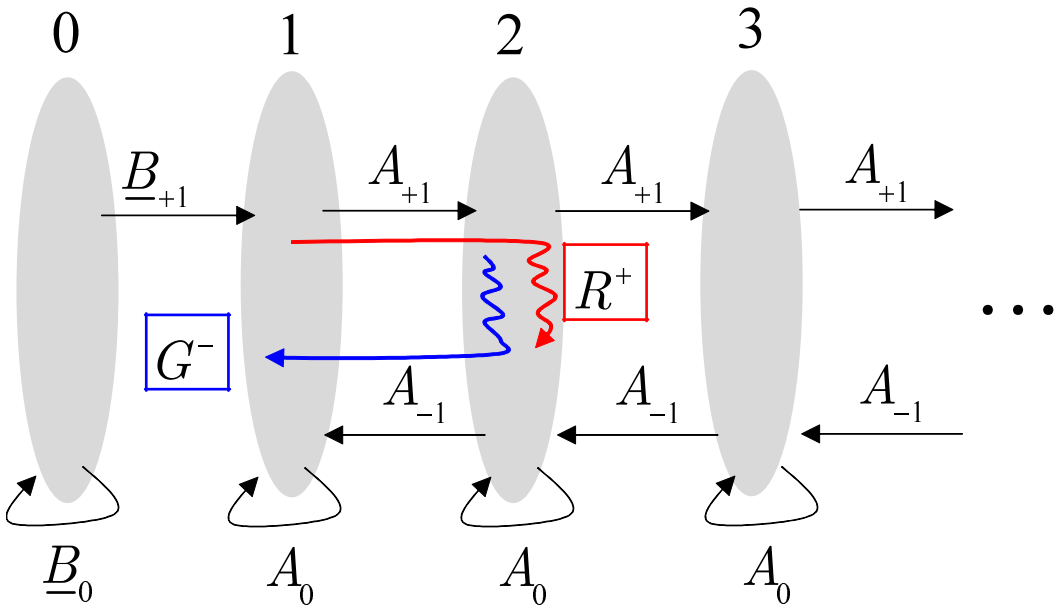
$A_{+1} N^{(1,+)}_{2,n+2} = (R^+)^{n+1}$（$n \geq 1$）であり，定常分布について行列幾何形式を得る：

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_1 (R^+)^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

QBD 過程の定常分布（R の計算方法）

ここでは R^+ の計算方法を紹介する．$N_{22}^{(1,+)}A_{-1} = G^-$（：あるレベルから 1 つ下のレベルへの初到達確率）と表記すれば，

$$R^+ = A_{+1}\sum_{i=0}^{\infty}(A_0 + A_{+1}G^-)^i = A_{+1}(I - (A_0 + A_{+1}G^-))^{-1}.$$



QBD 過程の定常分布（R の計算方法）

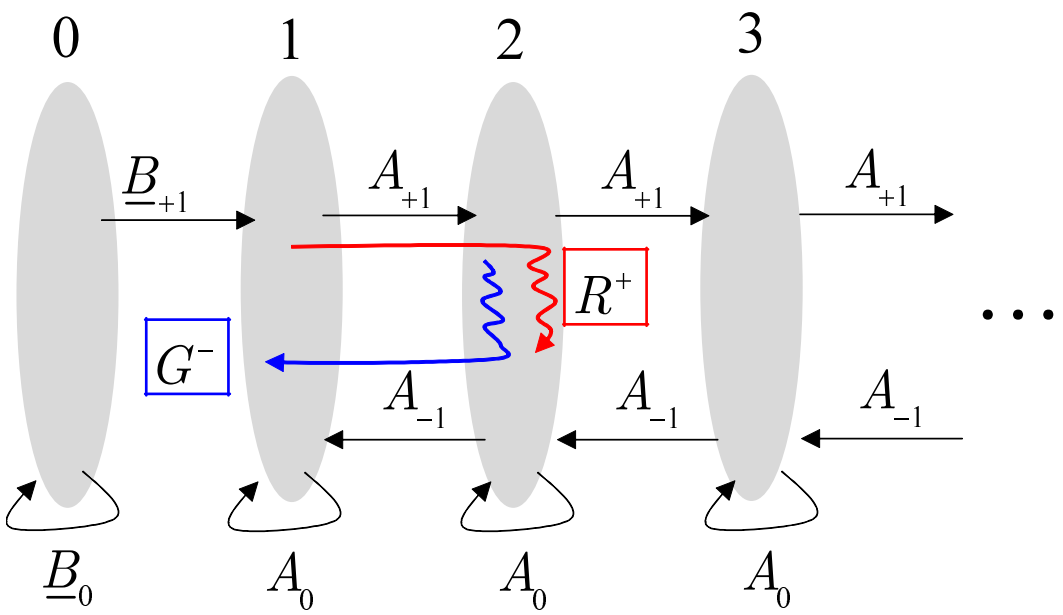
ここで，$A_{+1}G^- = A_{+1}N_{22}^{(1,+)}A_{-1} = R^+A_{-1}$ であることから，

$$R^+ = A_{+1} + R^+A_0 + (R^+)^2A_{-1}$$

を得る．以上のことから，定常分布について行列幾何形式を得る：
ここで，R^+ は次の繰り返し計算により求まることが知られている：

$$X(0) = O, \quad X(n+1) = A_{+1} + A_0X(n) + A_{-1}(X(n))^2, \quad (n \geq 0).$$

このとき，$X(n) \uparrow R^+$（$n \to \infty$）である．



有限レベル QBD 過程の漸近特性

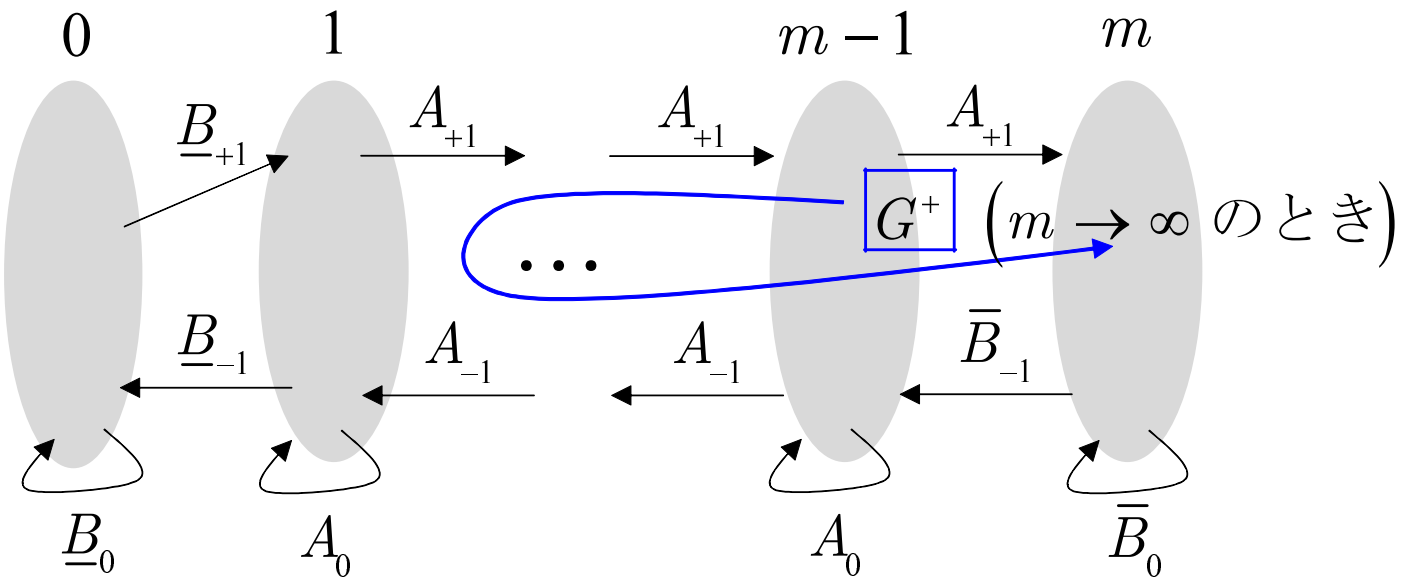
レベル 1 および m の定常確率 $(\boldsymbol{\pi}_1^{(m)}, \boldsymbol{\pi}_m^{(m)})$ について定常方程式：

$$(\boldsymbol{\pi}_0^{(m)}, \boldsymbol{\pi}_m^{(m)}) \begin{pmatrix} \underline{B}_0 + \underline{B}_{+1} N_{11}^{(0,m)} \underline{B}_{-1} & \underline{B}_{+1} N_{1,m-1}^{(0,m)} A_{+1} \\ \overline{B}_{-1} N_{m-1,1}^{(0,m)} \underline{B}_{-1} & \overline{B}_0 + \overline{B}_{-1} N_{m-1,m-1}^{(0,m)} A_{+1} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\pi}_0^{(m)}, \boldsymbol{\pi}_m^{(m)})$$

より，

$$\boldsymbol{\pi}_m^{(m)} = \boldsymbol{\pi}_0^{(m)} \underline{B}_{+1} \underbrace{N_{1,m-1}^{(0,m)} A_{+1}}_{(イ)} \left(1 - (\overline{B}_0 + \overline{B}_{-1} \underbrace{N_{m-1,m-1}^{(0,m)} A_{+1}}_{(ア)}) \right)^{-1}$$

$\rho < 1$ のもと，$\lim_{m\to\infty}$（ア）$= G^+$ に注意する．



有限レベル QBD 過程の漸近特性

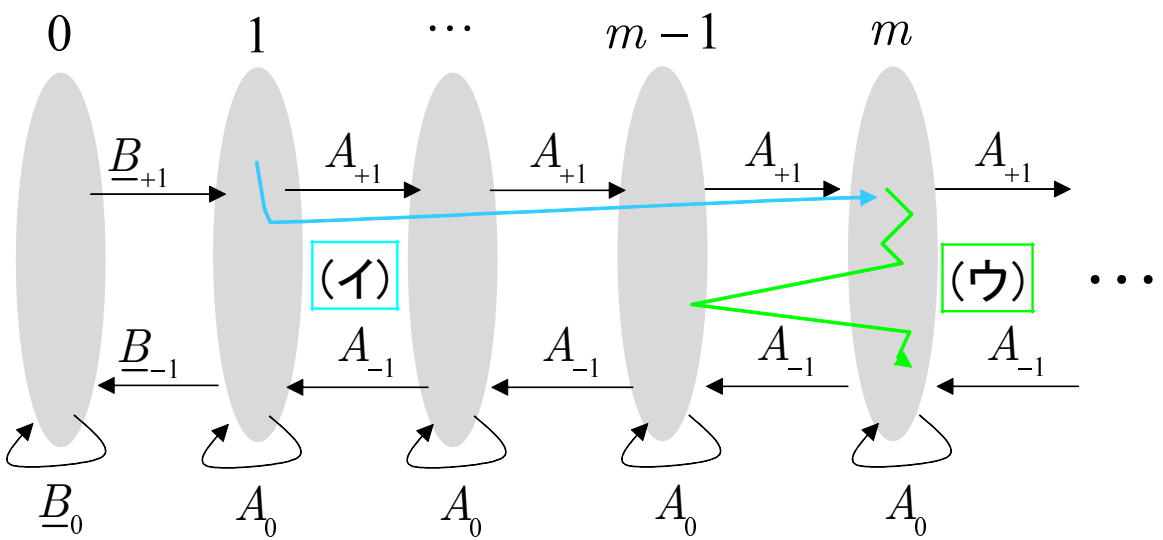
次に $m \to \infty$ のときの（イ）$= N_{1,m-1}^{(0,m)} A_{+1}$ の振る舞いについて．$N_{1,m}^{(0,+)}$ について，レベル m への最初の到達で条件付けすることにより，

$$N_{1,m}^{(0,+)} = \underbrace{N_{1,m-1}^{(0,m)} A_{+1}}_{\text{（イ）:1 から出発し途中 0 に戻らずに } m \text{ へ到達する確率}} \underbrace{N_{m,m}^{(0,+)}}_{\text{（ウ）}}$$

ここで，(6) 式の導出と同様にして，$N_{1,m}^{(0,+)} = N_{1,1}^{(0,+)} (R^+)^{m-1}$ であることに注意する．最後に

$$\lim_{m\to\infty} \text{（ウ）} = \left(1 - (A_0 + A_{-1}G^+ + A_{+1}G^-)\right)^{-1}.$$

である．



有限レベル QBD 過程の漸近特性

R^+ の最大固有値を $\alpha > 0$，左右固有ベクトルを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とすると，R が非周期（多くの待ち行列でいえる）であるとき，$(R^+)^m = \alpha^m \frac{\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} + o(\alpha^m)$ である（Seneta (1981), Theorem 1.2）．以上のことから，

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \alpha^{-(m-1)} \boldsymbol{\pi}_m^{(m)} &= \boldsymbol{\pi}_0 \underline{B}_{+1} N_{11}^{(0,+)} \big(\lim_{m\to\infty} \alpha^{-(m-1)} (R^+)^{m-1} \big) \\
&\quad \times (I - (A_0 + A_{-1}G^+ + A_{+1}G^-)) \left(1 - (\overline{B}_0 + \overline{B}_{-1}G^+)\right)^{-1} \\
&= \underbrace{\boldsymbol{\pi}_1 \frac{\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} (I - (A_0 + A_{-1}G^+ + A_{+1}G^-)) \left(1 - (\overline{B}_0 + \overline{B}_{-1}G^+)\right)^{-1}}_{\boldsymbol{c}\ \text{とおく}}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，最後の等式は $\boldsymbol{\pi}_0 \underline{B}_{+1} N_{11}^{(0,+)} = \boldsymbol{\pi}_0$ であることを利用し，また，G^- および G^+ は R^+ と同様にして，行列 2 次方程式の最小非負解として計算できる：

$$
\begin{aligned}
G^- &= A_{-1} + A_0 G^- + A_{+1} (G^-)^2, \\
G^+ &= A_{+1} + A_0 G^+ + A_{-1} (G^+)^2.
\end{aligned}
$$

1 はじめに

2 対象となる待ち行列の例 2 つ

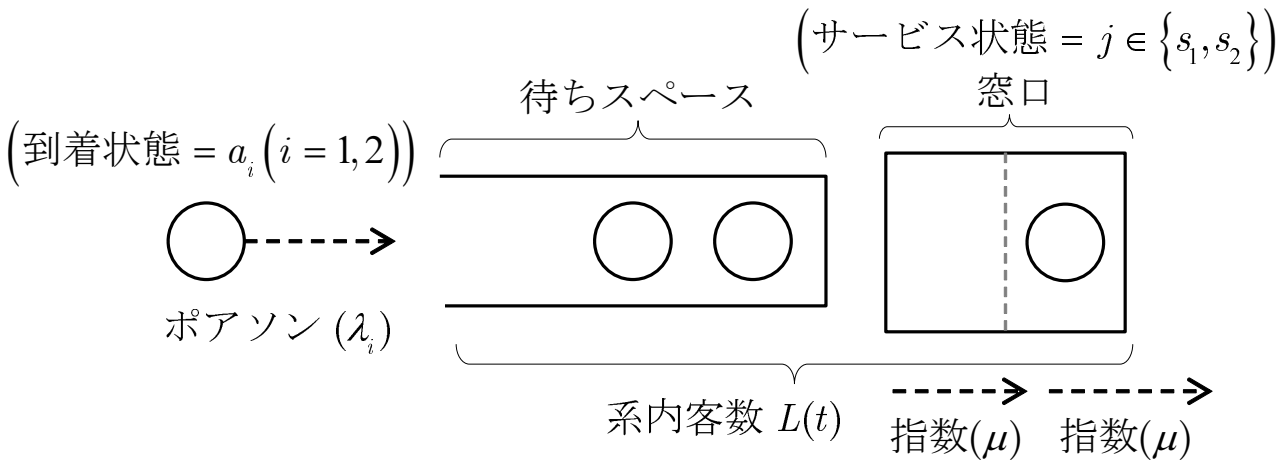
3 有限レベル QBD 過程の漸近特性

4 応用例

応用例（MMPP/Er/1/1+K）

MMPP/Er/1 待ち行列：

- 到着：$C = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \lambda_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 - \lambda_2 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とし，推移速度行列 $C + D$ のマルコフ連鎖が状態変化した際，その変化が D によるものであったときのみ，客の到着が起こる．
- サービス：表現 $(\boldsymbol{\beta}, T)$，ここで，$\boldsymbol{\beta} = (1, 0)$，$T = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$，の相型分布に従う．



応用例（MMPP/Er/1/1+K）

到着過程の定常分布を $\boldsymbol{\nu}$ とする，つまり，

$$\boldsymbol{\nu}(C+D)=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\nu}\mathbf{1}.$$

このとき，単位時間当たりの客の到着人数は $\boldsymbol{\nu}D\mathbf{1}$ である．また，到着客の平均ロス人数は $\boldsymbol{\pi}_{(K+1)}^{K+1}A_{+1}\mathbf{1}$ である．ゆえに，待ちスペース容量 K に関する到着客のロス確率 $p_{loss}(K)$ は，

$$p_{loss}(K)=\frac{\boldsymbol{\pi}_{K+1}^{(K+1)}A_{+1}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}D\mathbf{1}}$$

である．よって，MMPP/Er/1/1+K のロス確率の漸近特性を得る：

$$\lim_{K\to\infty}\alpha^{-K}p_{loss}(K)=\frac{\boldsymbol{c}A_{+1}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}D\mathbf{1}}.$$

以上より，ロス確率の近似式は $\frac{\boldsymbol{c}A_{+1}\mathbf{1}}{\boldsymbol{\nu}D\mathbf{1}}\alpha^{K}$ で与えられる．

参考文献

- E. Seneta: *Nonnegative Matrices and Markov Chains* (Springer, New York, 1981).
- 牧本直樹: 待ち行列アルゴリズム ー 行列解析アプローチ ー（朝倉書店，2001）.
- M. Miyazawa, Y. Sakuma, and S. Yamaguchi: Asymptotic behaviors of the loss probability for a finite buffer queue with QBD structure. *Stochastic models*, **23** (2007), 79–95.