

# コールセンターのモデル化

## ー待ち行列の視点からー

---

群馬大学大学院工学研究科

河西 憲一（かわにしけんいち）

E-mail: [kawanisi@cs.gunma-u.ac.jp](mailto:kawanisi@cs.gunma-u.ac.jp)

# What is コールセンター？

- 電話対応をビジネスとして提供する集団

“any group whose principal business is talking on the telephone to customers or prospects,” V. Mehrotra (1997)

- 電話を通じてサービスを提供する資源

“a set of resources which enable the delivery of service via the telephone,” G. Koole and A. Mandelbaum (2001)

ヘルプデスク、カスタマーセンター、  
テレマーケティング、etc.

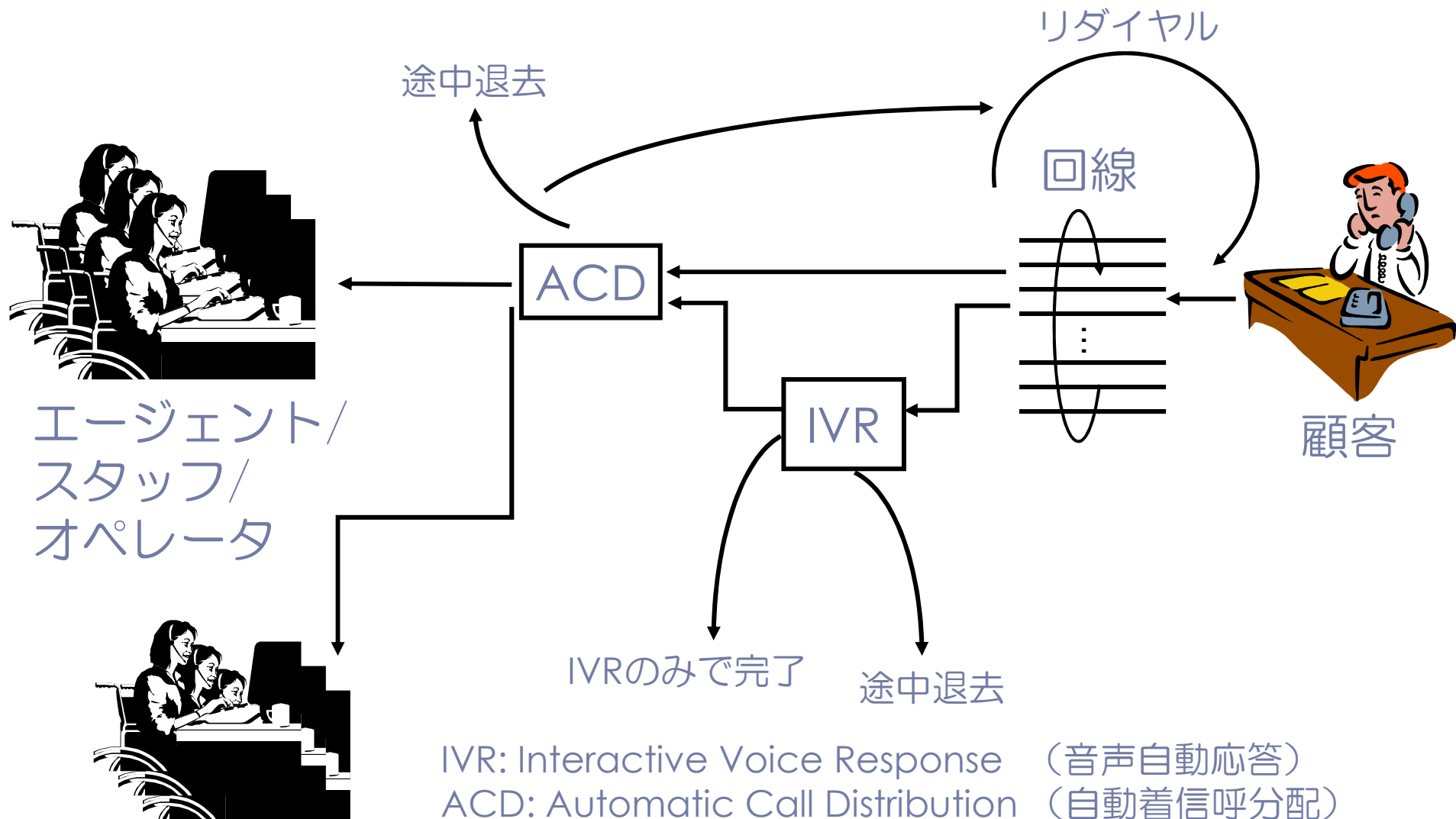
参考 R. Stollitz (2003)

- 人にサービスを提供するシステム

# コールセンターの特徴づけ

- 分散化
  - 1 拠点に集約ではなく分散化
  - 業務内容によりアウトソース
- インバウンド/アウトバウンド
  - 顧客から/顧客へCall ⇔ Inbound / Outbound
  - 混在することもあり(Call Blending)
- チャネルの多様化
  - Telephone +  $\alpha$  (FAX, E-mail, Web, Chat)  
(コンタクトセンター)

# (インバウンド) コールセンター

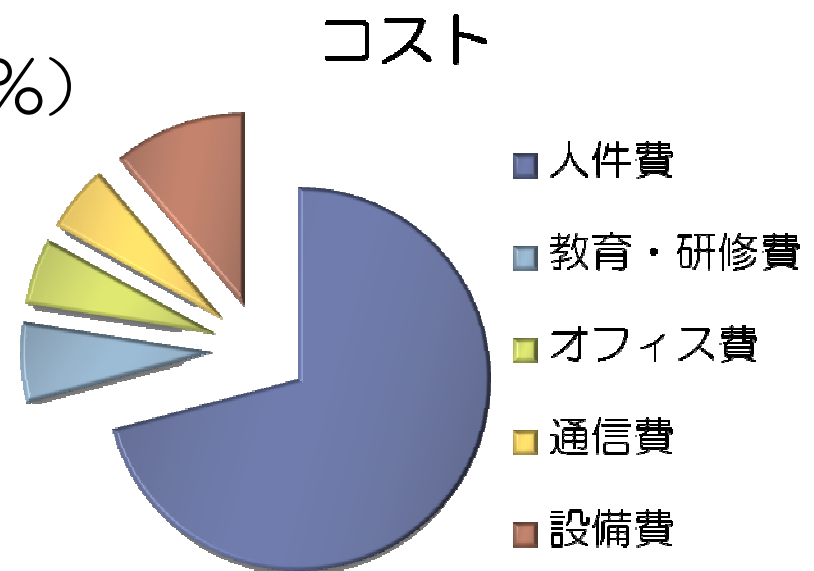


# コールセンターの資源とコスト

- 資源は人（エージェント）なり
- 通信設備も重要

- コールセンターの主なコスト

- 人件費
  - 教育・研修費
  - 通信費・設備費（～15%）
- （60～70%）



参考 R. Stolletz (2003)

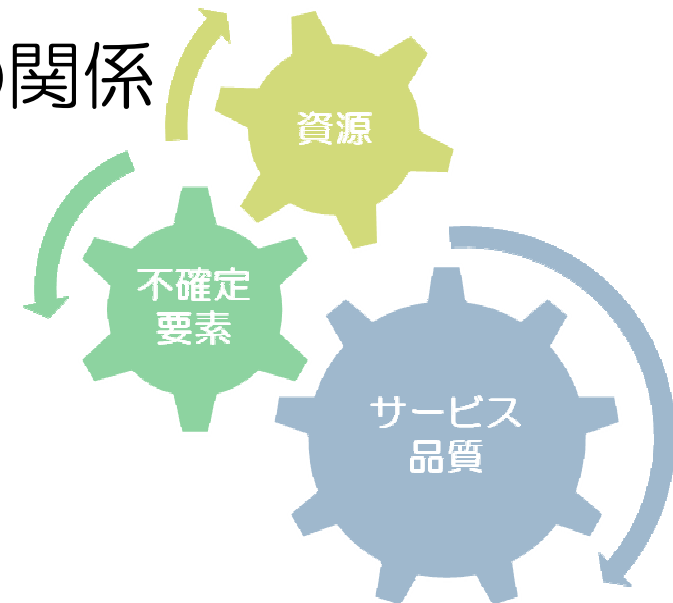
# 経営上の課題

- 顧客満足第一
  - 80/20基準（20秒以内応答を80%以上）
- 収益も大切
  - Revenue applicationなら、途中退去率は数%以下に
- 適切な資源の配分・配置は？
  - エージェントの人数
  - 勤務シフト（スケジューリング）
  - 通信回線数



# 待ち行列理論を使ってわかること

- 資源とサービス品質の関係（トレードオフ）
  - 例1）エージェントを一人増やすと待ち率が0%減る
  - 例2）1回線増やすと  
損失率は△%減る  
待ち時間は■秒増える
- 不確定要素とサービス品質の関係
  - 例1）損失率はサービス時間の「ゆらぎ」には依存しない
  - 例2）待ち時間は「ゆらぎ」が大きいほど長い



# コールセンターの不確定要素

- 発信数
  - 一般には非定常（時間帯による、曜日による）
  - 集中することもある（イベント、キャンペーン）
- サービス時間
  - 要求内容により変動する（問い合わせくクレーム）
- 途中退去
  - 客は辛抱強くはない
  - 許容待ち時間は客依存（客間での独立性は成立しそう）
- リダイアル
  - つながるまで発信する客もいれば、あきらめの早い客も

# 「確率の理論と電話の通話」 Erlang (1909)

- 電話の接続要求（呼）の発生回数 $N$ は Poissonの分布法則に従う

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

ただし、 $\lambda > 0$ は発生率を表すパラメータ

- 他の例
  - 馬に蹴られて死亡するプロシア兵士（年間あたり）  
Bortkiewicz (1898)
  - $^{210}\text{Po}$ の $\alpha$ 粒子（ヘリウム原子核）の1/8分あたりの個数  
Rutherford and Geiger (1910)

## $\beta$ 線のカウント数

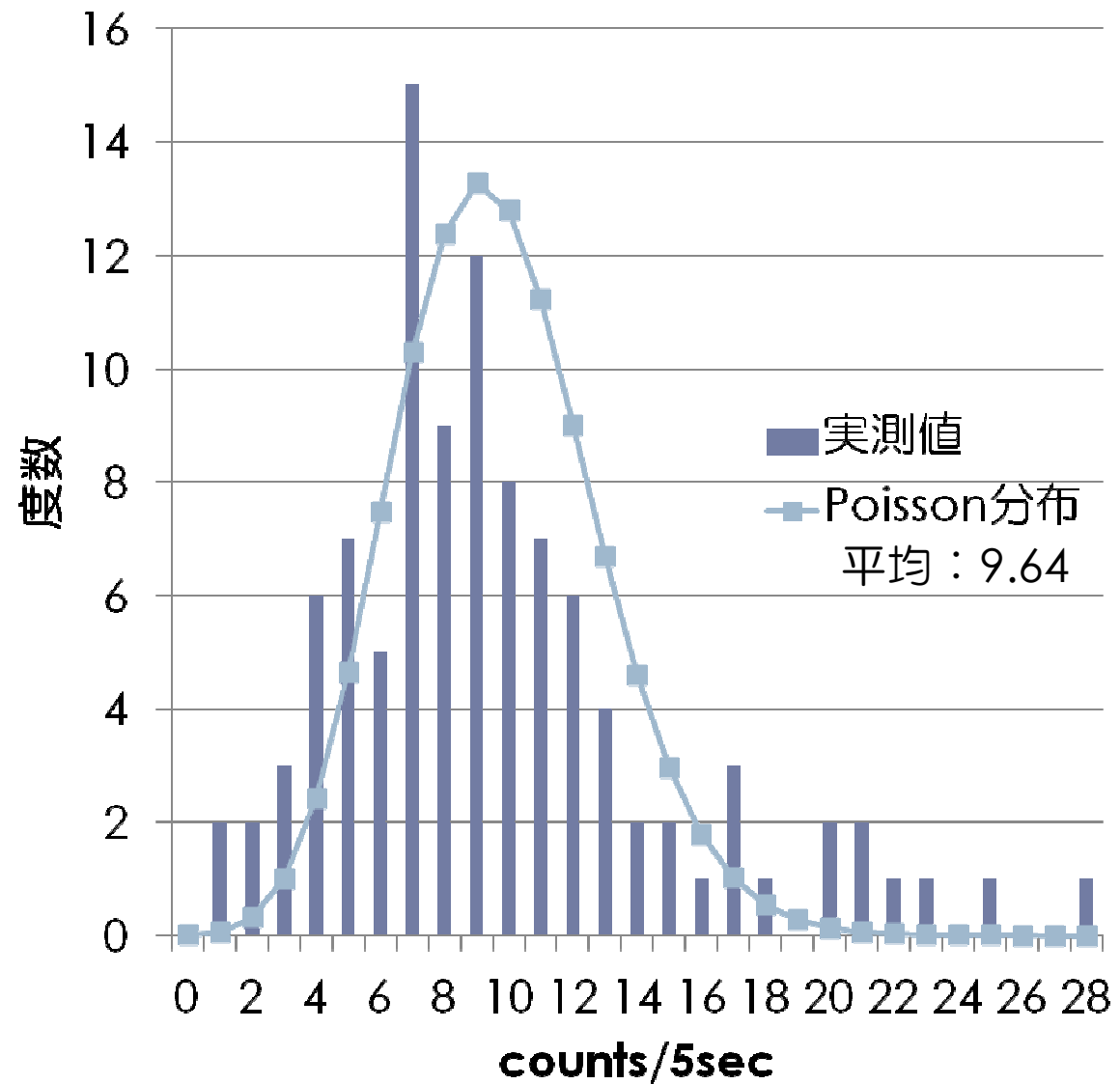
線源： $^{90}\text{Sr}$ - $^{90}\text{Y}$ （放射平衡にある $^{90}\text{Sr}$ と $^{90}\text{Y}$ ）の密封線源

測定器：ガイガー計数装置

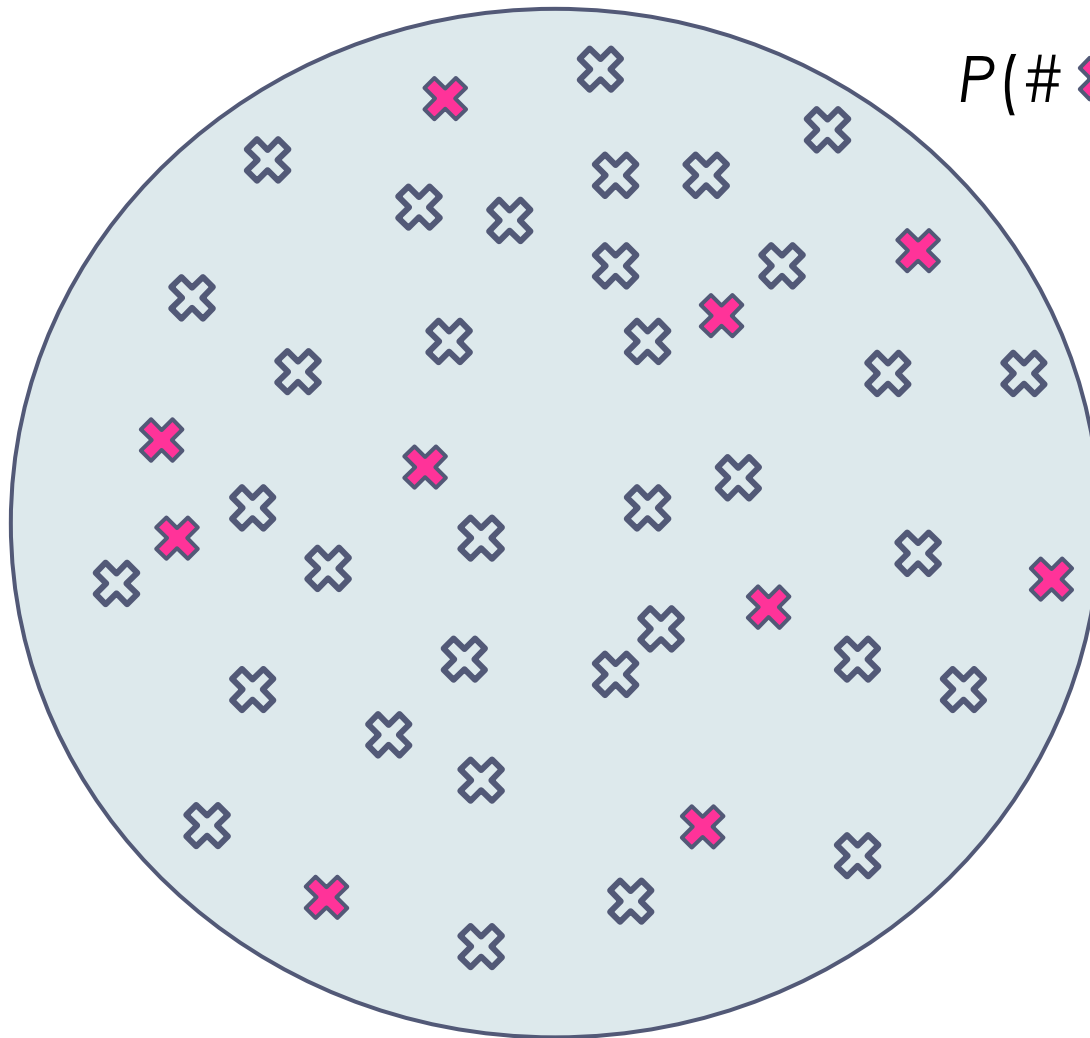
備考：

5秒間のカウント数の度数を計測

1分間のカウント数が100位になるようにAI板で調整



# Poissonの分布法則



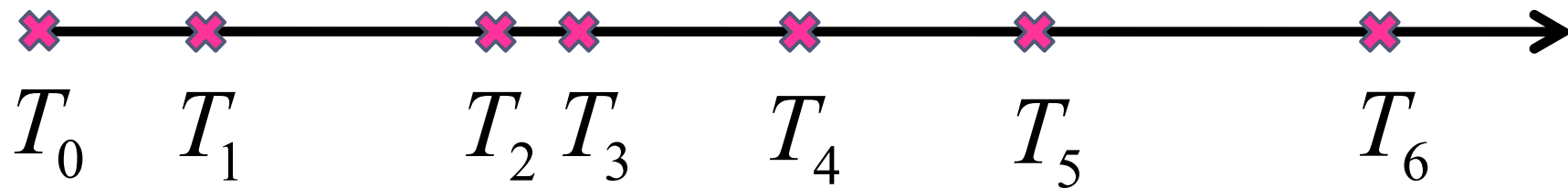
$$P(\# \text{ pink } \times) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (n \rightarrow \infty, np = \lambda)$$

大量のデータから  
発生頻度の少ない  
事象を観測

「少数の法則」

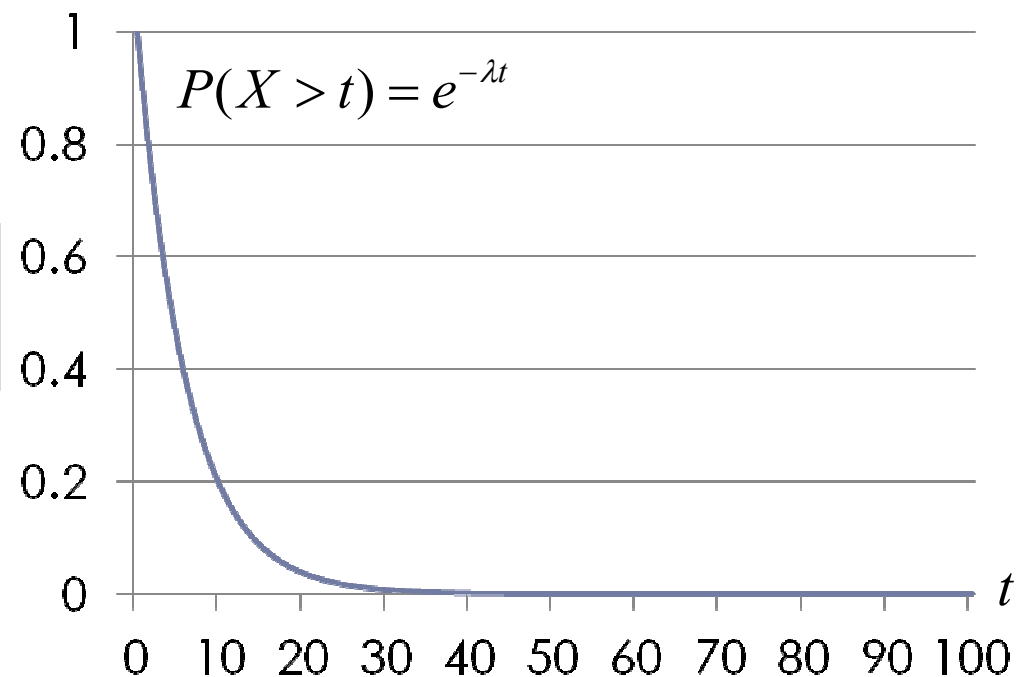
# Poisson過程：発生間隔の視点から

- 出鱈目に発生



- 発生間隔は皆同じ  
指数分布に従う

$$P(T_n - T_{n-1} > t) = e^{-\lambda t}$$



# 無記憶性 (Memoryless property)

- $X$ : 指数分布に従う確率変数

$$P(X \leq t + s \mid X > t) = P(X \leq s), \quad \forall s, t \geq 0$$

呼が1つ発生してから10秒経過後、続く2秒以内に呼が新たに発生する確率は

- 1) 過去10秒間の履歴とは無関係で (独立)
- 2) 2秒以内に発生する確率と同じ (同一)

$$P(X \leq 10 + 2 \mid X > 10) = P(X \leq 2)$$

マルコフ性 (Markovian property)

# M/M型待ち行列モデル

- 不確定要素を指数分布で表現
- M/M型のM
  - 呼の発生間隔は指数分布
  - ⇔ 呼の発生過程はPoisson過程
  - ⇔ 呼の発生数はPoisson分布
- M/M型のM
  - サービス時間は指数分布

# M/M型モデル for コールセンター

- M/M/c/c (Erlang-B)  
呼損率評価のモデル

- M/M/c (Erlang-C)  
「待ち」評価のモデル

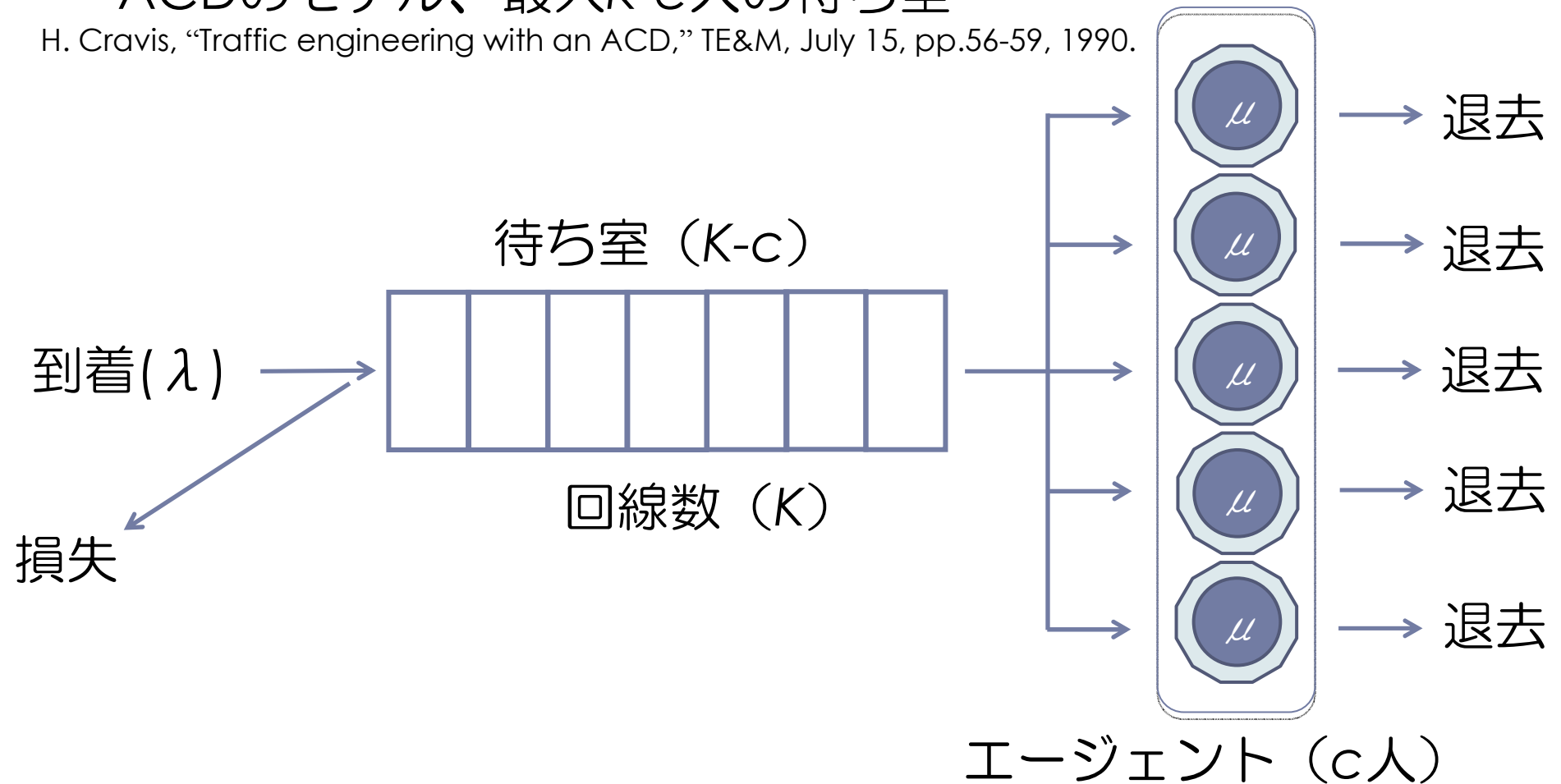
「自動電話交換機におけるいくつかの重要な確率論の問題の解」 Erlang (1917)

- M/M/c+M (Erlang-A)  
客の途中退去も考慮したモデル  
“A”はAbandonmentの頭文字

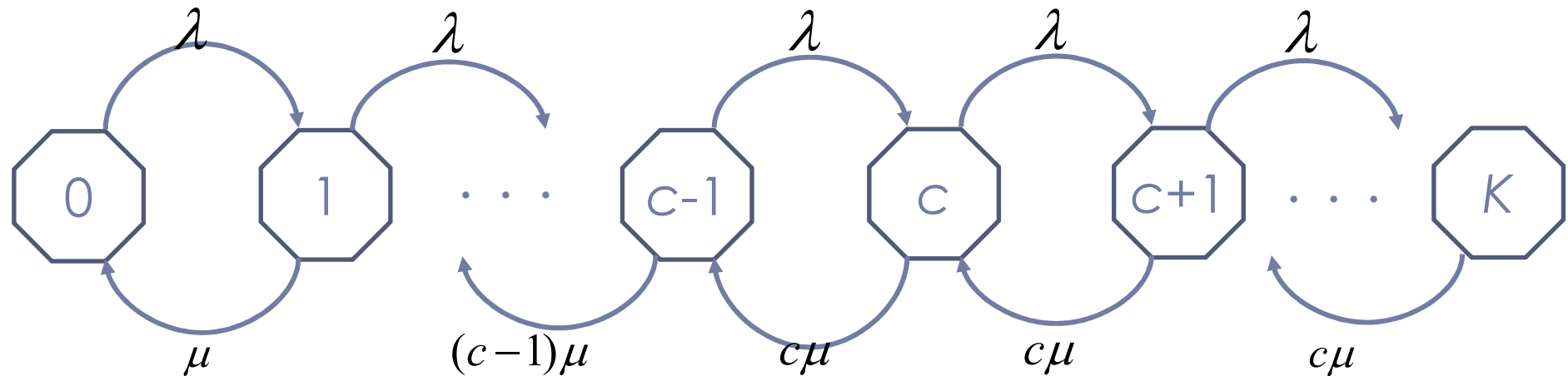
$M/M/c/K$ 

- ACDのモデル、最大 $K-c$ 人の待ち室

H. Cravis, "Traffic engineering with an ACD," TE&M, July 15, pp.56-59, 1990.



$M/M/c/K$



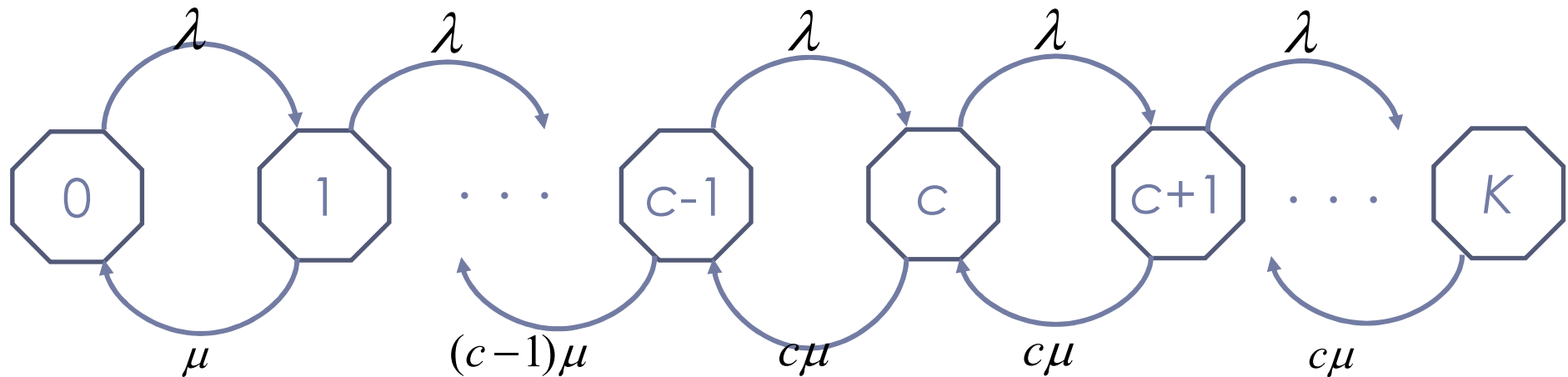
- 系内客数  $N(t)$  の定常分布  $p$  は次の連立方程式の解

$$pQ = 0, \quad \sum_{n=0}^K p_n = 1, \quad p = (p_0, p_1, \dots, p_K)$$

$$Q = [q_{i,j}]$$

推移率行列

詳しくは滝根 (2010) を参照

$M/M/c/K$ 


- 推移率行列

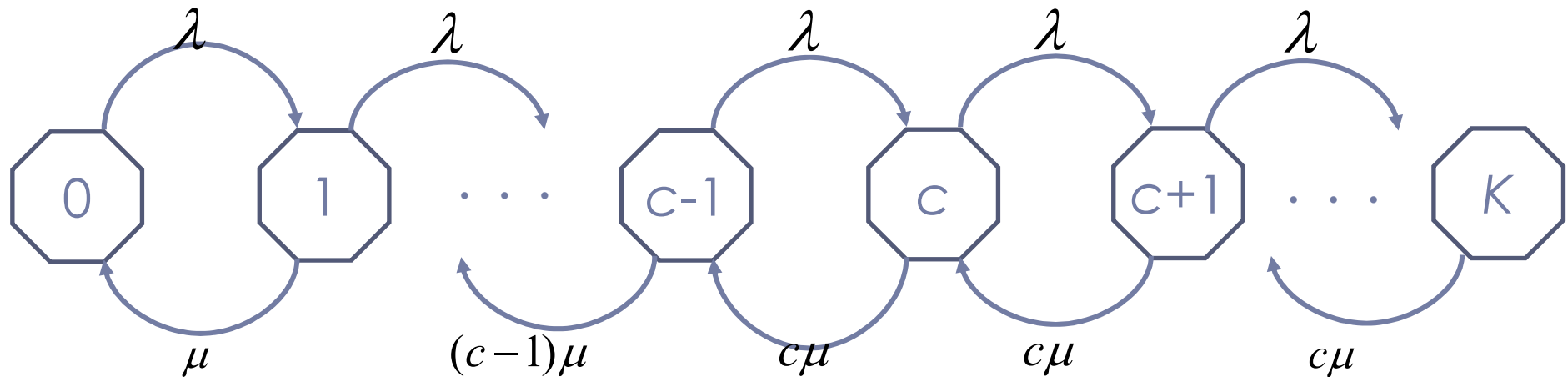
$$Q = [q_{i,j}]$$

|   | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5     |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 0 | -0.125 | 0.125  | 0      | 0      | 0      | 0     |
| 1 | 0.1    | -0.225 | 0.125  | 0      | 0      | 0     |
| 2 | 0      | 0.2    | -0.325 | 0.125  | 0      | 0     |
| 3 | 0      | 0      | 0.2    | -0.325 | 0.125  | 0     |
| 4 | 0      | 0      | 0      | 0.2    | -0.325 | 0.125 |
| 5 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0.2    | -0.2  |

$$c = 2, K = 5,$$

$$\lambda = 1/8, \mu = 1/10$$

$M/M/c/K$



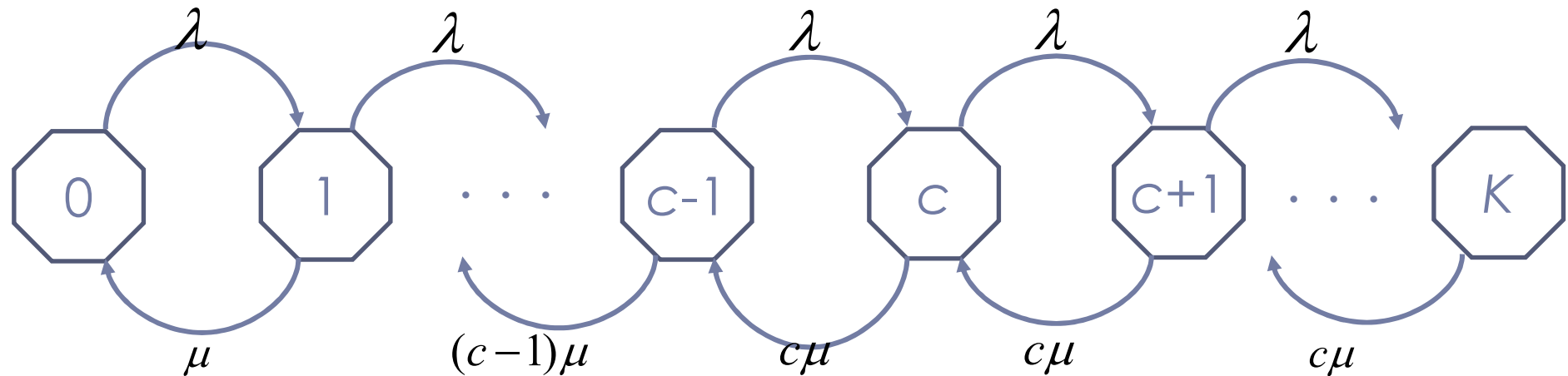
(大域) 平衡方程式 (出力フロー＝入力フロー)

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda + n\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1}, \quad n = 1, \dots, c-1$$

$$(\lambda + c\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + c\mu p_{n+1}, \quad n = c, \dots, K-1$$

$$c\mu p_K = \lambda p_{K-1}$$

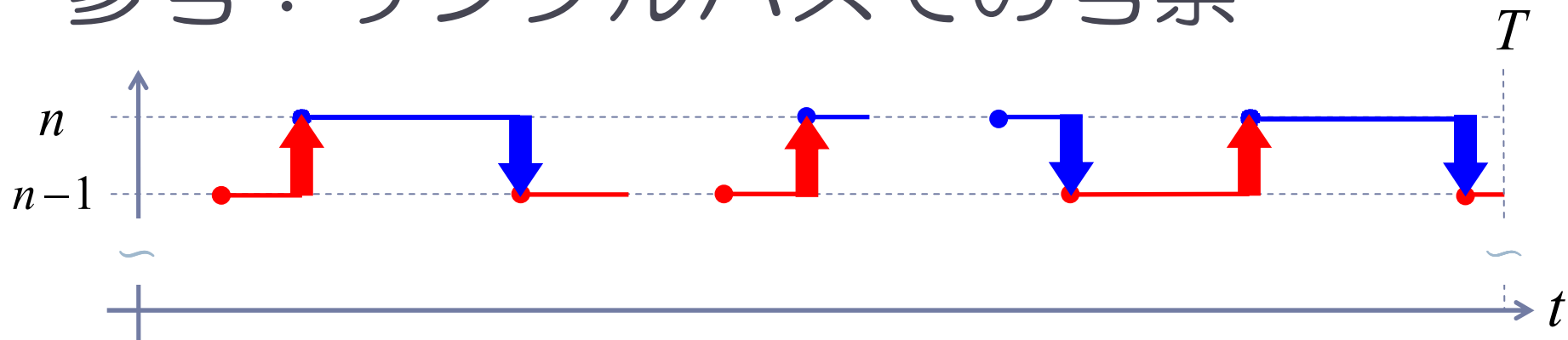
$M/M/c/K$ 

(局所) 平衡方程式

$$\lambda p_{n-1} = \min(c, n) \mu p_n, n = 1, 2, \dots, K$$

推移構造の特殊性 (隣り合う状態間でのみ推移) の結果  
(Birth-and-Death)

# 参考：サンプルパスでの考察



十分大きい  $T$  に対して区間  $(0, T]$  の

↑ の総数 = ↓ の総数

$$\lambda \frac{\text{赤線の時間の総和}}{T} \times T = \min(c, n) \mu \frac{\text{青線の時間の総和}}{T} \times T$$

(局所) 平衡方程式

$$\lambda p_{n-1} = \min(c, n) \mu p_n, n = 1, 2, \dots, K$$

## M/M/c/Kの定常分布

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 & n = 0, 1, \dots, c \\ \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} \cdot p_0 = \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} p_c & n = c+1, \dots, K \end{cases}$$
$$p_0 = \left[ \sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=1}^{K-c} \left(\frac{\rho}{c}\right)^n \right]^{-1} \quad \rho = \lambda / \mu$$

定常分布(=時間平均)=時間並進不変な分布=任意時点分布

→ 顧客が到着時に眺める分布とは一般に等しくない

# PASTA

## (Poisson Arrivals See Time Averages)

- $M/M/c/K$ において、到着直前分布  $\{p_n^*\}_{0 \leq n \leq K}$  と任意時点分布  $\{p_n\}_{0 \leq n \leq K}$  は等しい

$$p_n^* = p_n, \quad n = 0, 1, \dots, K$$

### ラフな見方！

$$\begin{aligned} p_n^* &\cong P(N(t) = n \mid N(t + \Delta t) = N(t) + 1) \\ &= \frac{P(N(t) = n, N(t + \Delta t) = n + 1)}{P(N(t + \Delta t) = N(t) + 1)} \cong \frac{(\lambda_n \Delta t) p_n}{\sum_{n=0}^K (\lambda_n \Delta t) p_n} \end{aligned}$$

$$= p_n \quad (\because \lambda_n = \lambda)$$

厳密な扱いは川島他（1995）、宮沢（2006）、あるいは三好（2010）を参照

## 顧客視点の性能指標(1/2)

- コールセンターにつながらない確率

$$P_{loss} = p_K^* = p_K$$

$$= \frac{\frac{c^c}{c!} \left(\frac{\rho}{c}\right)^K}{\sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=1}^{K-c} \left(\frac{\rho}{c}\right)^n}$$

コールセンターにつながらない



発信時点（到着直前）で満杯



任意時点で満杯

$c = K$  の場合は有名なErlang-B公式  $B(\rho, c) = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{n=0}^c \frac{\rho^n}{n!}}$

## 顧客視点の性能指標(2/2)

- (つながる客の) 待ち時間

$$P(W_q > t) = \sum_{n=c}^{K-1} \frac{p_n}{1-p_K} \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i}{i!} e^{-c\mu t}$$

- 平均待ち時間 (by use of Littleの公式)

$$E_0[W_q] = L_q / \lambda(1-p_K)$$

$$L_q = \frac{p_0(\rho/c)^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \left[ 1 - \rho^{K-c+1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c} \right]$$

$\rho = 1$  の場合はL'Hopitalの定理を使う

## 参考：つながる客は時間平均を見ない

- システムに受け入れられる呼（コールセンターにつながる客）の到着過程はPoisson過程ではない（ $\because$  損失が起こるから）
- $M/M/c/K$ における、システムに受け入れられる呼の直前分布  $\{p_n^+\}_{0 \leq n \leq K}$

$$\{p_n^+\}_{0 \leq n \leq K} = \begin{cases} \frac{p_n}{1 - p_K} & n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & n = K \end{cases}$$

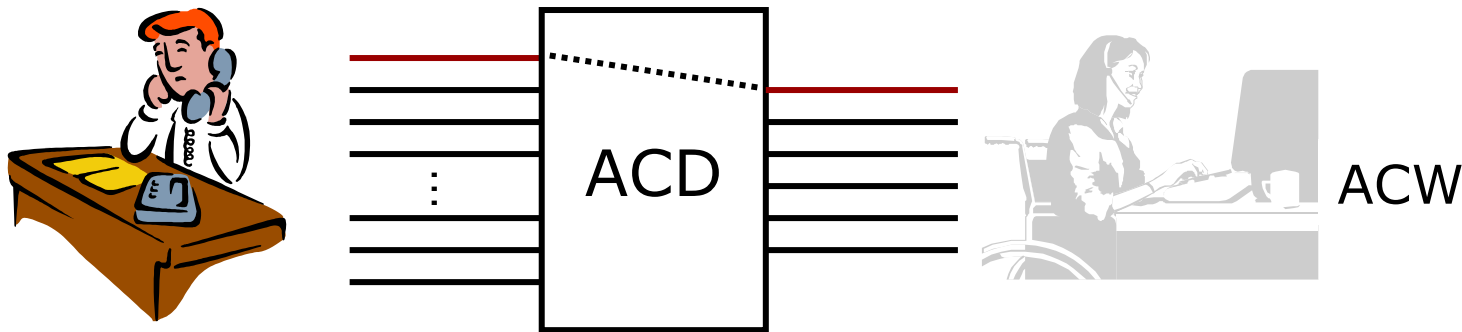
## M/M/c/Kモデルの難点

- 不確定要素の問題  
サービス時間は指数分布に従わない公算大  
⇒ M/PH/c/Kという手もあります  
(PH: 相型分布、Phase-type dis.)
- 仕組みの問題  
サービスプロセスはやや複雑(After-call Work)  
⇒ 実際の資源配分では  $c \leq K$  とは限らない！

いずれにせよM/M/c/Kを越える必要あり

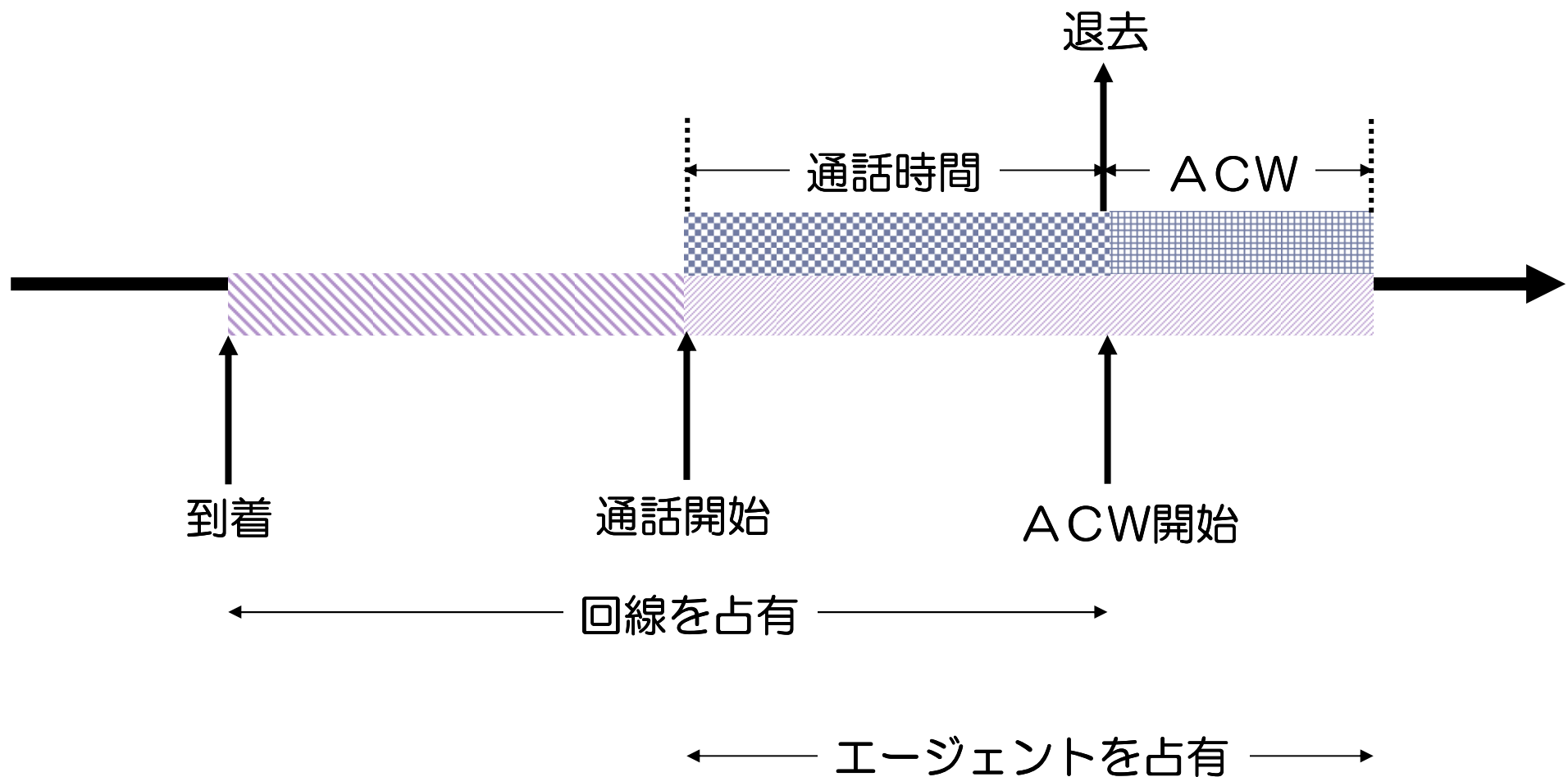
# サービス時間 ≠ 通話時間

- After-call Work (ACW)  
顧客DBの更新などエージェントが顧客との電話  
応答を終えた後の処理のこと  
Wrap-up Timeとも呼ばれる



- エージェントがACW中のとき、次の客は待たされたまま

# After-call Work(ACW)と資源占有



# 等価モデルによる評価

M.J. Fischer, D.A. Garbin and A. Gharakhanian, Performance modeling of distributed automatic call distribution systems, Telecommunication Systems, vol. 9, pp. 133-152, 1998.

“On the average there are  $E\{\text{Wrap-up}\}$  agents in the wrap-up mode, thus the blocking and expected delay resulting from an equivalent M/M/c/K+E{Wrap-up} system can be used to approximate the behavior of the M/M/c/K system with wrap-up times.”

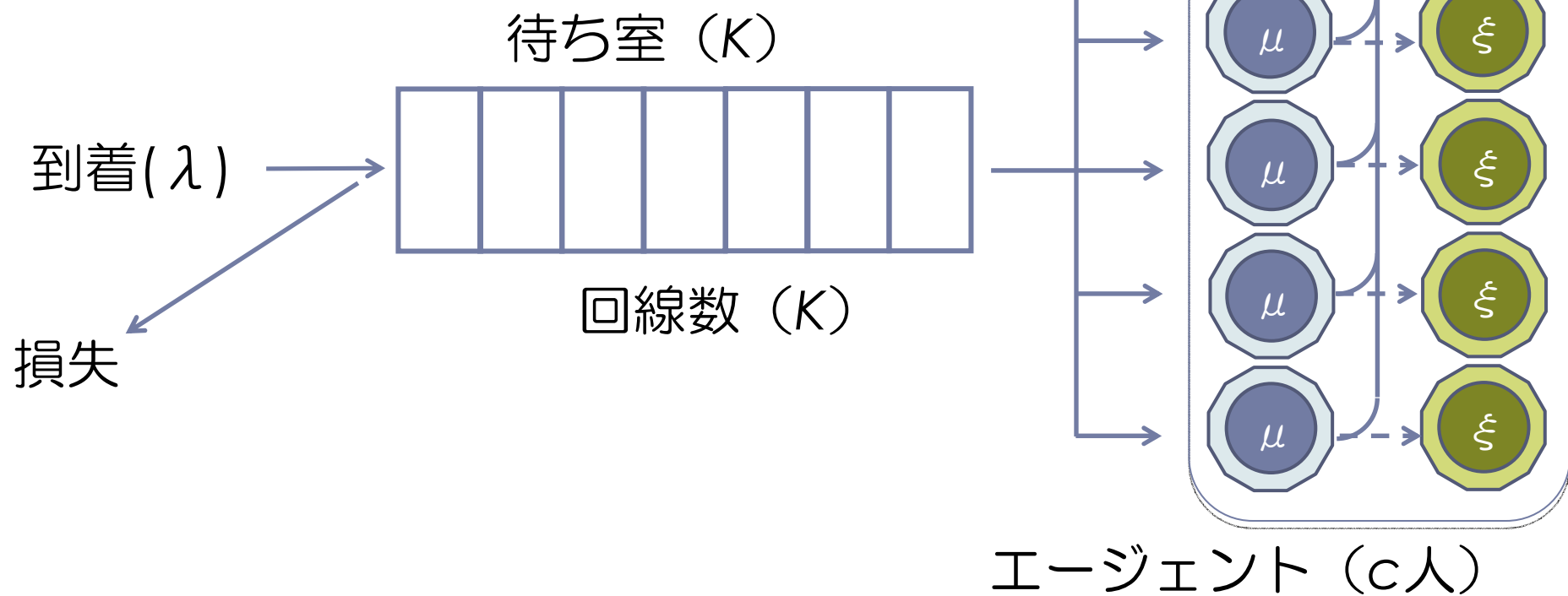
$$E\{\#\text{Wrap-up}\} = \sum_{i=0}^c i \frac{c!}{i!(c-i)!} p^i (1-p)^{c-i} \frac{E(\text{Wrap-up})}{E(\text{Talk}) + E(\text{Wrap-up})}$$

$$p = \lambda(1 - P_{\text{block}})ES / c, \quad ES = E(\text{Talk}) + E(\text{Wrap-up})$$

$E(\text{Talk})$  : expected time an agent spends with a call

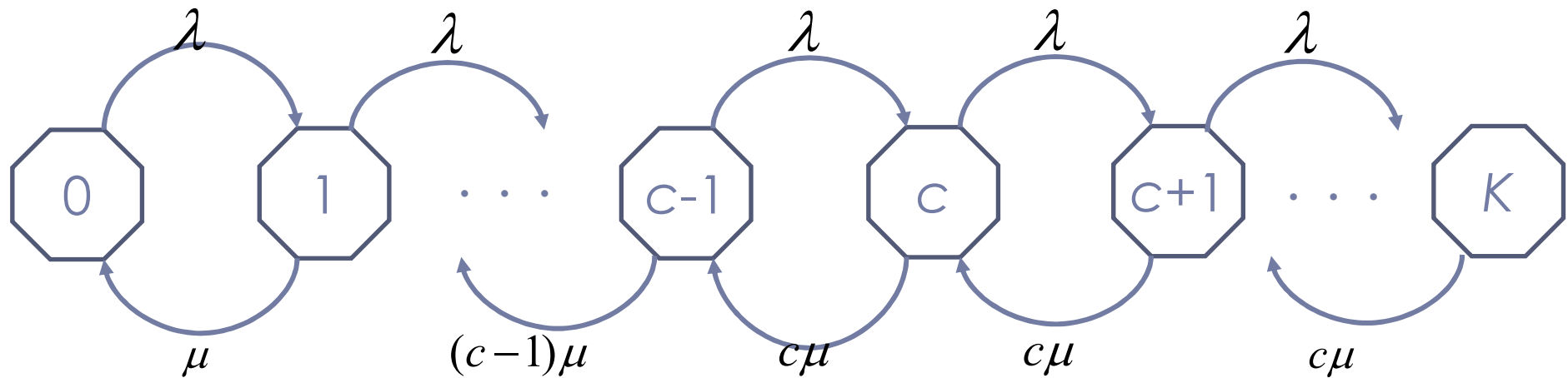
$E(\text{Wrap-up})$  : expected wrap-up time

$M/M/c/K$  半越え  
( $M/M/c/K$  with ACW)



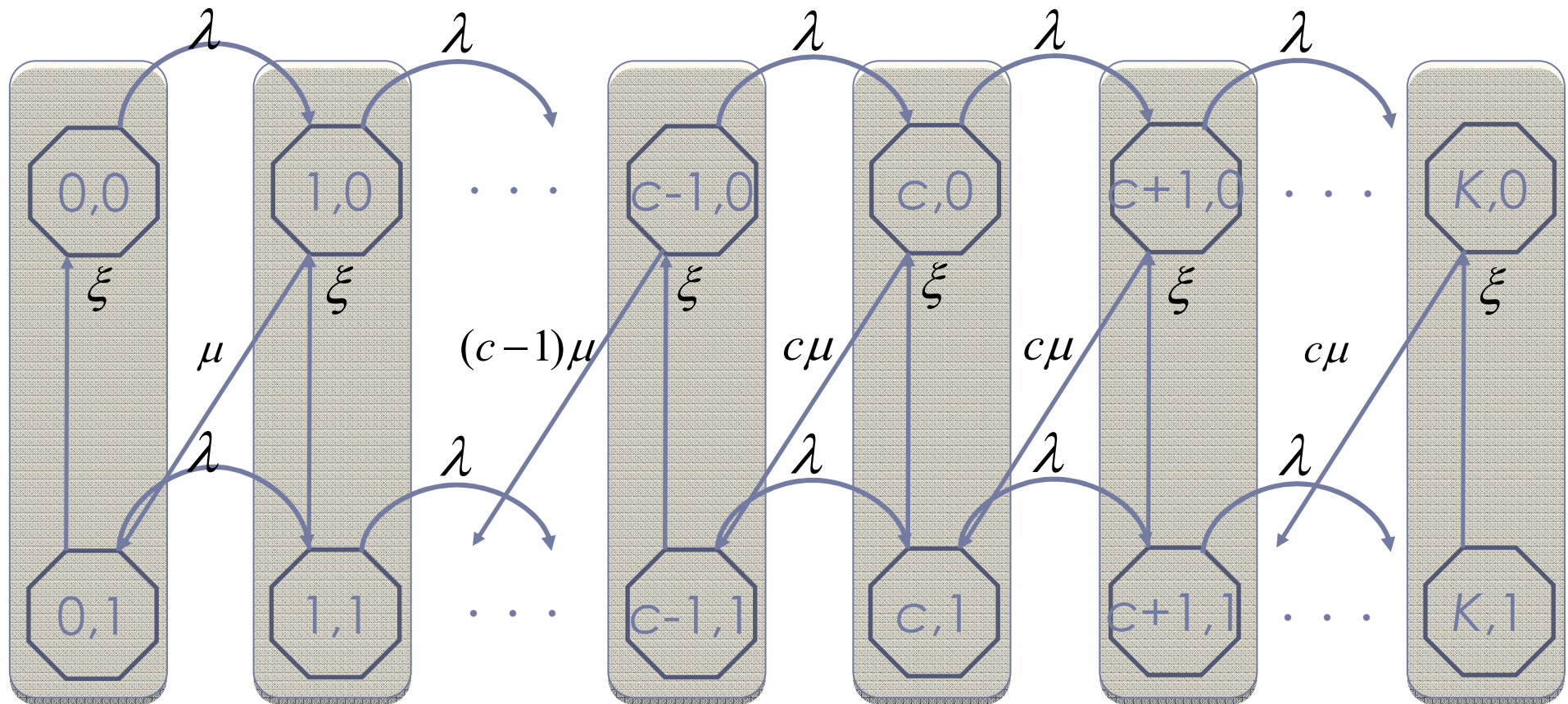
# 「 $M/M/c/K$ を半分越えて」みます

システムの状態：客数



# 「 $M/M/c/K$ を半分越えて」みます

システムの状態：客数  $\rightarrow$  (客数、#Wrap-up)



# 「M/M/c/K半越え」の推移率行列

$$c=2, K=5, \lambda=1/8, \mu=1/10, \xi=1/2$$

[illegible]

「M/M/c/K半越え」の心 (有限QBD)

- 状態は細かくなり増えたが、高々有限  
→ 原理的には連立方程式を解くことで定常分布が得られる
- 推移率行列がブロック 3 重対角  
→ 隣り合うブロック間でのみ遷移 (QBD: Quasi Birth-and-Death)

[illegible]

詳しくは滝根（2010）を参照

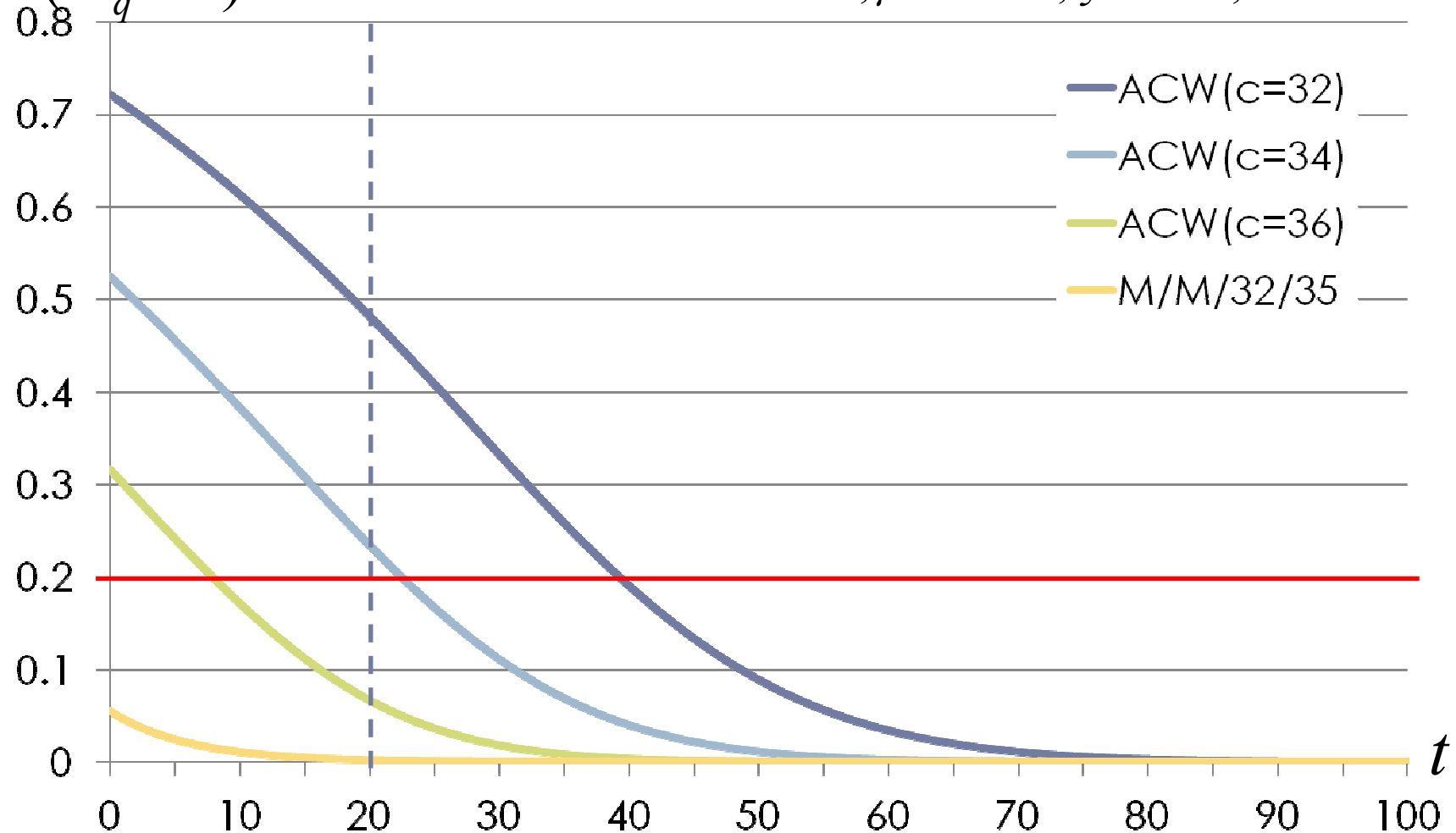
ブロック3重対角構造を利用し、定常分布を計算可能  
(Linear Level Reduction Algorithm, Folding Algorithm)

詳しくは Latouche and Ramaswami(1991)、あるいは、牧本（2001）を参照

# 待ち時間分布の比較

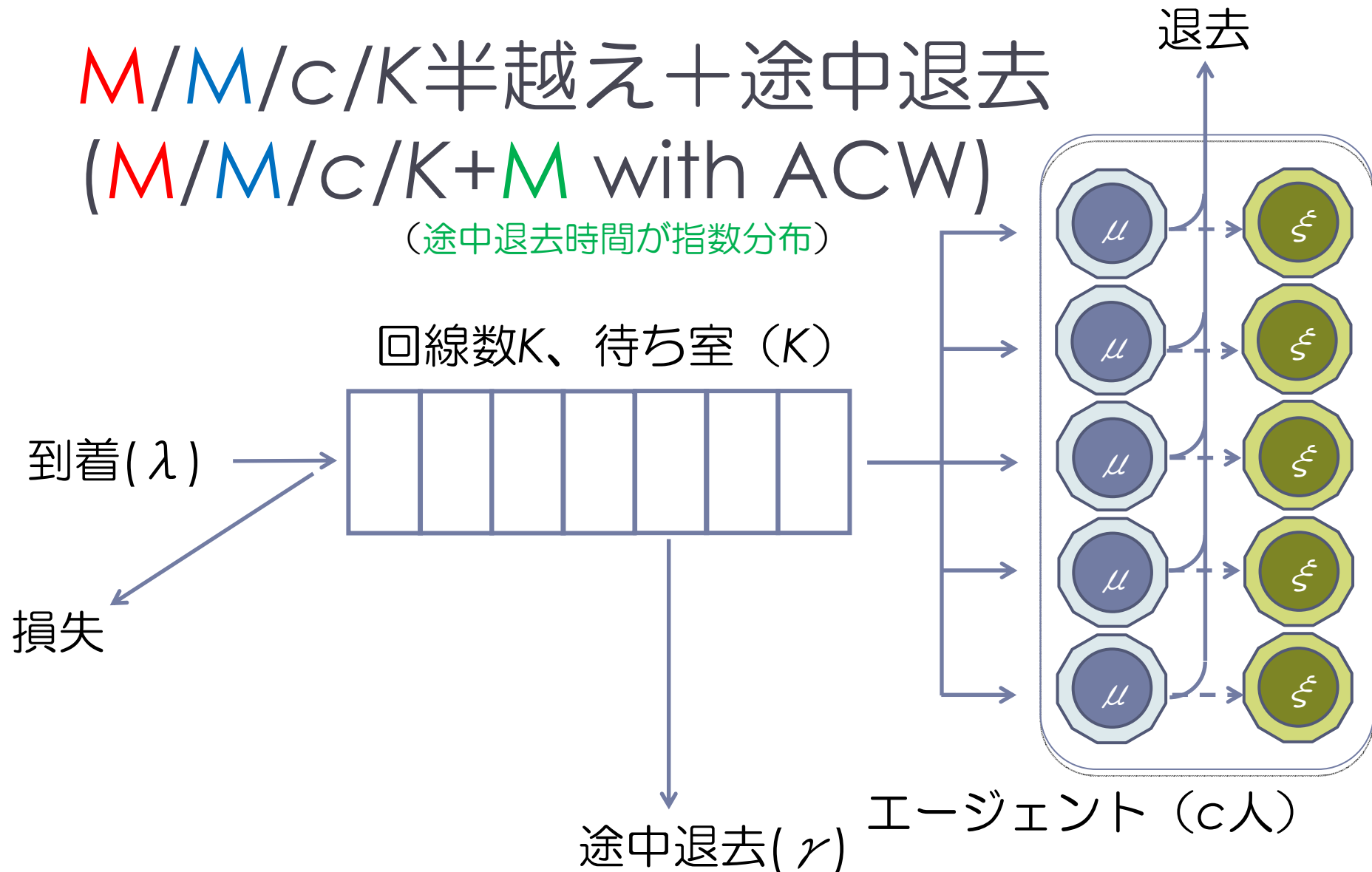
$$P(W_q > t)$$

$$\lambda = 1/6, \mu = 1/180, \xi = 1/30, K = 35$$



# $M/M/c/K$ 半越え + 途中退去 ( $M/M/c/K+M$ with ACW)

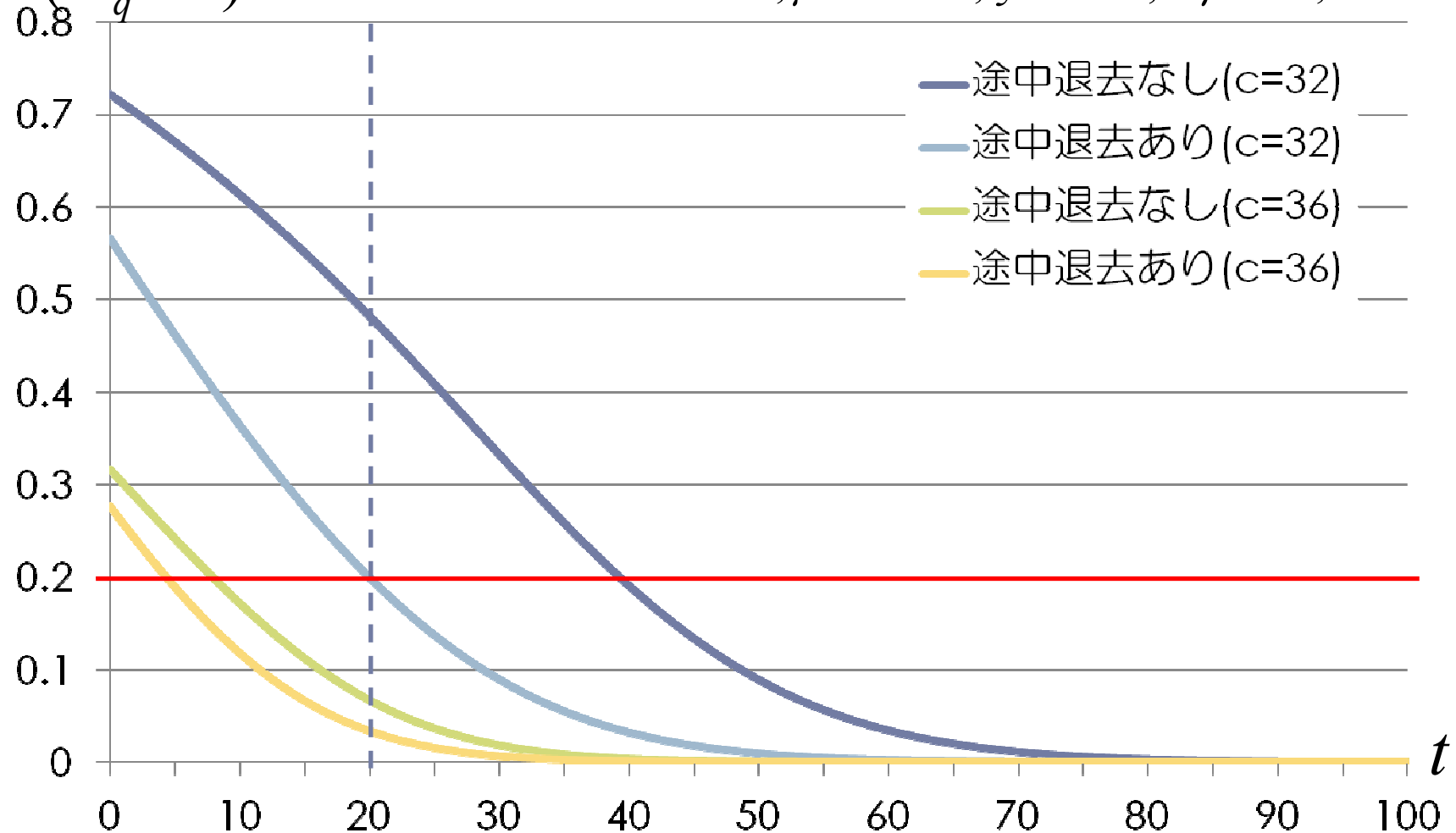
(途中退去時間が指数分布)



# 途中退去も含めた場合

$$P(W_q > t)$$

$$\lambda = 1/6, \mu = 1/180, \xi = 1/30, 1/\gamma = 90, K = 35$$



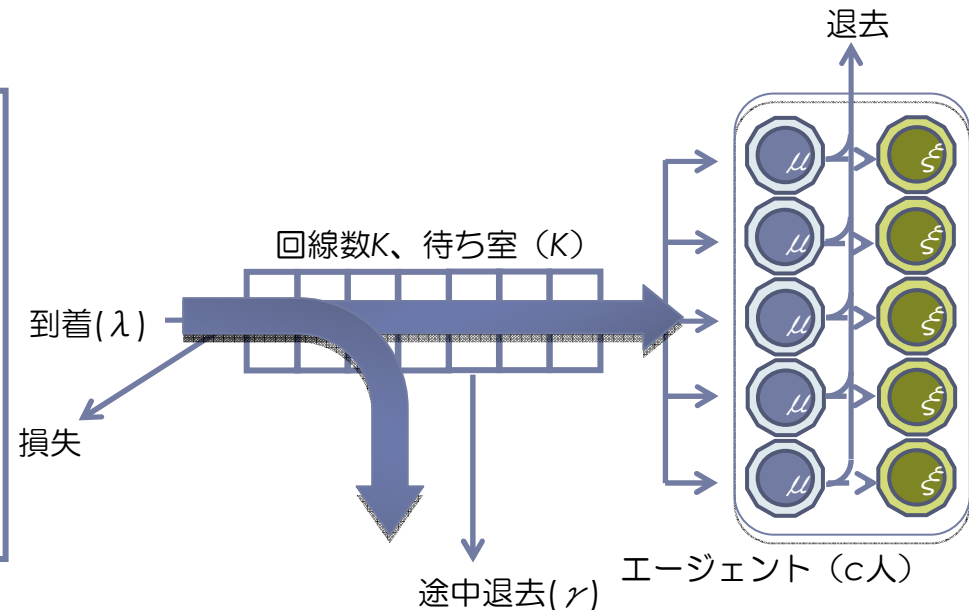
# 途中退去確率 $P_{ab}$ と平均待ち時間

 $E_0[W_q]$ 
 $M/M/c/K+M$  with ACW

$$\lambda(1 - P_{loss})P_{ab} = \gamma L_q$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$P_{ab} = \frac{\gamma L_q}{\lambda(1 - P_{loss})} = \gamma E_0[W_q]$$



|      | $P_{ab}$    | $E_0[W_q] = \int_0^{\infty} P(W_q > t) dt$ | $\gamma E_0[W_q]$ |
|------|-------------|--------------------------------------------|-------------------|
| c=32 | 0.107096409 | 9.638676834                                | 0.107096409       |
| c=34 | 0.065002621 | 5.850235861                                | 0.065002621       |
| c=36 | 0.031331766 | 2.819858928                                | 0.031331766       |

$$\lambda = 1/6, \mu = 1/180, \xi = 1/30, 1/\gamma = 90, K = 35$$

# 「ゆらぎ」の影響には注意

- 途中退去までの時間は指数分布とは認めがたい

L. Brown, A. Mandelbaum, A. Sakov, S. Zeltyn, L. Zhao, and H. Shen, Statistical analysis of a telephone call center: A queueing-science perspective, Journal of the American Statistical Association vol. 100, no. 2, pp. 36-50, 2005.

- M/M/c+GIで指摘されていること

A. Mandelbaum and S. Zeltyn, The impact of customers' patience on delay and abandonment: some empirically-driven experiments with M/M/c+G queue, OR Spectrum, vol. 26, pp. 377-411, 2004.

$$\int_0^x \bar{G}_1(\eta) d\eta \geq \int_0^x \bar{G}_2(\eta) d\eta, \forall x > 0 \Rightarrow P(W_q^1 > 0) \geq P(W_q^2 > 0)$$

$\bar{G}_i(\eta), i = 1, 2$  途中退去までの時間の補分布

平均が同じならば、一定分布がある意味待ち率を最大化

## 参考：確率順序の視点から

- 平均が同じ（非負の）途中退去時間分布  $G_1, G_2$

$$G_1 \leq_{cx} G_2$$

$$\Leftrightarrow \int_x^\infty \bar{G}_1(\eta) d\eta \leq \int_x^\infty \bar{G}_2(\eta) d\eta, \forall x > 0, \quad \int_0^\infty \bar{G}_1(\eta) d\eta = \int_0^\infty \bar{G}_2(\eta) d\eta$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \bar{G}_1(\eta) d\eta \geq \int_0^x \bar{G}_2(\eta) d\eta, \forall x > 0, \quad \int_0^\infty \bar{G}_1(\eta) d\eta = \int_0^\infty \bar{G}_2(\eta) d\eta$$

$$\Rightarrow P(W_q^1 > 0) \geq P(W_q^2 > 0)$$

一定分布（確定分布）は凸順序の意味で最小

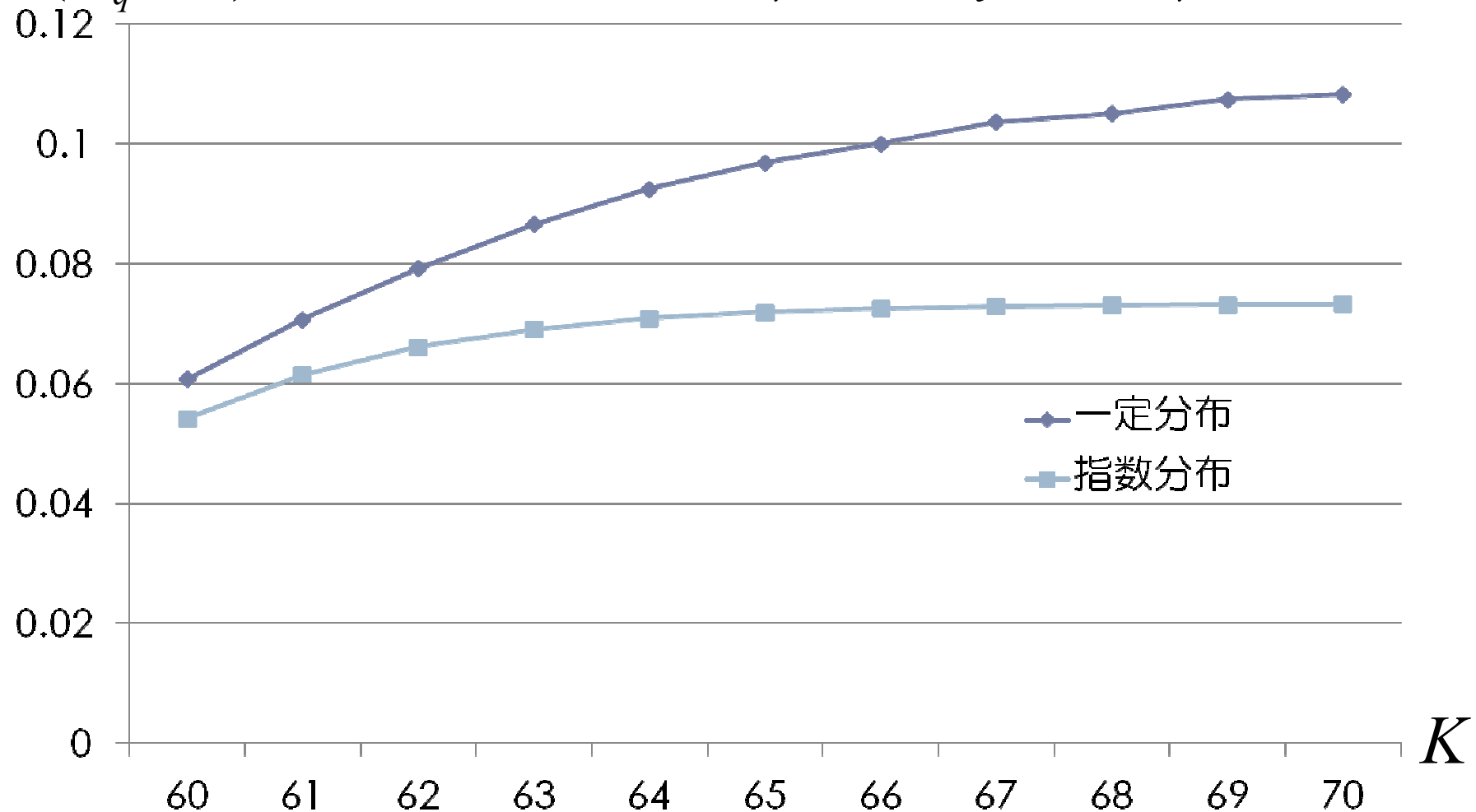
$\Rightarrow$  一定分布のとき待ち率最大

詳しくは 三好（2005）を参照

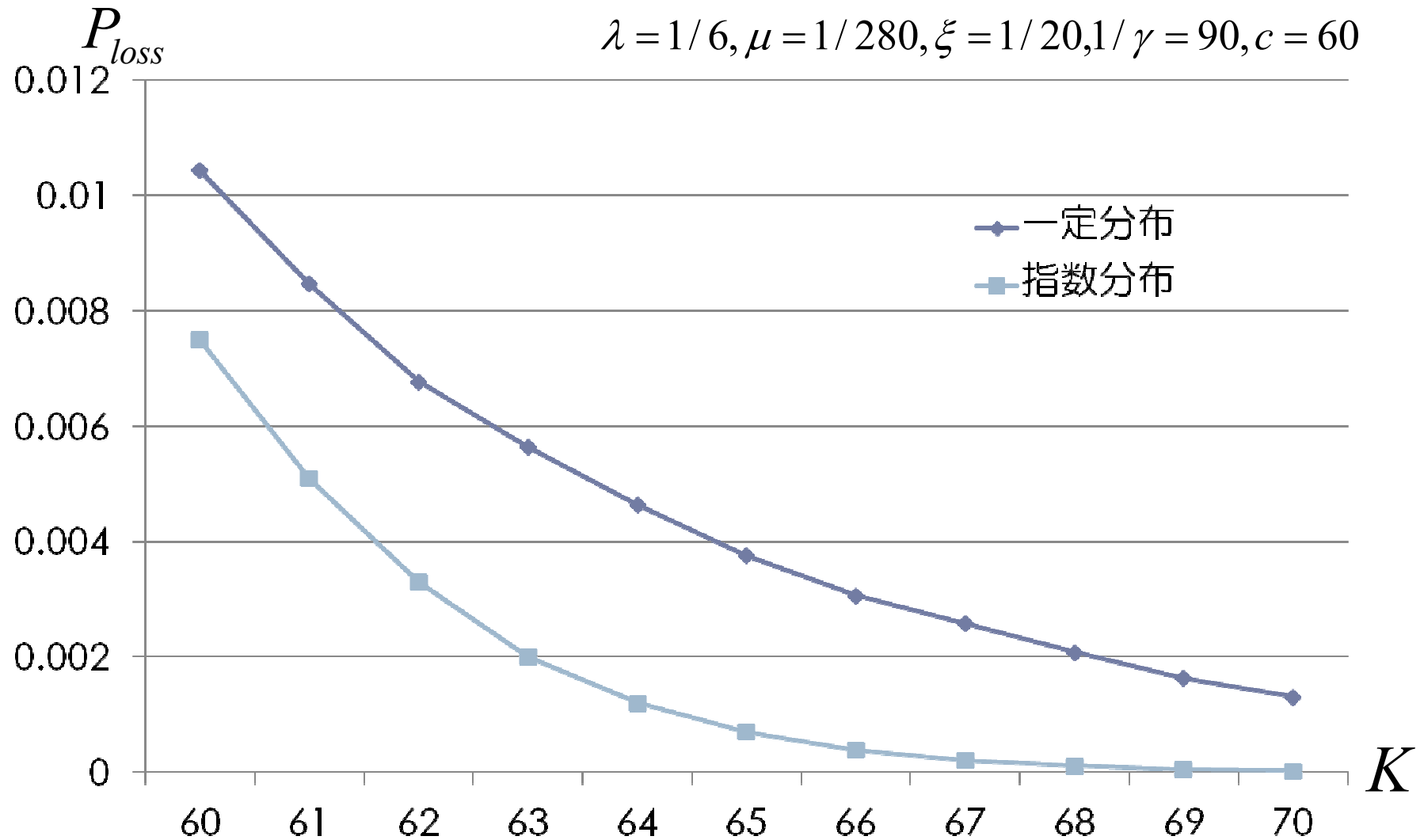
# M/M/c/K半越え+途中退去でも同様？

$$P(W_q > 0)$$

$$\lambda = 1/6, \mu = 1/280, \xi = 1/20, 1/\gamma = 90, c = 60$$



# 損失率も同様かもしれない？



# コールセンターモデルの話題

- インバウンド＋アウトバンド（Call blending）

A. Deslauriers, P. L'Ecuyer, J. Pichitlamken, A. Ingolfsson, and A.N. Avramidis, Markov chain models of a telephone call center with call blending, Computers and Operations Research, vol. 34, no. 6, pp.1616-1645, 2007.

## マルコフ連鎖によるサービス過程の拡張モデル

- Many-server queue with abandonment

J.G. Dai and S. He, Queues in service systems: customer abandonment and diffusion approximations. J. Geunes, ed. INFORMS TutORials in Operations Research, vol. 8. INFORMS, Hanover, MD, pp. 36-59, 2011.

## 拡散近似（Halfin-Whitt regime）による評価 途中退去分布の感度分析

# 性能解析研究：所感

- 性能解析  $\div$  職人芸？
- モデル解析の結果は定量的／定性的
- 実測値（最低シミュレーション）による検証
- ピッタリあわせる必要はなく、上界／下界でも

## その他

- Markovianモデル＝Just an exercise？
  - 解法のテクニックは整っている
  - 指数分布（無記憶性）のおかげ
    - 指数分布に対する一定の理解が必要
- モデルの「精緻化」はどこまで必要か？
  - Mathematical Tractability vs. Realism
  - 数値計算コストとのトレードオフも考えたい  
e.g., 指数分布な再呼モデルは解析できるが、  
数値計算にはそれなりに労力を要する

T. Phung-Duc and K. Kawanishi, Multiserver retrial queues with after-call work, Numerical Algebra, Control and Optimization, vol. 1, no. 4, pp. 639 - 656, 2011.

# 性能解析研究のハードル

- 解析手法とその知識
  - 確率・統計、マルコフ連鎖、数値解析、漸近解析、極限過程、etc.
  - 行列解析法（M/G/1型、G/M/1型、準出生死滅過程）
  - 点過程論（PASTA、conditional PASTA、リトルの公式、率保存則）
- シミュレーション＋数値計算
  - シミュレーターを操るスキル
  - プログラミングのスキル
- 対象の把握
  - 構成要素、動作の仕組み、プロトコル
  - 実データ分析



# 参考文献

1. 川島幸之助、町原文明、高橋敬隆、斎藤洋：通信トラヒック理論の基礎とマルチメディア通信網、電子情報通信学会、1995.
2. G. Latouche and V. Ramaswami: Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling, SIAM, 1999.
3. 牧本直樹：待ち行列アルゴリズム—行列解析アプローチ—、朝倉書店、2001.
4. 高橋敬隆、山本尚生、吉野秀明、戸田彰：わかりやすい待ち行列システム—理論と実践—、電子情報通信学会、2003.
5. 三好直人：知っているとちょっと役立つ(?) 確率順序とその応用、第1回「学生・初学者のための待ち行列チュートリアル」、2005.
6. 宮沢政清：待ち行列の数理とその応用、牧野書店、2006.
7. 滝根哲哉：M/M/1を越えて—準出生死滅過程への招待—：入門編、第6回「学生・初学者のための待ち行列チュートリアル」、2010.
8. 三好直人：待ち行列への点過程アプローチ：入門編、第6回「学生・初学者のための待ち行列チュートリアル」、2010.
9. 鈴木武次：待ち行列 [復刊]、裳華房、2011.
10. R. Stollatz: Performance Analysis and Optimization of Inbound Call Centers (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems), Springer 2003.
11. N. Gans, G. Koole, and A. Mandelbaum, Telephone call centers: Tutorial, review, and research prospects, Manufacturing & Service Operations Management, vol. 5, no. 2, pp. 79-141, 2003.
12. O.Z Aksin, M. Armony, and V. Mehrotra, The modern call-center: A multi-disciplinary perspective on operations management research, Production and Operations Management, vo. 16, no. 6, pp.665-688, 2007.

## おまけ：定常への近づき具合

- $N(t)$ を $M(\lambda)/M(\mu)/1$ の系内容数とする.  $\rho = \lambda/\mu < 1$ ならば

$$\begin{aligned} |p_{k,n}(t) - p_n| &< 2(1 + \sqrt{\rho})(\sqrt{\rho})^{n-k-1} e^{-(\lambda+\mu)t} I_0(2\sqrt{\lambda\mu}t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \\ \left| L_k(t) - \frac{\rho}{1-\rho} \right| &< \frac{2}{(\sqrt{\rho})^k (1-\sqrt{\rho})^2} e^{-(\lambda+\mu)t} I_0(2\sqrt{\lambda\mu}t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ただし、

$$p_{k,n}(t) = P(N(t) = n \mid N(0) = k)$$

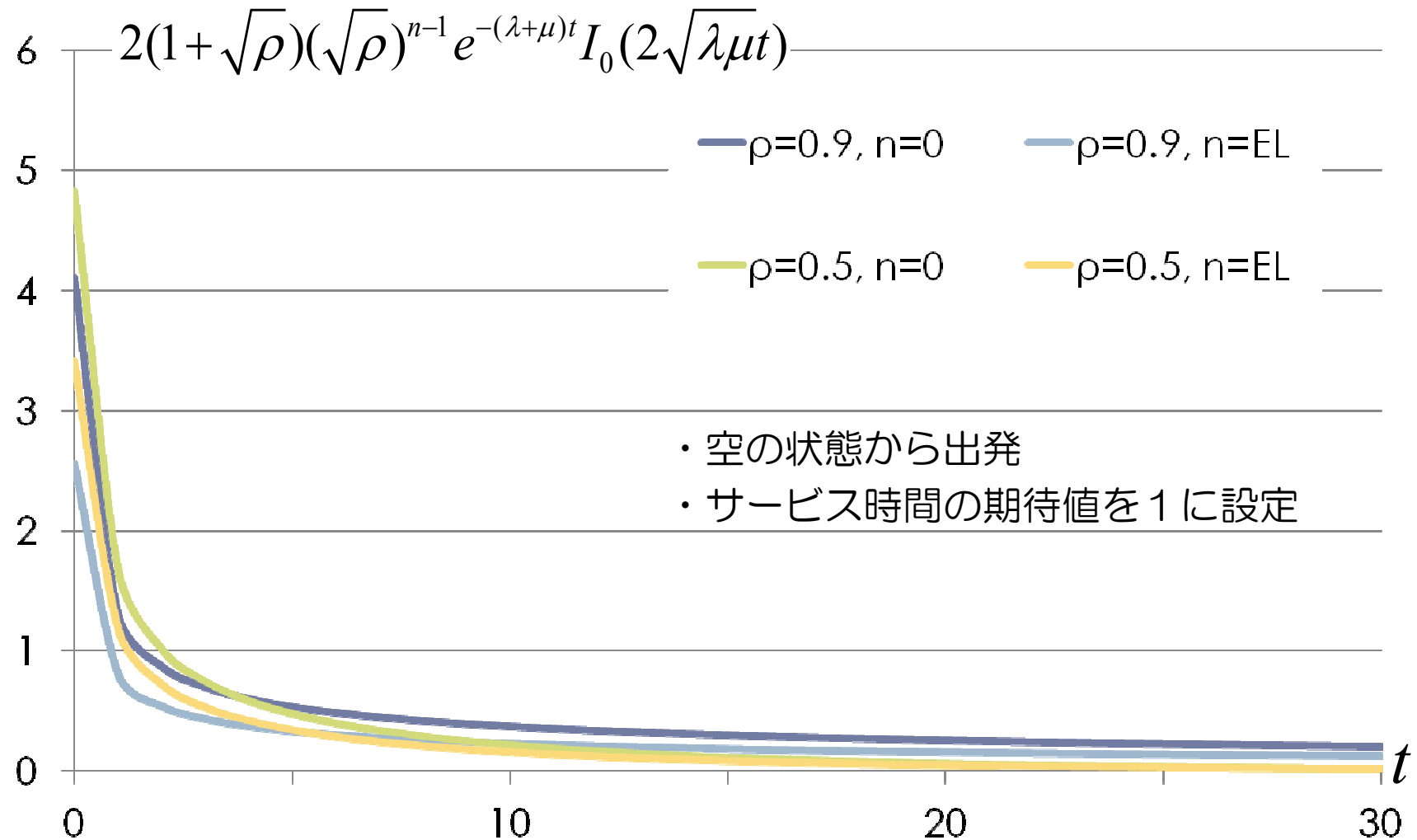
$$L_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_{k,n}(t)$$

$$p_n = (1-\rho)\rho^n$$

$$I_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!(i+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2i} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ 1 - \frac{4k^2-1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right\} (x \rightarrow \infty)$$

証明は鈴木(2011)を参照

# 定常との距離（客数= $n$ の確率）



# 定常との距離（平均系内客数）

