M/M/1 を越えて

—準出生死滅過程への招待—

滝根　哲哉

takine@comm.eng.osaka-u.ac.jp

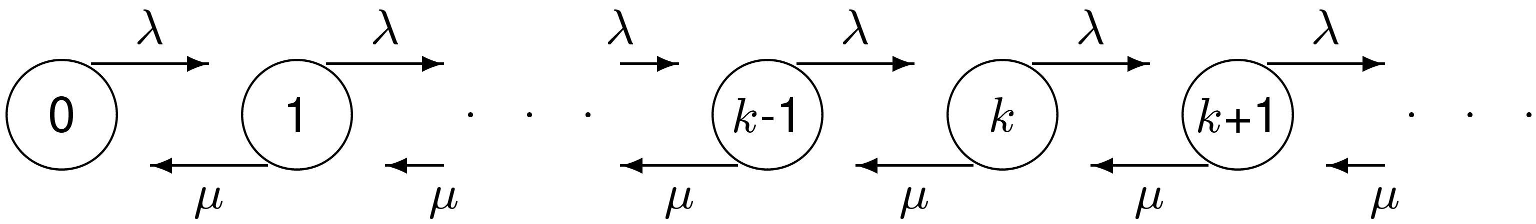
大阪大学工学研究科電気電子情報工学専攻

M/M/1 を越えて　—準出生死滅過程への招待—

- はじめに
- 連続時間マルコフ連鎖の定常解
- 出生死滅過程（$M/M/1$）
- 準出生死滅過程（２ステージサービスモデル）
- 準出生死滅過程の性質（安定性、計算手法）
- モデル例の紹介
- おわりに

はじめに

$M/M/1$ 待ち行列の客数過程は連続時間マルコフ連鎖の特殊な例



何が特殊か？

- 状態遷移が隣り合う状態だけで起こる

　　出生死滅過程（birth-and-death process）

- k から $k+1$、$k+1$ から k への遷移率が k の値に依らない

　　空間的な同質性　$\Rightarrow$　単純な形の定常解

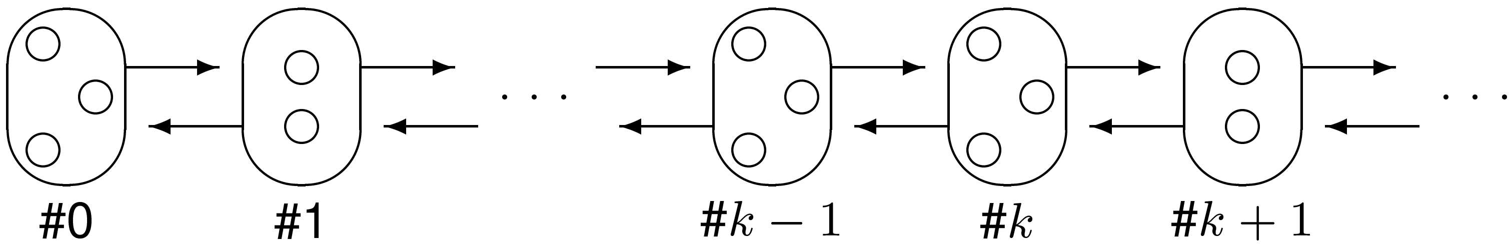
出生死滅過程の一般化

出生死滅過程：状態遷移が隣り合う状態だけで起こる

$\Downarrow$ 一般化

状態をグループ化したとき

・グループ間の状態遷移は隣り合うものの間だけで起こる



$\Rightarrow$ 準出生死滅過程（quasi birth-and-death process）

・グループのサイズが同じ

・グループ内ならびにグループ外への各遷移率がグループに依らない

空間的な同質性 $\Rightarrow$ 単純な形の定常解

連続時間マルコフ連鎖 (1)

既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$

- 状態空間 $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots\}$

$$\Pr(X(s+t) = j \mid X(u)\,(0 \leq u \leq s)) = \Pr(X(s+t) = j \mid X(s))$$

- 状態 i ($i \in \mathcal{S}$) から 状態 j ($j \in \mathcal{S}, j \neq i$) への遷移率 $q(i,j)$

$$q(i,j) = \lim_{\tau \to 0+} \frac{\Pr(X(t+\tau) = j \mid X(t) = i)}{\tau}$$

$$\Pr(X(t+\tau) = j \mid X(t) = i) = q(i,j)\tau + o(\tau)$$

- 状態 i ($i \in \mathcal{S}$) から出る遷移率の総和 $q(i)$

$$q(i) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \\ j \neq i}} q(i,j)$$

連続時間マルコフ連鎖 (2)

連続時間マルコフ連鎖の規定

- 状態 i から状態 j への推移率 $q(i,j)$　　$(i, j \in \mathcal{S}, i \neq j)$
- $q(i) = \sum_{\substack{j \in \mathcal{S} \\ j \neq i}} q(i,j)$

連続時間マルコフ連鎖の動作規則

1. ある状態 i にパラメタ $q(i)$ の指数分布に従う時間だけ滞在

   （平均滞在時間は $1/q(i)$）

2. 状態 i の滞在終了後、確率 $q(i,j)/q(i)$ で次の状態 j へ遷移

3. 以降、上記の手順を繰り返す

連続時間マルコフ連鎖の定常解 (1)

定常状態確率：$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, , \pi_1, \ldots)$

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} \Pr(X(t) = j), \qquad j \in \mathcal{S}$$

状態 i から状態 j への遷移率 $q(i,j)$

状態 j から出ていく遷移率の総和 $q(j) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} q(j,i)$

大域平衡方程式（global balance equation）

$$\pi_j q(j) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \pi_i q(i,j), \qquad j \in \mathcal{S}$$

「状態 j から出る確率フロー」＝「状態 j へ入る確率フロー」

連続時間マルコフ連鎖の定常解 (2)

大域平衡方程式（global balance equation）

$$\pi_j q(j) = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \pi_i q(i,j) \qquad (j \in \mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \pi_i q(i,j) + \pi_j(-q(j)) = 0 \qquad (j \in \mathcal{S})$$

遷移率行列 $\boldsymbol{Q}$：

$$[\boldsymbol{Q}]_{i,j} = \begin{cases} q(i,j), & i \neq j \quad \text{（状態 } i \text{ から状態 } j \text{ へ遷移する率）} \\ -q(i), & i = j \quad \text{（状態 } i \text{ から出る率の符号を変えたもの）} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\pi Q} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

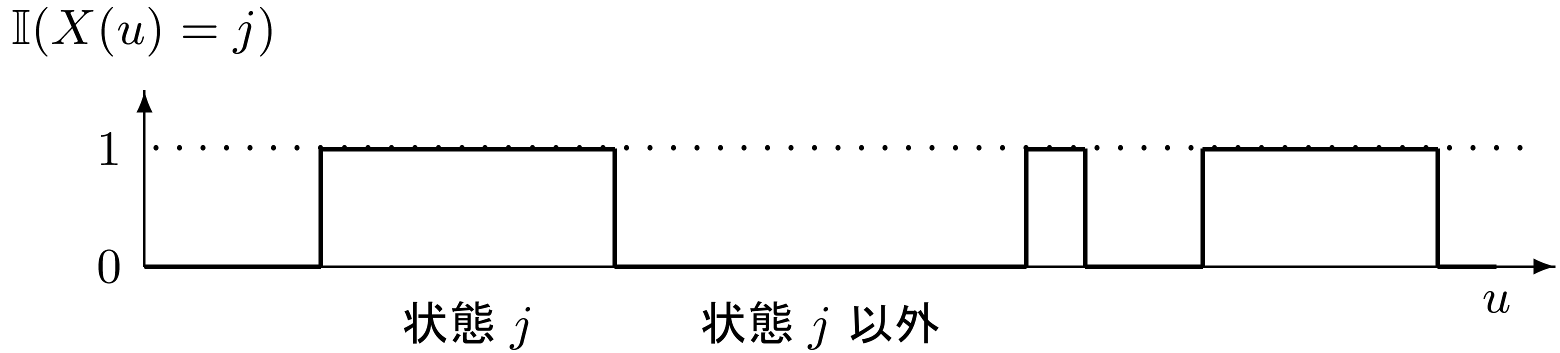
定常解：式 (1) ならびに $\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1$ を満たす正数 π_j $(j \in \mathcal{S})$

もし存在すれば唯一

連続時間マルコフ連鎖の定常解 (3)

時間平均としての解釈

$$\text{指示関数} \quad \mathbb{I}(\chi) = \begin{cases} 1, & \text{事象 } \chi \text{ が成立} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$



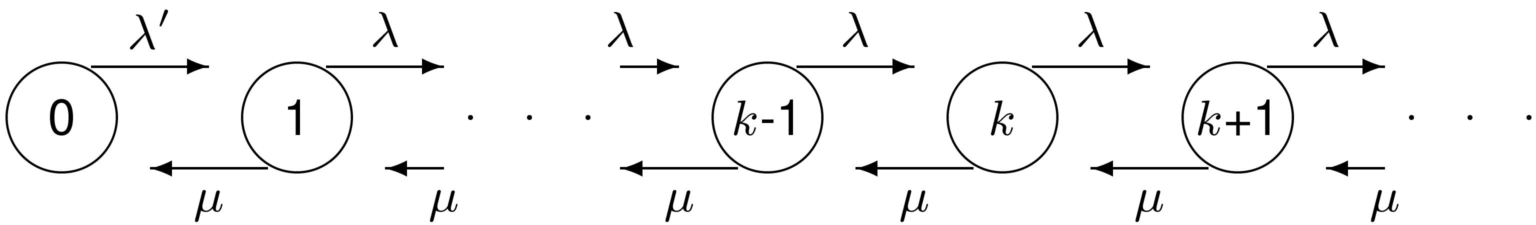
定常解 π_j（$j \in \mathcal{S}$）: 状態 j にある時間割合

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{I}(X(u)=j) du$$

M/M/1 (1)

M/M/1（$\lambda < \mu$）

ただし、システムが空の時の到着率 λ'



遷移率行列 $\boldsymbol{Q}$

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\lambda' & \lambda' & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

M/M/1 (2)

大域平衡方程式

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots) \begin{pmatrix} -\lambda' & \lambda' & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (0, 0, \ldots)$$

要素毎に書き下すと

$$-\lambda'\pi_0 + \mu\pi_1 = 0$$
$$\lambda'\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$$
$$\lambda\pi_{k-1} - (\lambda+\mu)\pi_k + \mu\pi_{k+1} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

M/M/1 (3)

空間的に同質な部分に対応する大域平衡方程式

$$\lambda\pi_{k-1} - (\lambda+\mu)\pi_k + \mu\pi_{k+1} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

ここで「$\pi_k = \gamma\pi_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$」を仮定

$$\Leftrightarrow \qquad \pi_k = \gamma^{k-1}\pi_1, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

γ は確率的に何を意味するか（一般には k に依存）

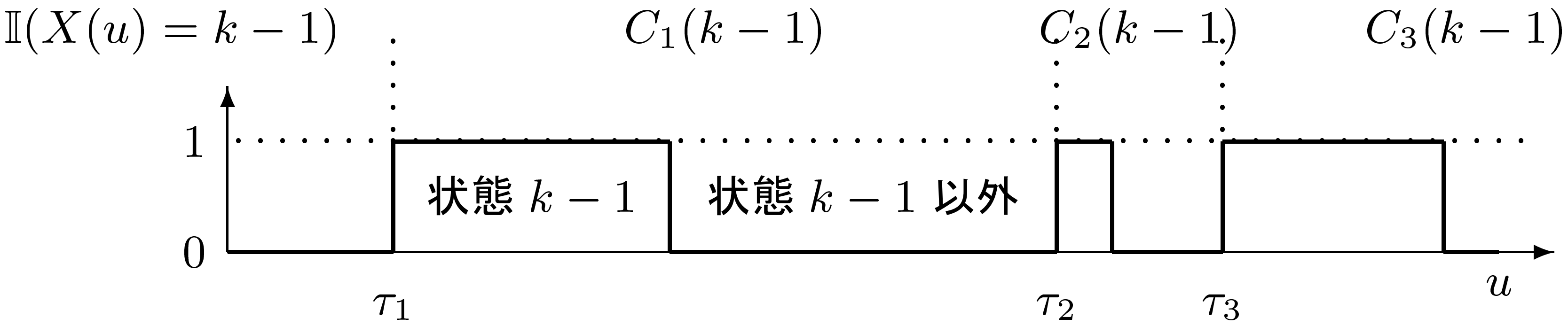
$$\gamma_k = \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}}, \qquad \pi_k = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{I}(X(u) = k)du$$

$$\gamma_k = \frac{\text{状態 } k \text{ に滞在する時間の総和}}{\text{状態 } k-1 \text{ に滞在する時間の総和}}$$

これが k（$k \geq 2$）に依らない

M/M/1 (4)

他の状態から状態 $k-1$ に変化した時点 τ_n に注目



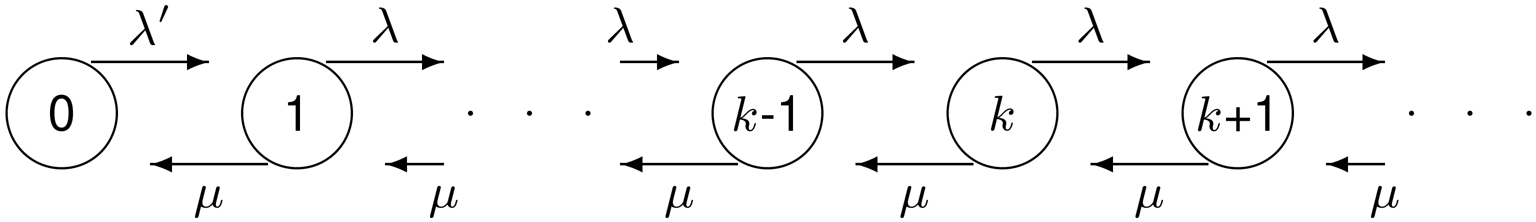
マルコフ性 $\Rightarrow$ τ_n 以降の挙動は τ_n 以前の挙動とは独立

$\Rightarrow$ 同じ確率的規則に従うサイクルの繰り返し

$$\gamma_k = \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} = \frac{\text{サイクル } C_n(k-1) \text{ 内での状態 } k \text{ に滞在する時間の総和の平均}}{\text{サイクル } C_n(k-1) \text{ 内での状態 } k-1 \text{ に滞在する平均時間}}$$

M/M/1 では、この量がどの状態 k（$k \geq 2$）でも同一

M/M/1 (5)



$$\gamma_k = \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} = \frac{\text{サイクル } C_n(k-1) \text{ 内での状態 } k \text{ に滞在する時間の総和の平均}}{\text{サイクル } C_n(k-1) \text{ 内での状態 } k-1 \text{ に滞在する平均時間}}$$

実際に γ_k を計算してみる

$$\text{分母} = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$\text{分子} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \times 0 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[\frac{1}{\lambda+\mu} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\mu}{\lambda+\mu} \times \frac{n}{\lambda+\mu}\right]$$

$$= \frac{\rho}{\lambda+\mu}$$

M/M/1 (6)

空間的に同質な部分に対応する大域平衡方程式

$$\lambda\pi_{k-1} - (\lambda+\mu)\pi_k + \mu\pi_{k+1} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

ここで「$\pi_k = \gamma\pi_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$」を仮定

$$\Leftrightarrow \qquad \pi_k = \gamma^{k-1}\pi_1, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

式 (3) を式 (2) へ代入すると

$$\lambda\gamma^{k-2}\pi_1 - (\lambda+\mu)\gamma^{k-1}\pi_1 + \mu\gamma^{k+1}\pi_1 = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda - (\lambda+\mu)\gamma + \mu\gamma^2 = 0$$

M/M/1 (7)

$\pi_k = \gamma^{k-1}\pi_1$ となる γ が満たす２次方程式

$$\lambda - (\lambda + \mu)\gamma + \mu\gamma^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\mu\gamma - \lambda)(\gamma - 1) = 0$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1 < \infty$, $\pi_k > 0$ となるためには $0 < \gamma < 1$ が必要

$$\Rightarrow \qquad \gamma = \lambda/\mu < 1$$ （２次方程式の解の内、小さい方）

以下、$\rho = \lambda/\mu$ とする（$\pi_k = \rho^{k-1}\pi_1$ ($k = 2, 3, \ldots$)）

M/M/1 (8)

空間的に同質でない部分に対応する大域平衡方程式

$$
\begin{aligned}
&-\lambda'\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\
&\lambda'\pi_0 - (\lambda + \mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0
\end{aligned}
$$

$\mu\pi_2 = \mu\rho\pi_1 = \lambda\pi_1$ を用いて書き換えると

$$
(\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} -\lambda' & \lambda' \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = 0
$$

確率の和が 1

$$
\pi_0 + \pi_1 + \pi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k-1} = \pi_0 + \pi_1 (1-\rho)^{-1} = 1
$$

M/M/1 (9)

よって定常解 π_k は $\rho' = \lambda'/\mu$ としたとき

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho+\rho'}, \qquad \pi_1 = \frac{\rho'(1-\rho)}{1-\rho+\rho'}, \qquad \pi_k = \pi_1 \rho^{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

手順のおさらい

1. 空間的に同質な部分で、幾何解（$\pi_k = \gamma\pi_{k-1}$）を仮定
2. 未知数 γ を空間的に同質の部分の大域平衡方程式より決定

   （２次方程式の小さい方の解）
3. 境界部分に対応する大域平衡方程式を幾何解を併用して解く

次に、これと同じ事を状態が２次元のマルコフ連鎖について行う

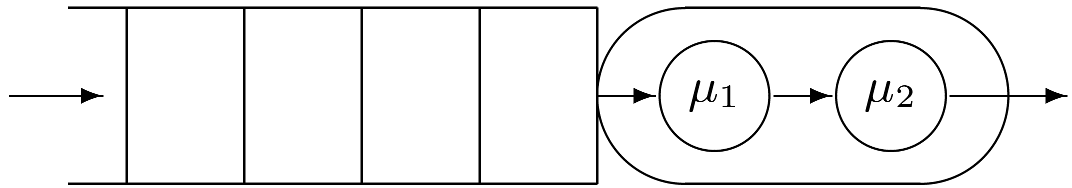
２変数マルコフ連鎖の例

先ほどの例：サービスは全て指数分布

２ステージサービスモデルへ拡張：

それぞれの客は率 μ_1, μ_2 の指数サービスを連続して受けた後、離脱

非割り込み：二人の客が並行してサービスを受けることはない



システムの状態 (k, s)　（「レベル」と「相」の２変数）

レベル k：システム内容数（$k = 0, 1, \ldots$）

相 s：Stage 1 のサービス中なら 1, Stage 2 のサービス中なら 2

特にシステムが空の場合 0

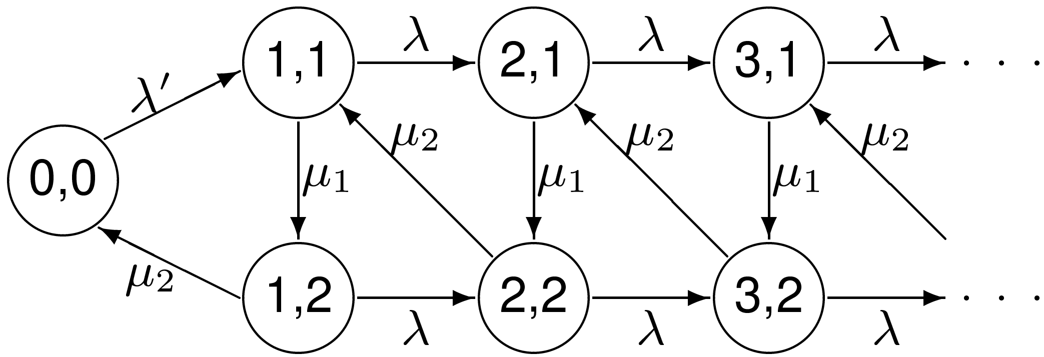
FIFO ２ステージサービスモデル (1)

システムの状態 (k, s)

レベル k：システム内客数（$k = 0, 1, \ldots$）

相 s：Stage 1 のサービス中なら 1, Stage 2 のサービス中なら 2

状態遷移図



FIFO ２ステージサービスモデル (2)

遷移率行列 $\boldsymbol{Q}$

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ (0,0) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,1) \\ (3,2) \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} (0,0) & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & (3,1) & (3,2) & \cdots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\lambda' & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & -a_1 & \mu_1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu_2 & 0 & -a_2 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & -a_1 & \mu_1 & \lambda & 0 & \cdots \\
0 & \mu_2 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \lambda & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & \mu_1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
a_1 = \lambda + \mu_1, \qquad a_2 = \lambda + \mu_2
$$

一見、ややこしい... が空間的な同質性があるはず

FIFO ２ステージサービスモデル (2)

遷移率行列 $\boldsymbol{Q}$

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} (0,0) & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & (3,1) & (3,2) & (4,1) & (4,2) & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,0) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,1) \\ (3,2) \\ (4,1) \\ (4,2) \\ \vdots \end{array} &
\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|c}
-\lambda' & \lambda' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & -a_1 & \mu_1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu_2 & 0 & -a_2 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & -a_1 & \mu_1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \mu_2 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & \mu_1 & \lambda & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & \lambda & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & \mu_1 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
$$

FIFO ２ステージサービスモデル (2)

遷移率行列 $\boldsymbol{Q}$

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} (0,0) & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & (3,1) & (3,2) & (4,1) & (4,2) & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} (0,0) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,1) \\ (3,2) \\ (4,1) \\ (4,2) \\ \vdots \end{array}
&
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} & 0 \quad 0 & 0 \quad 0 & 0 \quad 0 & \cdots \\ \hline
\boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \\ \hline
\vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
$$

FIFO ２ステージサービスモデル (3)

$$
\text{遷移率行列 } \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu_1) & \mu_1 \\ 0 & -(\lambda+\mu_2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu_2 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}_{0,0} = -\lambda', \quad \boldsymbol{B}_{0,1} = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix}
$$

スカラーの場合との類似性

M/M/1 の場合

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}
-\lambda' & \lambda' & 0 & 0 & \cdots \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\
0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\
0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

２ステージモデルの場合

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

定常解 (1)

定常解：$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \ldots)$

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \pi_{(0,0)}, \qquad \boldsymbol{\pi}_k = (\pi_{(k,1)}, \pi_{(k,2)}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

大域平衡方程式

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

同質な部分

$$\boldsymbol{\pi}_{k-1}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_{k+1}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

定常解 (2)

同質な部分

$$\boldsymbol{\pi}_{k-1}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_{k+1}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{4}$$

ここで以下の行列幾何解（matrix-geometric solution）を仮定

$$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_{k-1}\boldsymbol{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

式 (5) を式 (4) へ代入すると

$$\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-2}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-1}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

すなわち

$$\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-2}\left[\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2\right] = \boldsymbol{0}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

定常解 (3)

$$\text{定常解}\quad \boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{R}^{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{R}^{k-2}\left[\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2\right] = \boldsymbol{0}$$

・上記の行列の２次方程式は通常、数値的に求める

・上記の行列の２次方程式は複数の解をもつ

$\Rightarrow$ スカラーの場合と同様、最小非負解を $\boldsymbol{R}$ として採用

定常解 (4)

大域平衡方程式

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

境界部分

$$\boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{B}_{0,0} + \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{B}_{1,0} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{B}_{0,1} + \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}$$

定常解 (5)

境界部分

$$\boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{B}_{0,0} + \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{B}_{1,0} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{B}_{0,1} + \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0},$$

$\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{R}$ を代入し、行列で書き換えると

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} \\ \boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

さらに、確率の和が 1 であることから

$$1 = \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\pi}_1 \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{R}^{k-1} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\pi}_1 (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{e}$$

ただし $\boldsymbol{e}$ は全ての要素が 1 である適当な次元の列ベクトル

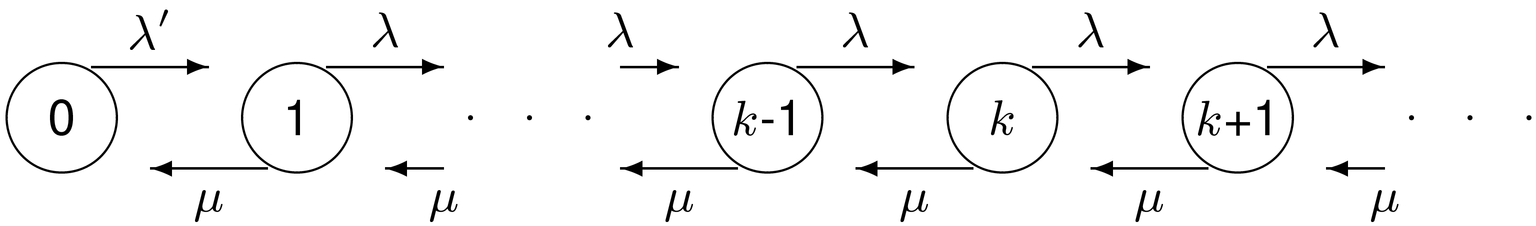
ここまでのまとめ

ステップ	M/M/1	２ステージモデル
平衡方程式	$\pi_{k-1}\lambda + \pi_k[-(\lambda+\mu)] + \pi_{k+1}\mu = 0$	$\boldsymbol{\pi}_{k-1}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_{k+1}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}$
幾何解	$\pi_k = \pi_1\gamma^{k-1}$	$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^k$
２次式	$\lambda + \gamma[-(\lambda+\mu)] + \gamma^2\mu = 0$	$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}$
境界方程式	$(\pi_0, \pi_1)\begin{pmatrix} -\lambda' & \lambda' \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = 0$	$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} \\ \boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$
正規化	$\pi_0 + \pi_1(1-\rho)^{-1} = 1$	$\boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e} = 1$

準出生死滅過程の安定条件 (1)

システムが安定 $\Leftrightarrow$ 定常解が存在

<u>M/M/1 の場合</u>



$$\rho < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < \mu$$

空間的に同質な部分において、

客数が増加する率 λ より減少する率 μ の方が大

$\Rightarrow$ Drift (流れの向き) $\lambda - \mu$ が負

準出生死滅過程の安定条件 (2)

準出生死滅過程の場合

レベル（客数）が増減する率は相に依存 $\Rightarrow$ Drift は自明でない

仮に、客数が非常に大きくなったとすると、

その後、同質な部分を延々とさまよう

同質な部分における相の動作に注目

$\boldsymbol{A}_0$ の (i, j) 要素：相が i から j に変化し、レベルが１つ増加する率

$\boldsymbol{A}_1$ の (i, j) 要素：相が i から j に変化し、レベルが変化しない率

$\boldsymbol{A}_2$ の (i, j) 要素：相が i から j に変化し、レベルが１つ減少する率

準出生死滅過程の安定条件 (3)

$\boldsymbol{A}_0$ の (i, j) 要素：相が i から j に変化し、レベルが１つ増加する率

$\boldsymbol{A}_1$ の (i, j) 要素：相が i から j に変化し、レベルが変化しない率

$\boldsymbol{A}_2$ の (i, j) 要素：相が i から j に変化し、レベルが１つ減少する率

相だけに注目した場合のマルコフ連鎖の遷移率行列 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$$

同質な部分を延々とさまよう $\Rightarrow$ 相は定常状態に近づく

このような状況下での相の状態の確率分布 $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{e} = 1$$

準出生死滅過程の安定条件 (4)

$\boldsymbol{\eta}$：同質な部分を延々とさまようときの相の状態確率ベクトル

レベルが一つ増加する率：$\boldsymbol{\eta A}_0\boldsymbol{e}$

レベルが一つ減少する率：$\boldsymbol{\eta A}_2\boldsymbol{e}$

安定条件

$$\text{Drift} = \boldsymbol{\eta A}_0\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\eta A}_2\boldsymbol{e} < 0 \tag{6}$$

式 (6) が成立　$\Rightarrow$　$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-1}$ の形をもつ定常解が存在

・$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{RA}_0 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0}$ を満たす

最小非負解 $\boldsymbol{R}$ の最大固有値は 1 未満

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e} < \infty$$

率行列 $\boldsymbol{R}$ の計算法 (1)

率行列 $\boldsymbol{R}$ の満たす方程式

$$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}$$

行列 $\boldsymbol{A}_1$ は逆行列をもつ : $(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} \geq \boldsymbol{O}$

逆行列 $(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$ の (i, j) 要素

状態 (k, i) から出発して、レベルが $k-1$ 又は $k+1$ に

なるまでに、状態 (k, j) に滞在している時間の総和の平均

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_0(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$$

率行列 $\boldsymbol{R}$ の計算法 (2)

率行列 $\boldsymbol{R}$ の満たす方程式

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_0(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$$

繰り返し計算で $\boldsymbol{R}$ を求める

初期値：$\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{O}$

$$\boldsymbol{R}(n+1) = \boldsymbol{A}_0(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} + \boldsymbol{R}^2(n)\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$\{\boldsymbol{R}(n);\, n = 0, 1, \ldots\}$ は要素毎に値が増加する行列の列

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}(n) = \boldsymbol{R}$$

各要素の値の変化が十分小さくなったとき、終了

モデル例

準出生死滅過程：２変数マルコフ連鎖 $\{(X(t), S(t));\ t \geq 0\}$ の特殊例

- 客数 $X(t)$ は１回の遷移で高々 ± 1 しか変化しない
- 補助的な情報を保持する $S(t)$ の取りうる値は有限
- 空間的同質性 $\Rightarrow$ 行列幾何解

行列幾何解をもつ待ち行列モデル群

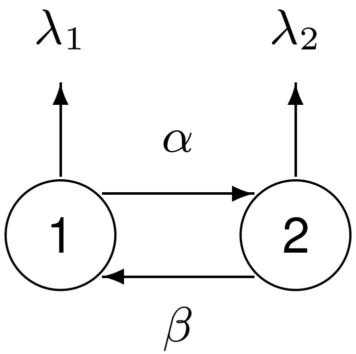
- モデルを構成する部品が指数分布
- 単一到着、単一離脱
- 空間的同質性（十分に客数が多い場合、動作は客数と独立）

例えば $E_k/H_n/c$、$H_n/E_k/c$、$PH/PH/c$、$MAP/PH/c$ など

モデル例 : $MMPP/M/2$ (1)

先着順サービス２サーバモデル

客の到着：２状態 MMPP (Markov-modulated Poisson process)



・到着を支配する２状態マルコフ連鎖
・状態に応じて客の到着率が異なる

客のサービス時間は率 μ の指数分布

システムの状態：$(X(t), S(t))$

$X(t)$：システム内客数　　$S(t)$：MMPP の状態（1 or 2）

モデル例 ：$MMPP/M/2$ **(2)**

$$
\begin{array}{c}
 \\ (0,1) \\ (0,2) \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,1) \\ (3,2) \\ (4,1) \\ (4,2) \\ \vdots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
(0,1) & (0,2) & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & (3,1) & (3,2) & (4,1) & (4,2) & \cdots
\end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|cc||cc||cc||cc||c}
-a_0 & \alpha & \lambda_1 & 0 & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \cdots \\
\beta & -b_0 & 0 & \lambda_2 & & & & & & & \\ \hline
\mu & 0 & -a_1 & \alpha & \lambda_1 & 0 & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \cdots \\
0 & \mu & \beta & -b_1 & 0 & \lambda_2 & & & & & \\ \hline\hline
\multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{O}} & 2\mu & 0 & -a_2 & \alpha & \lambda_1 & 0 & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \cdots \\
 & & 0 & 2\mu & \beta & -b_2 & 0 & \lambda_2 & & & \\ \hline\hline
\multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{O}} & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & 2\mu & 0 & -a_2 & \alpha & \lambda_1 & 0 & \cdots \\
 & & & & 0 & 2\mu & \beta & -b_2 & 0 & \lambda_2 & \\ \hline\hline
\multicolumn{2}{c|}{\boldsymbol{O}} & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & \multicolumn{2}{c||}{\boldsymbol{O}} & 2\mu & 0 & -a_2 & \alpha & \cdots \\
 & & & & & & 0 & 2\mu & \beta & -b_2 & \\ \hline\hline
\multicolumn{2}{c|}{\vdots} & \multicolumn{2}{c||}{\vdots} & \multicolumn{2}{c||}{\vdots} & \multicolumn{2}{c||}{\vdots} & \multicolumn{2}{c||}{\vdots} & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
$$

おわりに (1)

$\boldsymbol{R}$ の確率的解釈

$$\boldsymbol{\pi}_{k+1} = \boldsymbol{\pi}_k \boldsymbol{R}$$

$\boldsymbol{R}$ の (i,j) 要素 $R_{i,j}$:

$C(k,j)$: 状態 (k,i) から出発し、再びレベル k を訪れるまでの期間

$$R_{i,j} = \frac{C(k,i) \text{ 内で状態 } (k+1,j) \text{ に滞在する時間の総和の平均}}{C(k,i) \text{ 内で状態 } (k,i) \text{ に滞在する平均時間}}$$

（任意の定常な２変数マルコフ連鎖において、

$\boldsymbol{\pi}_{k+1} = \boldsymbol{\pi}_k \boldsymbol{R}_k$ となる $\boldsymbol{R}_k$ が存在）

この滞在時間比がレベル k に依存しない $\Leftrightarrow$ 行列幾何解が存在

おわりに (2)

G/M/1 待ち行列の到着直前の客数：幾何解をもつ：$\pi_k = \pi_1 \gamma^{k-1}$

G/M/1 型マルコフ連鎖は行列幾何解をもつ：$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{R}^{k-1}$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_5 & \boldsymbol{A}_4 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

「１回の遷移で高々一つしかレベルが増加しない」ことが本質的

おわりに (3)

では、その相対問題はどうか　$\Rightarrow$　M/G/1 型マルコフ連鎖

「１回の遷移で高々一つしかレベルが減少しない」

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_5 & \cdots \\
\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 & \boldsymbol{A}_5 & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

（$\boldsymbol{R}$ は k に依存　$\Rightarrow$　行列幾何解は存在せず）

しかし、準出生死滅過程は M/G/1 型マルコフ連鎖の特殊な例

おわりに (4)

率行列 $\boldsymbol{R}$ の計算手法

今回、紹介した方法は、収束が早くなく、停止条件も曖昧

M/G/1 型マルコフ連鎖としての見方を利用した

より高速のアルゴリズムあり

参考書

牧本直樹、待ち行列アルゴリズム　—行列解析アプローチ—、

朝倉書店、2001