
Big Queues – 裾の重い分布と希少事象確率 –

増山 博之

(京都大学 大学院情報学研究科)

1 分布の裾と性能評価

1.1 性能評価指標の種類

モーメント型

- 系内客数, 待ち時間, 全稼働期間などの平均や分散

1. 「平均的な」性能を測る
2. 主に到着率やサービス時間分布のモーメントなどに依存

裾特性型

- 系内客数, 待ち時間, 全稼働期間などの裾確率(補分布)の漸近公式
- 有限バッファモデルの呼損率(バッファに収容されない客の割合)

1. 稀だが起こって欲しくない事象の発生頻度(リスク)を測る
2. 主に到着過程の相関やサービス時間分布の裾漸近特性などに依存

1.2 裾の重い分布が及ぼす影響

- 裾の重い分布を持つ待ち行列(サービス時間分布の裾が重いなど)では、系内客数分布や待ち時間分布の裾が重くなる
 - ⇒ 裾確率の減衰が遅い
 - ⇒ 平均値から大きく離れた値が発現する確率の減衰が遅い
 - ⇒ 裾特性型の指標を用いた評価が重要

注意

分布の裾が重い $\nleftrightarrow$ 分散が大きい

次頁で例を紹介...

- 超指数分布 (裾が軽い):

$$1 - F_{\text{Hyper}}(x) = \frac{1}{4}e^{-(4+2\sqrt{2})x} + \frac{3}{4}e^{-(36-6\sqrt{2})x/17}, \quad x \geq 0$$

- パレート分布 (裾が重い):

$$1 - F_{\text{Pareto}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{7-2\sqrt{7}}{6} \\ \left(\frac{6x}{7-2\sqrt{7}} \right)^{-(2+\sqrt{7})/2}, & x \geq \frac{7-2\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

いずれも平均 $h = 1/2$, 分散 $h_v = 1/3$

しかし,...

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{\text{Pareto}}(x)}{1 - F_{\text{Hyper}}(x)} = \infty$$

裾確率の減衰は大きく異なる

前項の2つの分布をサービス時間分布 H とする M/G/1 待ち行列を考える

超指数分布: $1 - H(x) = \frac{1}{4}e^{-(4+2\sqrt{2})x} + \frac{3}{4}e^{-(36-6\sqrt{2})x/17}, \quad x \geq 0$

パレート分布: $1 - H(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{7-2\sqrt{7}}{6} \\ \left(\frac{6x}{7-2\sqrt{7}}\right)^{-(2+\sqrt{7})/2}, & x \geq \frac{7-2\sqrt{7}}{6} \end{cases}$

- M/GI/1 待ち行列の平均系内客数

$$E[L] = \frac{\lambda^2(v_h + h^2)}{2(1 - \lambda h)} + \lambda h \quad \left\{ \begin{array}{l} L : \text{定常状態での系内客数} \\ \lambda : \text{到着率} \\ h, v_h : \text{サービス時間の平均と分散} \end{array} \right.$$

2つのサービス時間分布ともに, 平均 $h = 1/2$, 分散 $h_v = 1/3$

$$\implies \text{平均系内客数 } E[L] = \frac{7\lambda^2}{24 - 12\lambda} + \frac{\lambda}{2}$$

- M/GI/1 待ち行列の系内客数分布の裾確率
超指数分布の場合:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k P(L > k) = (\text{正の定数})$$

$$\theta = \frac{\lambda + 40 - 4\sqrt{2} + \sqrt{\lambda^2 + (-32 + 8\sqrt{2})\lambda - 32 + 8\sqrt{2}}}{2\lambda}$$

パレート分布の場合:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{\lambda} \right)^{\sqrt{7}/2} P(L > k) = (\text{正の定数})$$

系内客数分布の裾確率の減衰速度が異なる

⇒ リスクの大きさが異なる

1.3 重裾漸近解析の意義

- 系内客数分布や待ち時間分布の陽解,あるいは数値計算に適した解析解を導くことができる待ち行列モデルは意外と少ない
 - $M/M/c$, $M/M/\infty$: 陽解あり
 - $GI/M/c$: ある非線形方程式の区間 $(0, 1)$ に存在する唯一解をパラメータに持つ陽的な解が得られる
 - $M/G/1$: 待ち時間分布の解析解(無限級数解)は得られる
系内客数分布は母関数表現のみ(再帰式による数値計算は可)
- サービス時間や到着時間間隔が裾の重い分布に従う場合,系内客数分布や待ち時間分布の裾確率をシミュレーションで推定するのは困難
 - 極端な事象(例えば,非常に大きなサービス時間)が無視できない頻度で発生し,その影響を打ち消すために,長大なランタイムが必要

裾漸近公式は計算コスト,感度分析の点で優位性がある

2 準備

2.1 表記

- $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ で定義され, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ での確率の合計が1となる分布関数のみ考える
- 確率変数 X の分布関数 F_X が, 分布族 $\mathcal{A}$ に属するとき, $X \in \mathcal{A}$ あるいは $F_X \in \mathcal{A}$ と表現
- 任意の分布関数 F に対して, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$
- F_e : 有限かつ正の期待値 μ を持つ分布関数 F の平衡分布 (Equilibrium Distribution)

$$F_e(x) = \mu^{-1} \int_0^x \overline{F}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- X_e : 有限かつ正の期待値を持つ非負確率変数 X に関する平衡確率変数

$$P(X_e < x) = \frac{1}{E[X]} \int_0^x P(X > y) dy, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- $F * G$: 分布関数 F と G の畳み込み

$$F * G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x F(x-y) dG(y) = \int_0^x G(x-y) dF(y), & x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

- F^{*n} : 分布関数 F の n 重畳み込み

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$$F^{*n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x F^{*(n-1)}(x-y) dF(y), & x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff f(x) \stackrel{x}{\sim} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = o(g(x))$

2.2 非有界な“台”を持つ分布

定義 2.1 分布関数 F が, $\overline{F}(x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}_+$) を満たすとき, 非有界な台を持つ分布と呼ぶ.

定理 2.1 (Foss et al. 2011, Theorem 2.11) 分布関数 $F_1, \dots, F_n$ が, 非有界な台を持つとき, 次式が成立する.

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F_1 * \dots * F_n}(x)}{\overline{F_1}(x) + \dots + \overline{F_n}(x)} \geq 1 \quad (1)$$

系 2.1 F は非有界な台を持つ分布 $\implies \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq n$

定理 2.1 の証明 分布 $F_1, \dots, F_n$ に従う独立な n 個の確率変数を $Y_1, \dots, Y_n$ すると,

$$\begin{aligned}\overline{F_1 * \dots * F_n}(x) &= \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n > x) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(Y_k > x, Y_j \in [0, x] \text{ for all } j \neq k) \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{F}_k(x) \prod_{j \neq k} F_j(x) \stackrel{x}{\sim} \sum_{k=1}^n \overline{F}_k(x)\end{aligned}$$

□

系 2.1 の証明 定理 2.1 において, $F_i = F$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおけばよい.

□

3 裾の重い分布族とそのサブクラス

3.1 裾の重い分布族

定義 3.1 分布関数 F は“裾が重い (heavy-tailed)” ($F \in \mathcal{H}$ と書く)

$$\iff \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\varepsilon x} \bar{F}(x) = \infty \ (\forall \varepsilon > 0) \iff \bar{F}(x) = e^{-o(x)}$$

- 補分布 $\bar{F}$ の減衰が, どんな指数関数よりも遅い

補題 3.1 (Foss et al. 2011, Theorem 2.12)

$$F \in \mathcal{H} \implies \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} = 2$$

- F が非有界な台を持つ $\implies \liminf_{x \rightarrow \infty} \bar{F}^{*2}(x)/\bar{F}(x) \geq 2$
- 分布族 $\mathcal{H}$ は, 分布の形状に制約がなさすぎて, 理論解析に適さない
 $\implies$ もっと分布の形状を特定したサブクラスを考える必要あり

3.2 裾の長い分布族

定義 3.2 分布関数 F は“裾が長い(long-tailed)” ($F \in \mathcal{L}$ と書く)

$$\iff \overline{F}(x+y) \stackrel{x}{\sim} \overline{F}(x) \quad \text{for some (thus all) } y > 0$$

- $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{H}$ (補題 A.1, 例 A.1)
- 畳み込みに関して閉 (Foss et al., 2011, Corollaries 2.42 and 2.43)

$$F, G \in \mathcal{L} \implies F * G \in \mathcal{L}$$

$$F \in \mathcal{L}, \overline{G}(x) = o(\overline{F}(x)) \implies F * G \in \mathcal{L}$$

- $F_e \in \mathcal{L} \iff \overline{F}(x) = o(\overline{F}_e(x))$
- 分布族 $\mathcal{L}$ は, $\mathcal{H}$ より数学的に良い性質を持っているが, まだ不十分
 $\implies$ 劣指数分布族の導入

3.3 劣指数分布族

定義 3.3 分布関数 F は“劣指數的(subexponential)” ($F \in \mathcal{S}$ と書く)

$$\iff \overline{F^{*2}}(x) \stackrel{x}{\sim} 2\overline{F}(x)$$

- $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{H}$ (補題 B.1, 例 B.1)
- $F \in \mathcal{S} \iff \overline{F^{*n}}(x) \stackrel{x}{\sim} n\overline{F}(x) \ (\exists n \geq 2)$ (定理 B.1)
- 裾の加法性: (Jelenković and Lazar, 1998, Lemma 10)

$$F \in \mathcal{S}, \overline{F}_i(x) \stackrel{x}{\sim} c_i \overline{F}(x) \ (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$\implies \overline{F_1^{*n_1} * \dots * F_k^{*n_k}}(x) \stackrel{x}{\sim} \sum_{i=1}^k n_i c_i \overline{F}(x)$$

$$\text{さらに, } 0 < \sum_{i=1}^k n_i c_i < \infty \text{ ならば } F_1^{*n_1} * \dots * F_k^{*n_k} \in \mathcal{S}$$

裾の加法性から数学的に美しい結果を生み出される!!

- Kesten's Bound (Foss et al., 2011, Theorem 3.34):

$$F \in \mathcal{S} \implies \forall \varepsilon > 0, \exists c(\varepsilon) \in (0, \infty) \text{ s.t.} \\ \overline{F^{*n}}(x) \leq c(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n \overline{F}(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

- 劣指数的な確率変数のランダム和 (Foss et al., 2011, Theorem 3.37):

- $\{X_i; i = 1, 2, \dots\}$: 独立同一分布する確率変数列
- $\tau: \{X_i; i = 1, 2, \dots\}$ とは独立な非負整数値確率変数, $E[\tau] < \infty$

$$X_1 \in \mathcal{S}, E[(1 + \delta)^\tau] < \infty \implies P\left(\sum_{i=1}^{\tau} X_i > x\right) \stackrel{x}{\sim} E[\tau]P(X_1 > x)$$

※ 裾の加法性, Kesten's Bound および優収束定理を用いて証明可

- $F \in \mathcal{S} \not\Rightarrow F_e \in \mathcal{S}$ (Foss et al., 2011, Section 3.8)
 - ただし, $F \in \mathcal{L} \Rightarrow F_e \in \mathcal{L}$ (ロピタルの定理より証明可)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_e(x+1)}{\overline{F}_e(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{x+1}^{\infty} \overline{F}(y) dy}{\int_x^{\infty} \overline{F}(y) dy} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = 1$$

- 平衡分布も劣指数的になるようなサブクラス $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ がある

$$F \in \mathcal{S}^* \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} dy = 2 \int_0^{\infty} \overline{F}(x) dx$$

- 待ち行列などの確率モデルの劣指数漸近特性は, モデルパラメータである何らかの分布(サービス時間など)の平衡分布と関連付けられるが, その導出にあたり, その分布自身の劣指数性を仮定すると, 解析しやすかったため, 導入されたものと思われる

3.4 劣指数分布の例

- Pareto 分布:

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{\gamma}{x + \gamma} \right)^\alpha, \quad \alpha, \gamma > 0$$

- Weibull 分布:

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, c > 0$$

- Lognormal 分布:

$$\overline{F}(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-(\log y - \mu)^2 / (2\sigma)^2} dy, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

- Almost exponential 分布:

$$\overline{F}(x) = e^{-x(\log x)^{-\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

平均が有限である場合には, $\mathcal{S}^*$ にも属する

3.5 正則変動する分布族

定義 3.4 分布関数 F は“指数 $-\alpha$ (≤ 0) で正則変動する (regularly varying with index $-\alpha$)” ($F \in \mathcal{R}(-\alpha)$ と書く)
 $\iff \overline{F}(tx) \overset{x}{\sim} t^\alpha \overline{F}(x) \ (\forall t > 0)$

- $F \in \mathcal{R}(-\alpha) \iff$ 緩慢変動 (slowly varying) する関数 L を用いて
$$F(x) = 1 - x^{-\alpha} L(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$
- L が緩慢変動する $\iff L \in \mathcal{R}(0) \iff L(tx) \overset{x}{\sim} L(x) \ (\forall t > 0)$
 - (例) $L(x) = c(\log x)^\alpha$ (α : 任意の実数, $c > 0$)
- $\mathcal{R} := \cup_{\alpha \geq 0} \mathcal{R}(-\alpha) \subset \mathcal{S}$
 - 代表例は, パレート分布
- 分布族 $\mathcal{R}$ は, タウバー型の定理 (積分変換系の漸近挙動から元の関数の漸近特性を導く) でよく用いられる

3.6 高次長裾的な分布族

定義 3.5 確率変数 X とその分布関数 F_X が

“ p 次長裾的 (p th-order long-tailed)” ($X, F_X \in \mathcal{L}^p$ と書く)

$$\iff X^{1/p} \in \mathcal{L}$$

$$\iff \overline{F_X}(x + \xi x^{1-1/p}) \stackrel{x}{\sim} \overline{F_X}(x), \quad \exists \xi \text{ (thus } \forall \xi) \in \mathbb{R}$$

- p 次長裾的な分布の例: ワイブル分布 ($\exp\{-o(x^{1/p})\}$ の裾を持つ),
対数正規分布, パレート分布など
- $\mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2}$ ($p_2 < p_1$)
- $F \in \mathcal{R} \implies F \in \mathcal{L}^{1/\varepsilon}$ ($\forall \varepsilon > 0$), i.e., $F \in \mathcal{L}^\infty := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{L}^{1/\varepsilon}$
 - 正則変動する分布は無限次長裾的
- 高次長裾性は, 劣指数性とは無関係: $F \in \mathcal{L}^p \not\Rightarrow F \in \mathcal{S}$

3.7 裾の重い分布のまとめ

- 裾の重い分布族 $\mathcal{H}$

$$F \in \mathcal{H} \iff \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0$$

- 裾の長い分布族 $\mathcal{L}^p$ ($p \geq 1$)

$$F \in \mathcal{L}^p \iff \overline{F}(x + \xi x^{1-1/p}) \stackrel{x}{\sim} \overline{F}(x), \quad \exists \xi \text{ (thus } \forall \xi) \in \mathbb{R}$$

- 劣指数分布族 $\mathcal{S}$

$$F \in \mathcal{S} \iff \overline{F^{*2}}(x) \stackrel{x}{\sim} 2\overline{F}(x)$$

- 正則変動する分布族 $\mathcal{R}$

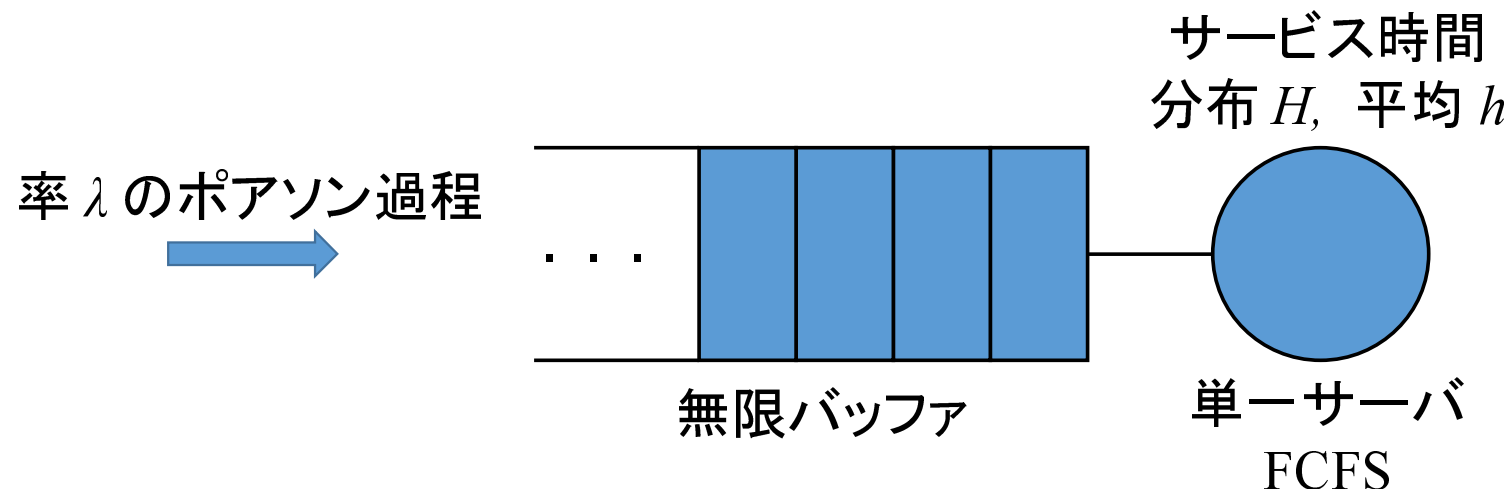
$$F \in \mathcal{R} \iff \exists \alpha \geq 0 \text{ s.t. } \overline{F}(tx) \stackrel{x}{\sim} t^\alpha \overline{F}(x), \quad \forall t > 0$$

- 包含関係: $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}$ ($p > 1$)

4 M/GI/1 待ち行列

4.1 モデルの説明

- 単一サーバ
- バッファ (待合室) 容量は無限
- 到着過程: 到着率 λ のポアソン過程
- サービス時間: 独立で同一分布 H に従う. 平均 $h \in (0, \infty)$
- サービス規律: 先着順 (FCFS: First-Come-First-Served)
- トラヒック強度: $\rho \triangleq \lambda h < 1$ (安定条件)



4.2 系内仕事量

- $v(t, x)$: 時刻 t で系内仕事量が x 以下である確率

微小区間 $(t, t + \Delta t]$ での状態変化を考慮すると,

$$\begin{aligned} v(t + \Delta t, x) &= v(t, x + \Delta t)(1 - \lambda\Delta t) \\ &\quad + \lambda\Delta t \int_{0-}^x H(x - y + \Delta t) d_y v(t, y) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

両辺を Δt で割って整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{v(t + \Delta t, x) - v(t, x)}{\Delta t} &+ \frac{v(t, x) - v(t, x + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= -\lambda v(t, x + \Delta t) + \lambda \int_{0-}^x H(x - y + \Delta t) d_y v(t, y) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ると,

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) = -\lambda v(t, x) + \lambda \int_{0-}^x H(x - y) d_y v(t, y) \quad (2)$$

- $v(x)$: 定常状態において系内仕事量が x 以下である確率

定常状態では, 系内仕事量の分布は時間変化しない

$$\implies \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) = 0$$

式(2)の両辺に対して, $t \rightarrow \infty$ の極限を取る

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} v(x) &= -\lambda v(x) + \lambda \int_{0-}^x H(x-y) dv(y) \\ &= \lambda h \int_{0-}^x \frac{1 - H(x-y)}{h} dv(y) \\ &= \rho \int_{0-}^x H'_e(x-y) dv(y), \quad x > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ただし, H_e はサービス時間の平衡分布 (残余サービス時間分布)

$$H_e(x) = \frac{1}{h} \int_{0-}^x [1 - H(y)] dy, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- $\tilde{v}(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dv(x),$
- $\tilde{H}(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dH(x)$
- $\tilde{H}_e(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dH_e(x) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} H'_e(x) dx = \frac{1 - \tilde{H}(s)}{sh}$

式(3)と $v(0) = 1 - \rho$ (リトルの公式より) を用いて, $\tilde{v}(s)$ を計算

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(s) &= v(0) + \int_{0+}^{\infty} e^{-sx} v'(x) dx \\
&= 1 - \rho + \rho \int_{0+}^{\infty} e^{-sx} dx \int_{0-}^x H'_e(x - y) dv(y) \\
&= 1 - \rho + \rho \int_{0-}^{\infty} e^{-sy} dv(y) \int_y^{\infty} e^{-s(x-y)} H'_e(x - y) dx \\
&= 1 - \rho + \rho \tilde{v}(s) \tilde{H}_e(s)
\end{aligned}$$

$$\tilde{v}(s) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho \tilde{H}_e(s)} = (1 - \rho) \sum_{m=0}^{\infty} \left[\rho \tilde{H}_e(s) \right]^m$$

これを逆変換すると,

$$v(x) = 1 - \rho + (1 - \rho) \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m H_e^{*m}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

分布の畳込みを使って表現されており, 劣指数分布と相性が良い

4.3 系内仕事量, 待ち時間, 滞在時間分布の関係

- S : 客1人分のサービス時間
- W : 定常状態での任意客の待ち時間
- T : 定常状態での任意客の系内滞在時間: $T = W + S$ (分布の意味で)

PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) より,

$$\begin{aligned}\text{待ち時間 } W &= \text{到着時の系内仕事量} \\ &= \text{定常状態での系内仕事量 } V\end{aligned}$$

系内仕事量, 待ち時間, 滞在時間分布の裾確率

$$P(W > x) = P(V > x) = (1 - \rho) \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \overline{H_e^{*m}}(x)$$

$$P(T > x) = P(W + S > x) = (1 - \rho) \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \overline{H_e^{*m} * H}(x)$$

4.4 系内仕事量, 待ち時間の劣指数的漸近特性

仮定

残余サービス時間分布が劣指数的, すなわち $H_e \in \mathcal{S}$

$$P(W > x) = P(V > x) = (1 - \rho) \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \overline{H_e^{*m}}(x)$$

$$\stackrel{x}{\sim} (1 - \rho) \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m m \overline{H_e}(x)$$

裾の加法性

$$= \frac{\rho}{1 - \rho} \overline{H_e}(x)$$

結果は正しいが, 導出過程には誤りがある

⇐ 無限和と極限の順序は無条件には入れ替えられない

- $\{S_e, S_e^{(i)}; i = 1, 2, \dots\}$: 独立で同一な分布 H_e に従う確率変数列

$$P(S_e \leq x) = H_e(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- $\tau: \{S_e, S_e^{(i)}; i = 1, 2, \dots\}$ と独立な確率変数

$$P(\tau = m) = (1 - \rho)\rho^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$E[\tau] = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (5)$$

導入した確率変数を用いると

$$\begin{aligned} P(W > x) &= P(V > x) = (1 - \rho) \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \overline{H_e^{*m}}(x) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P(\tau = m) P(S_e^{(1)} + \dots + S_e^{(m)} > x) \\ &= P(S_e^{(1)} + \dots + S_e^{(\tau)} > x) \end{aligned}$$

- $\{X, X_i; i = 1, 2, \dots\}$: 独立同一分布する確率変数列
- τ : $\{X, X_i; i = 1, 2, \dots\}$ とは独立な非負整数値確率変数, $E[\tau] < \infty$

$$X \in \mathcal{S}, E[(1 + \delta)^\tau] < \infty \implies P\left(\sum_{i=1}^{\tau} X_i > x\right) \overset{x}{\sim} E[\tau]P(X > x)$$

上の結果を用いると

$$\begin{aligned} P(W > x) &= P(V > x) = P(S_e^{(1)} + \dots + S_e^{(\tau)} > x) \\ &\overset{x}{\sim} E[\tau]P(S_e > x) \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \overline{H_e}(x) \end{aligned}$$

系内仕事量 V と待ち時間 W の裾が, 劣指数的な残余サービス時間の裾の定数倍 $\implies V, W \in \mathcal{S}$

4.5 滞在時間分布の劣指数的漸近特性

1. $P(T > x) = P(W + S > x)$
2. $H_e \in \mathcal{S} \implies P(W > x) \stackrel{x}{\sim} \frac{\rho}{1-\rho} \overline{H_e}(x) \implies W \in \mathcal{S}$
3. $H_e \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \implies \overline{H}(x) = o(\overline{H_e}(x)) \implies P(S > x) = o(P(W > x))$
4. 裾の加法性:
$$W \in \mathcal{S}, P(S > x) = o(P(W > x)) \implies P(W + S > x) \stackrel{x}{\sim} P(W > x)$$

上の事実を総合すると,

定理 4.1 M/GI/1 待ち行列において, 残余サービス時間分布 H_e が劣指数的 ($H_e \in \mathcal{S}$)

$$\implies P(T > x) \stackrel{x}{\sim} P(W > x) \sim P(V > x) \stackrel{x}{\sim} \frac{\rho}{1-\rho} \overline{H_e}(x)$$

上の漸近公式は, GI/GI/1 待ち行列に対しても成立 (Pakes 1975)

4.6 系内客数分布と系内滞在時間分布の関係

- PASTA $\implies$ 任意時点と到着直前での系内客数分布が一致
- 到着によって系内客数が $k \rightarrow k + 1$ となる時点と
離脱によって系内客数が $k + 1 \rightarrow k$ となる時点が一对一に対応
 $\implies$ 到着直前と離脱直後の系内客数分布が一致
- FCFS + 単一サーバ $\implies$ FIFO (First-In-First-Out)
 $\implies$ 離脱直後の系内客数 = 離脱客の系内滞在時間中の到着数

リトルの公式分布版 (Distributional Little's Law)

$$L = N(T)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L : \text{定常状態での系内客数} \\ T : \text{系内滞在時間} \\ N(t) : (0, t] \text{での到着数} \end{array} \right.$$

※ GI/GI/1 待ち行列でも成り立つ (Haji and Newell 1971)

4.7 系内滞在時間における到着数

命題 4.1 (Jelenković et al. 2004)

$$\sqrt{T} \in \mathcal{L} \implies P(N(T) > k) \stackrel{k}{\sim} P(\lambda T > k) \quad (6)$$

- 到着時間間隔が一定 (到着率の逆数 $1/\lambda$) $\implies$ (6) は無条件で成立
- 到着時間間隔 X_k ($k = 1, 2, \dots$) は i.i.d. な指数分布に従うが、
中心極限定理より、到着時間間隔が一定の場合と同様のことが言える

$$\text{中心極限定理} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_k - k/\lambda}{\sqrt{k}} \sim N(0, \lambda^{-2})$$

- ただし、中心極限定理の効果が支配的になるには、 $\sqrt{T} \in \mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ が必要

4.8 系内客数分布の漸近解析結果

1. リトルの公式分布版: $L = N(T)$
2. 滞在時間分布の漸近公式:

$$H_e \in \mathcal{S} \implies P(T > x) \stackrel{x}{\sim} \frac{\rho}{1 - \rho} \overline{H_e}(x)$$

$$\implies \boxed{H_e \in \mathcal{L}^2 \iff T \in \mathcal{L}^2}$$

3. 系内滞在時間における到着数分布の漸近公式:

$$T \in \mathcal{L}^2 \implies P(N(T) > k) \stackrel{k}{\sim} P(\lambda T > k)$$

定理 4.2 $H_e \in \mathcal{S}$ かつ $H_e \in \mathcal{L}^2$ のとき,

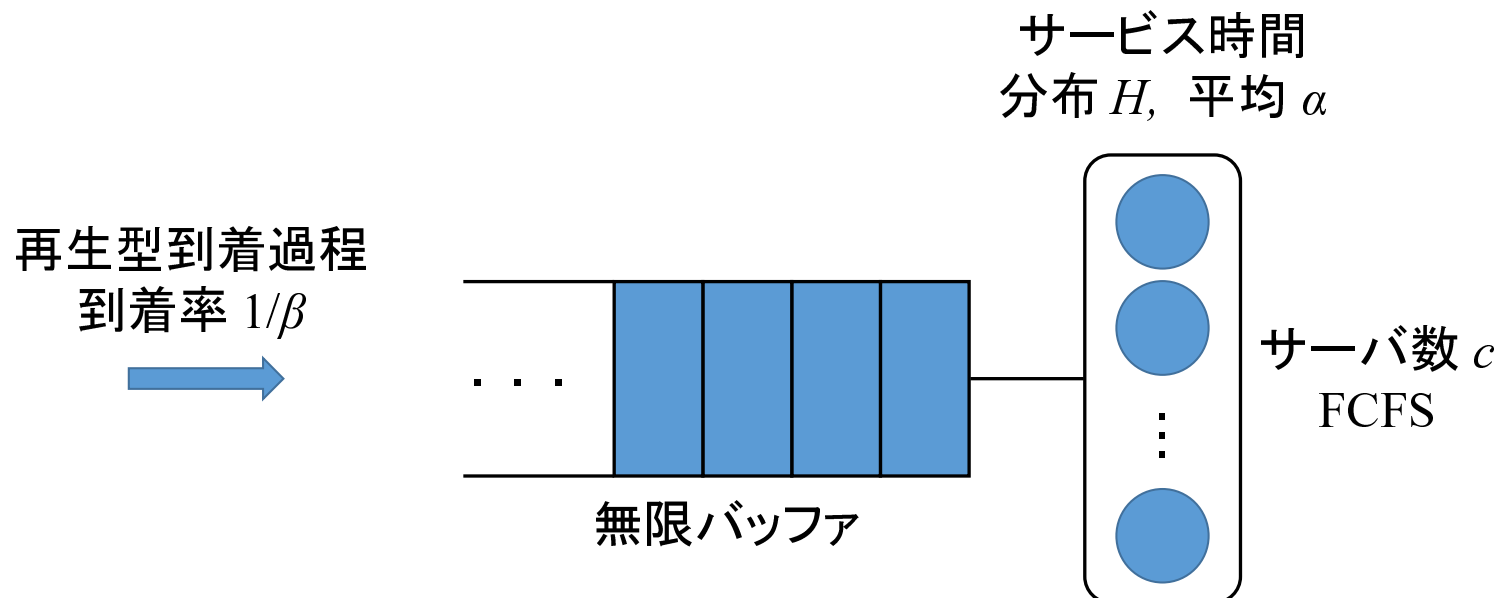
$$P(L > k) \stackrel{k}{\sim} P(\lambda T > k) \stackrel{k}{\sim} \frac{\rho}{1 - \rho} \overline{H_e}(k/\lambda) \quad (7)$$

※ 式(7)はGI/GI/1 待ち行列でも成立 (Asmussen et al. 1999)

5 GI/GI/ c

5.1 モデルの説明

- サーバ数 c
- バッファ (待合室) 容量は無限
- 到着時間間隔: 独立で同一に分布する. 平均 $\alpha \in (0, \infty)$
- サービス時間: 独立で同一分布 H に従う. 平均 $\beta \in (0, \infty)$
- サービス規律: 先着順 (FCFS: First-Come-First-Served)
- トラヒック強度: $\rho \triangleq \beta/\alpha < c$ (安定条件)



5.2 待ち時間分布の漸近公式 (結果の紹介)

定理 5.1 (Foss and Korshunov 2014, Theorem 1.1)

$c = 2$, $\rho < 1$ ($\beta < \alpha$), $H_e \in \mathcal{S}$ のとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W > x) \stackrel{x}{\sim} & \frac{\rho^2}{2 - \rho} \left[\{ \overline{H}_e(x) \}^2 \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \overline{H}_e(x + \alpha y) \overline{F}(x + (\alpha - \beta)y) dy \right] \end{aligned}$$

さらに, $H \in \mathcal{R}(-\gamma)$ ($\gamma > 1$) であるならば,

$$\mathbf{P}(W > x) \stackrel{x}{\sim} \xi \{ \overline{H}_e(x) \}^2$$

$$\text{ただし, } \xi = \frac{\rho^2}{2 - \rho} \left[1 + \frac{\rho}{\gamma - 1} \int_0^\infty \frac{dz}{(1 + z)^{\gamma-1} \{1 + z(1 - \rho)\}^\gamma} \right]$$

定理 5.2 (Foss and Korshunov 2014, Theorem 1.2)

$c = 2$, $1 < \rho < 2$ ($\beta < 2\alpha$), $H \in \mathcal{S}$, $H_e \in \mathcal{S}$ のとき,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(W > x)}{\overline{H}_e(2x)} \leq \frac{\rho}{2 - \rho}$$
$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(W > x)}{\overline{H}_e((\rho + \delta)(\rho - 1)x)} \geq \frac{\rho}{2 - \rho}, \quad \text{for any fixed } \delta > 0$$

さらに, $H_e \in \mathcal{R}$ であるならば,

$$P(W > x) \stackrel{x}{\sim} \frac{\rho}{2 - \rho} \overline{H}_e \left(\frac{\rho}{\rho - 1} x \right)$$

残余サービス時間分布が正則変動するという条件の下でしか,
正確な漸近公式が導かれていない

定理 5.3 (Foss and Korshunov 2014, Theorem 1.2)

$k \in \{0, 1, \dots, c-1\}, \delta \in (0, 1)$

1. $\rho < k$

$$P(W > x) \geq \frac{\rho^{c-k} + o(1)}{(c-k)!} \left[\overline{H_e} \left(\frac{\rho + \delta}{\rho - k} x \right) \right]^{c-k} \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (8)$$

2. $\rho > k+1, H_e \in \mathcal{S}$

$$P(W > x) \leq \binom{c}{k} \left(\frac{(k+1)\rho}{k+1-\rho} + o(1) \right)^{s-k} \\ \times \left[\overline{H_e} ((1-\delta)x) \right]^{c-k} \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (9)$$

サーバ数が3以上の場合には、まだ正確な漸近公式が導かれていない

6 GI/G/1型マルコフ連鎖

6.1 定義と仮定

$$P = \begin{pmatrix} B(0) & B(1) & B(2) & B(3) & \cdots \\ B(-1) & A(0) & A(1) & A(2) & \cdots \\ B(-2) & A(-1) & A(0) & A(1) & \cdots \\ B(-3) & A(-2) & A(-1) & A(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. P は既約
2. $A := \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(k)$ は既約な確率行列
 $\implies A$ は唯一の定常確率ベクトル π を持つ
3. $\sigma := \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k A(k) e < 0$ (e : 全ての成分が1の列ベクトル)
4. $\sum_{k=1}^{\infty} k B(k) e < \infty$; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| A(k) e < \infty$ ($\implies |\sigma| < \infty$)

条件1-4が成立 $\implies P$ は唯一の定常確率ベクトル x を持つ

6.2 定常分布の構成

定常分布ベクトル $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(1), \dots)$ は次のように構成される

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{R}_0(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \boldsymbol{x}(l)\boldsymbol{R}(k-l), \quad k \geq 1$$

$$\boldsymbol{R}_0(k) = \left[\boldsymbol{B}(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{B}(k+m)\boldsymbol{L}(m) \right] (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}, \quad k \geq 1$$

$$\boldsymbol{R}(k) = \left[\boldsymbol{A}(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{A}(k+m)\boldsymbol{L}(m) \right] (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}, \quad k \geq 1$$

$$\boldsymbol{L}(k) = \sum_{n=1}^k \boldsymbol{G}^{*n}(k) \quad (\text{“} *n \text{”は} n \text{重畳み込みを表す}), \quad k \geq 1$$

$$\boldsymbol{G}(k) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}(0))^{-1} \boldsymbol{\Phi}(-k), \quad k \geq 1$$

※ $\{\boldsymbol{\Phi}(k); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は次頁で定義

$\{\Phi(k); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は次式を満たす最小非負解

$$\Phi(k) = A(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi(k+m)(I - \Phi(0))^{-1} \Phi(-m), \quad k \geq 0$$

$$\Phi(-k) = A(-k) + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi(m)(I - \Phi(0))^{-1} \Phi(-k-m), \quad k \geq 0$$

$x(0)$ は次のように構成される

- $x(0) = c^{-1} \nu$
- $\nu \geq 0, \nu e = 1, \nu \left[B(0) + \sum_{k=1}^{\infty} B(k) L(k) \right] = \nu$
- $c = \nu \sum_{k=1}^{\infty} R_0(k) \left[I - \sum_{k=1}^{\infty} R(k) \right]^{-1} e$

定常分布の数値計算は困難 $\implies$ 漸近解析に意義がある

6.3 劣指数漸近公式

- $\overline{\overline{A}}(k) = \sum_{l=k+1}^{\infty} \overline{A}(l), \quad \overline{A}(k) = \sum_{l=k+1}^{\infty} A(l) \quad (k = 0, 1, \dots)$
- $\overline{\overline{B}}(k) = \sum_{l=k+1}^{\infty} \overline{B}(l), \quad \overline{A}(k) = \sum_{l=k+1}^{\infty} A(l) \quad (k = 0, 1, \dots)$

定理 6.1 (Masuyama 2013, Theorem 3.1)

次式をみたす $Y \in \mathcal{S}$ が存在

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overline{\overline{A}}(k)e}{P(Y > k)} = c_A \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overline{\overline{B}}(k)e}{P(Y > k)} = c_B, \quad c_A \neq 0 \text{ or } c_B \neq 0$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\overline{x}(k)}{P(Y > k)} = \frac{x(0)c_B + \overline{x}(0)c_A}{-\sigma} \pi > 0$$

おわり

Appendix A 裾の長い分布族

補題 A.1 (Foss et al. 2011, Lemma 2.17) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$

補題 A.1 の証明 $F \in \mathcal{L}$ より, $y \in [0, 1]$ を満たす y に関して一様に,
 $\overline{F}(x+y) \stackrel{x}{\sim} \overline{F}(x)$ が成り立つ. よって, 任意に固定された $\varepsilon > 0$ に対して,
ある $x_0 > 0$ が存在し,

$$\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} \geq e^{-\varepsilon/2}, \quad \forall x \geq x_0, \forall y \in [0, 1]$$

ここで, $n = \lfloor x - x_0 \rfloor$, $y = x - x_0 - n \in [0, 1]$ とおくと,

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} e^{\varepsilon n} \overline{F}(x_0 + n + y) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} e^{\varepsilon n} e^{-\varepsilon(n+1)/2} \overline{F}(x_0) = \infty \end{aligned}$$

□

例 **A.1** ($F \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$) 次式を満たす分布関数 F を考える.

$$\overline{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mathbb{1}(2^{n-1} - 1 < x \leq 2^n - 1)$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \exp\{\varepsilon(2^{n-1} - 1)\} \overline{F}(2^n - 1) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \exp\{\varepsilon(2^{n-1} - 1)\} 2^{-n} = \infty \end{aligned}$$

したがって, $F \in \mathcal{H}$. 一方,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+1)}{\overline{F}(x)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(2^{n-1} + 1)}{\overline{F}(2^{n-1})} = \frac{1}{2}$$

であるので, $\overline{F}(x+1) \stackrel{x}{\sim} \overline{F}(x)$ は成立せず, $F \notin \mathcal{L}$. □

補題 A.2 (Foss et al. 2011, Lemma 2.44) F, G を $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ 上の分布関数とし, $\overline{F}(x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}_+$) かつ $G(0) < 1$ を満たすものとする. さらに, $\limsup_{x \rightarrow \infty} \overline{G}(x)/\overline{F}(x) < \infty$ かつ

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F * G}(x)}{\overline{F}(x) + \overline{G}(x)} = 1 \quad (10)$$

が成り立つとき, $F \in \mathcal{L}$.

補題 A.2 の証明 畳み込みの定義と補分布の定義より,

$$\overline{F * G}(x) = \int_0^x \overline{F}(x - y) dG(y) + \overline{G}(x) \quad (11)$$

が成り立つ. また, 式(10)より次式を得る.

$$\overline{F * G}(x) \leq \overline{F}(x) + \overline{G}(x) + o(\overline{F}(x) + \overline{G}(x)) \quad (12)$$

したがって, 式(11), (12), ならびに $\limsup_{x \rightarrow \infty} \overline{G}(x)/\overline{F}(x) < \infty$ から,

$$\int_0^x \overline{F}(x-y) dG(y) \leq \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x) + \overline{G}(x)) = \overline{F}(x) + o(\overline{F}(x)) \quad (13)$$

を得る. さらに, 式(13)を用いると,

$$\begin{aligned} & \int_0^x (\overline{F}(x-y) - \overline{F}(x)) dG(y) \\ &= \int_0^x \overline{F}(x-y) dG(y) - \overline{F}(x) + \overline{F}(x) \overline{G}(x) \\ &= o(\overline{F}(x)) + \overline{F}(x) \overline{G}(x) = o(\overline{F}(x)) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, $\overline{G}(a) > 0$ となるような $a > 0$ を選ぶと, $x > a$ のとき, $(\overline{F}(x-a) - \overline{F}(x))(G(x) - G(a))$ は, 式(14)の左辺を越えることはなく,

$$(\overline{F}(x-a) - \overline{F}(x))(G(x) - G(a)) = o(\overline{F}(x))$$

となる. よって, $\overline{F}(x-a) \overset{x}{\sim} \overline{F}(x)$ が成り立ち, $F \in \mathcal{L}$.

□

Appendix B 劣指数分布族

補題 B.1 (Foss et al. (2011), Lemma 3.2) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$

補題 B.1 の証明 $G = F$ とおくと, $\overline{F * G}(x) \stackrel{x}{\sim} \overline{F}(x) + \overline{G}(x)$. よって, 補題 A.2 より, $F \in \mathcal{L}$. □

例 B.1 ($F \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{S}$) 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\overline{F}(x) = \overline{F}(x_{n-1}) \exp \left(-\frac{x - x_{n-1}}{n} \right), \quad x \in [x_{n-1}, x_n)$$

ただし, x_n ($n = 0, 1, \dots$) は次式で与えられる

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{2n}{\overline{F}(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}$$

定理 B.1 (Foss et al. 2011, Theorem 3.21)

$$\overline{F}(x) > 0 \ (\forall x \in \mathbb{R}_+) \text{ かつ } \overline{F^{*n}}(x) \stackrel{x}{\sim} n\overline{F}(x) \ (\exists n \geq 2) \iff F \in \mathcal{S}$$

定理 B.1 の証明 まず, $G = F^{*(n-1)}$ とおく. 畳み込みの定義より,

$$\overline{G}(x) = \int_0^x \overline{F^{*(n-2)}}(x-y) dF(y) + \overline{F}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

が成り立つ. よって, $G = F^{*(n-1)}$, 定理 2.1 および $\overline{F} \leq \overline{G}$ より,

$$\begin{aligned} \overline{F^{*n}}(x) &= \overline{F * G}(x) \\ &\geq (1 + o(1))(\overline{F}(x) + \overline{G}(x)) \\ &\geq \overline{F}(x) + \overline{G}(x) + o(\overline{F}(x)) \end{aligned}$$

となる. 仮定より, $\overline{F^{*n}}(x) = n\overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$ であるので, 上の不等式を組みわせると, 次式を得る.

$$\overline{G}(x) \leq (n-1)\overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$$

これに加え, 系2.1より, $\overline{G}(x) \geq (n-1)\overline{F}(x) + o(\overline{F}(x))$ となるので, 結局, $F^{*(n-1)}(x) \stackrel{x}{\sim} (n-1)\overline{F}(x)$ が成り立つ. 以上の議論を帰納的に繰り返せば, $F^{*2}(x) \stackrel{x}{\sim} 2\overline{F}(x)$ を得る. □

Appendix References

- Asmussen, S., Klüppelberg, C., Sigman, K., 1999. Sampling at subexponential times, with queueing applications. *Stochastic Processes and their Applications* 79, 265–286.
- Foss, S., Korshunov, D., 2014. On large delay in multi-server queues with heavy tails. *Mathematics of Operations Research* 37, 201–218.
- Foss, S., Korshunov, D., Zachary, S., 2011. *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*. Springer, New York.
- Haji, R., Newell, G. F., 1971. A relation between stationary queue and waiting time distributions. *Journal of Applied Probability* 8, 617–620.
- Jelenković, P. R., Lazar, A. A., 1998. Subexponential asymptotics of

- a Markov-modulated random walk with queueing applications. *Journal of Applied Probability* 35, 325–347.
- Jelenković, P. R., Momčilović, P., Zwart, B., 2004. Reduced load equivalence under subexponentiality. *Queueing Systems* 46, 97–112.
- Masuyama, H., 2013. A sufficient condition for subexponential asymptotics of GI/G/1-type Markov chains with queueing applications, preprint arXiv:1310.4590.
- Pakes, A. G., 1975. On the tails of waiting-time distributions. *Journal of Applied Probability* 12, 555–564.