待ち行列への点過程アプローチ: 入門編

三好 直人
miyoshi@is.titech.ac.jp

東京工業大学

第 6 回 学生・初学者のための待ち行列チュートリアル
2010 年 6 月 19 日 (土)

はじめに: 点過程アプローチとは?

- (待ち行列における客の到着や退去など) 出来事の起こる時刻の列を実数軸上のランダムな点列とみなす
- (待ち行列解析でよく使われる) ポアソン過程，再生過程，マルコフ再生過程，マルコフ到着過程などは点過程の例
- 独立性やマルコフ性は (最初からは) 仮定しない
  (通常，定常性は仮定する)
- 必ずしも，定量的・数値的な評価を目的としたものではない
- 分布によらない一般的な結果が得られる (こともある)
  (得られた結果はマルコフ・モデルにも適用できる)
- 確率空間を直接扱うので難しそう?
  (定常点過程に対するパルム理論はそんなに難しくない)

はじめに: 点過程アプローチとは?

定常マーク付き点過程
- マーク付き点過程
- 定常性とシフト作用素
- 定常点過程の強度

パルム確率

パルム理論の基本公式とその応用
- キャンベルの公式
- 宮沢の率保存則
- その他の基本公式
- ランダム・サンプリングと PASTA

おわりに

主な参考文献

はじめに: 点過程アプローチとは?

定常マーク付き点過程

マーク付き点過程

定常性とシフト作用素

定常点過程の強度

パルム確率

パルム理論の基本公式とその応用

キャンベルの公式

宮沢の率保存則

その他の基本公式

ランダム・サンプリングと PASTA

おわりに

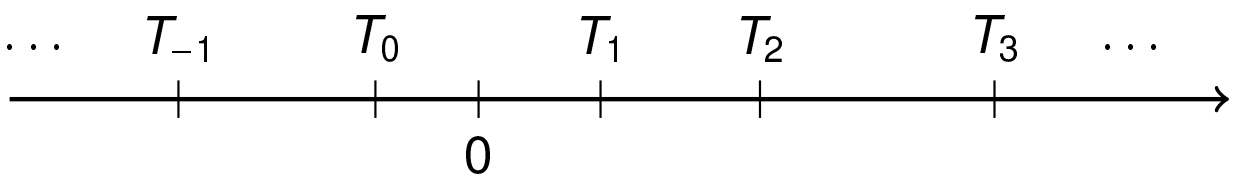
主な参考文献

実数軸 $\mathbb{R}$ 上の点列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: 待ち行列への客の到着時刻列など ($\mathbb{Z}$: 整数の集合)

$$\cdots < T_{-1} < T_0 \le 0 < T_1 < T_2 < \cdots \qquad \text{(単純)}$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} T_n = \pm\infty \quad \text{(複号同順)} \qquad \text{(局所的に有限)}$$



単純: 同じ位置に複数の "点" が重ならない (集団到着は考えない)
(この仮定は外すことができる)

局所的に有限: 有界な区間には有限個の点

添え字の付け方の約束

(0 を含まずに) 正の方向に順番に $1, 2, 3, \ldots$

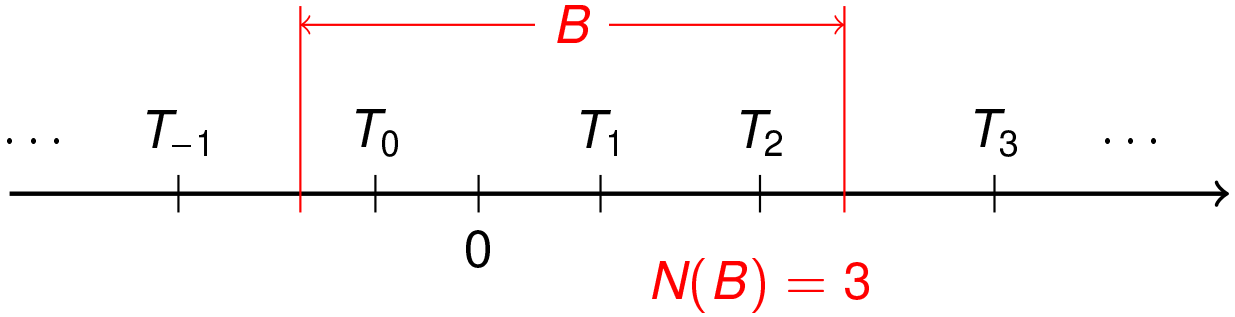
(0 を含めて) 負の方向に順番に $0, -1, -2, \ldots$

点を数える: 実数軸 $\mathbb{R}$ 上の計数測度 N

$N(B)$: $\mathbb{R}$ 上の区間 (の和集合) B にある "点" の数

$$N(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(T_n)$$

ここで, $\mathbf{1}_B(t) = \begin{cases} 1 & t \in B \\ 0 & t \notin B \end{cases}$



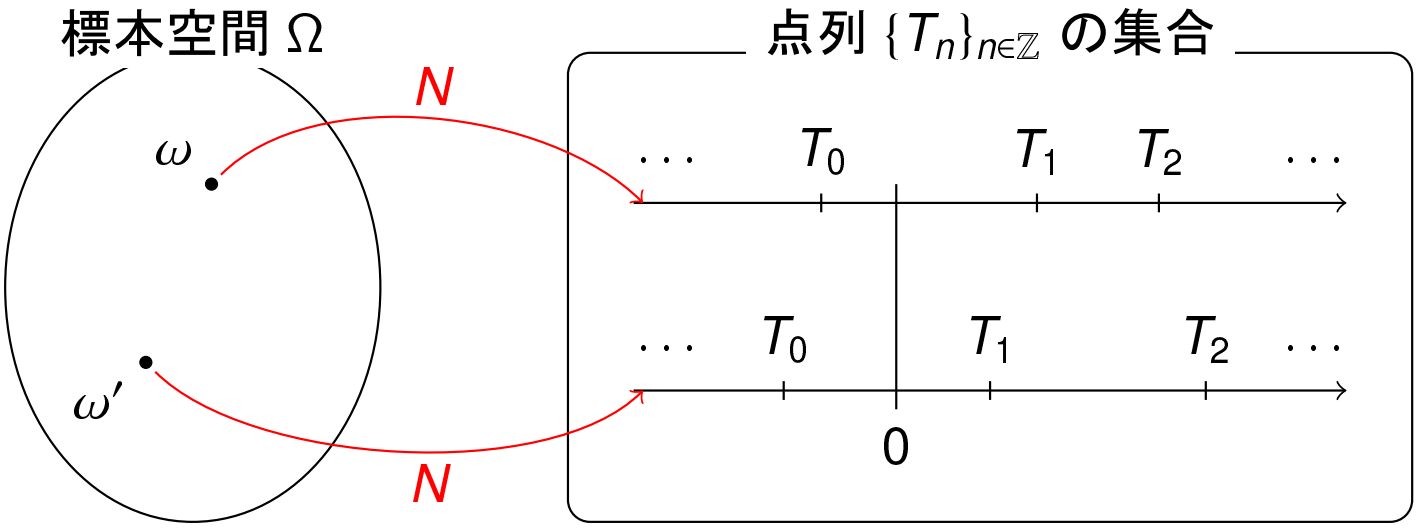
N と $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は 1 : 1 対応 ($N = \{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と書くこともある)

単純: 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $N(\{t\}) \in \{0, 1\}$

局所的に有限: 有界な区間 B に対して $N(B) < \infty$

実数軸 $\mathbb{R}$ 上の点過程

点列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (計数測度 N) はランダムに定まる



Ω 上に確率 P が定義されている ➪ $N\ (=\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: $\mathbb{R}$ 上の点過程

N, T_n $(n\in\mathbb{Z})$ は ω の関数

$N(\omega, B)$, $T_n(\omega)$ 等と書くべき?

特に必要がなければ ω を省略 ➪ $N(B)$, T_n

マーク付き点過程

待ち行列にやって来る客は何らかの付属情報を持っている
サービス時間，優先クラス，ネットワーク内の経路など

マーク付き点過程

$N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: $\mathbb{R}$ 上の点過程

$\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: 集合 K (モデルに依存) 上に値をとる確率変数の列

⇨ $N_Z = \{(T_n, Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$: (マーク空間 K の) マーク付き点過程

ここで，$\mathbb{R}$ 上の区間 B と K 上の区間 C に対して

$$N_Z(B, C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(T_n)\,\mathbf{1}_C(Z_n)$$

区間 B 内にある点のうち，マークの値が C 内にあるものの数
($\mathbb{R} \times K$ 上の計数測度)

定常な確率過程

定常性: 時間が変わっても確率分布が変わらない
(確率分布が時間に関して不変)

(実数値) 確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が (確率 P に関して) 定常 $\Leftrightarrow$

$$\mathrm{P}\Big(X(s_1)\in C_1, X(s_2)\in C_2, \ldots, X(s_m)\in C_m\Big)$$
$$= \mathrm{P}\Big(X(s_1+t)\in C_1, X(s_2+t)\in C_2, \ldots, X(s_m+t)\in C_m\Big)$$

m: 任意の自然数

$s_1, s_2, \ldots, s_m, t$: 任意の実数

$C_1, C_2, \ldots, C_m$: $\mathbb{R}$ 上の任意の区間

定常点過程

点過程 $N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ が (P に関して) 定常 $\Leftrightarrow$

$$\mathrm{P}\Big(N(B_1) = k_1, N(B_2) = k_2, \ldots, N(B_m) = k_m\Big)$$
$$= \mathrm{P}\Big(N(B_1 + t) = k_1, N(B_2 + t) = k_2, \ldots, N(B_m + t) = k_m\Big)$$

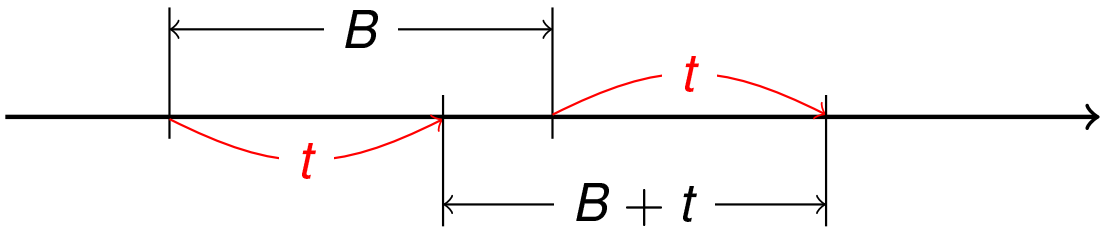
m: 任意の自然数

$B_1, B_2, \ldots, B_m$: $\mathbb{R}$ 上の任意の区間

$k_1, k_2, \ldots, k_m$: 任意の非負整数

t: 任意の実数

ここで，$\mathbb{R}$ 上の区間 B に対して $B + t = \{s + t \in \mathbb{R} \mid s \in B\}$



定常なマーク付き点過程

マーク付き点過程 N_Z $(= \{(T_n, Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}})$ が (P に関して) 定常 $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\Big(N_Z(B_1, C_1) = k_1, \ldots, N_Z(B_m, C_m) = k_m\Big)\\&\qquad = \mathrm{P}\Big(N_Z(B_1 + t, C_1) = k_1, \ldots, N_Z(B_m + t, C_m) = k_m\Big)\end{aligned}$$

m: 任意の自然数

$B_1, B_2, \ldots, B_m$: $\mathbb{R}$ 上の任意の区間

$C_1, C_2, \ldots, C_m$: マーク空間 K 上の任意の区間

$k_1, k_2, \ldots, k_m$: 任意の非負整数

t: 任意の実数

時間が変わっても，マークの値が $C_1, C_2, \ldots, C_m$ にある点の数の分布は変わらない

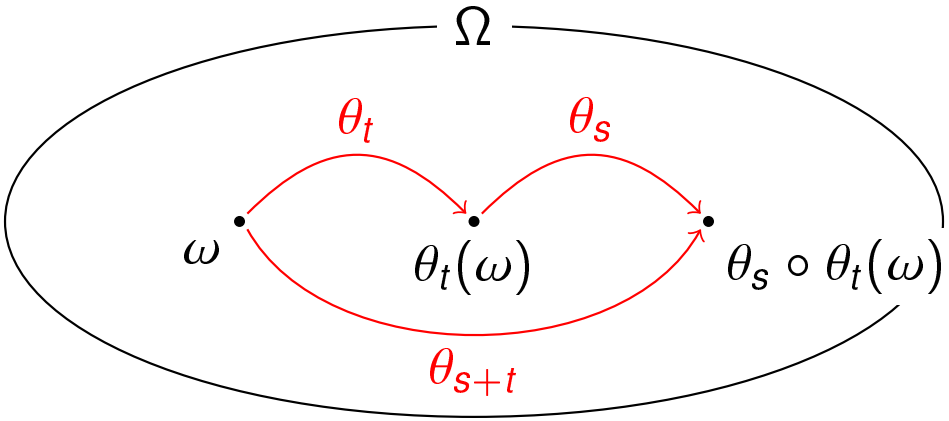
シフト作用素

($\mathbb{R}$ 上の) 時間の変化を (Ω 上の) 標本の変化に対応させる

シフト作用素 θ_t, $t \in \mathbb{R}$

- 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して θ_t は標本空間 Ω から Ω への全単射
- $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$ かつ θ_0 は恒等写像

"$\circ$" は写像の合成: $\theta_s \circ \theta_t(\omega) = \theta_s(\theta_t(\omega)),\ \omega \in \Omega$

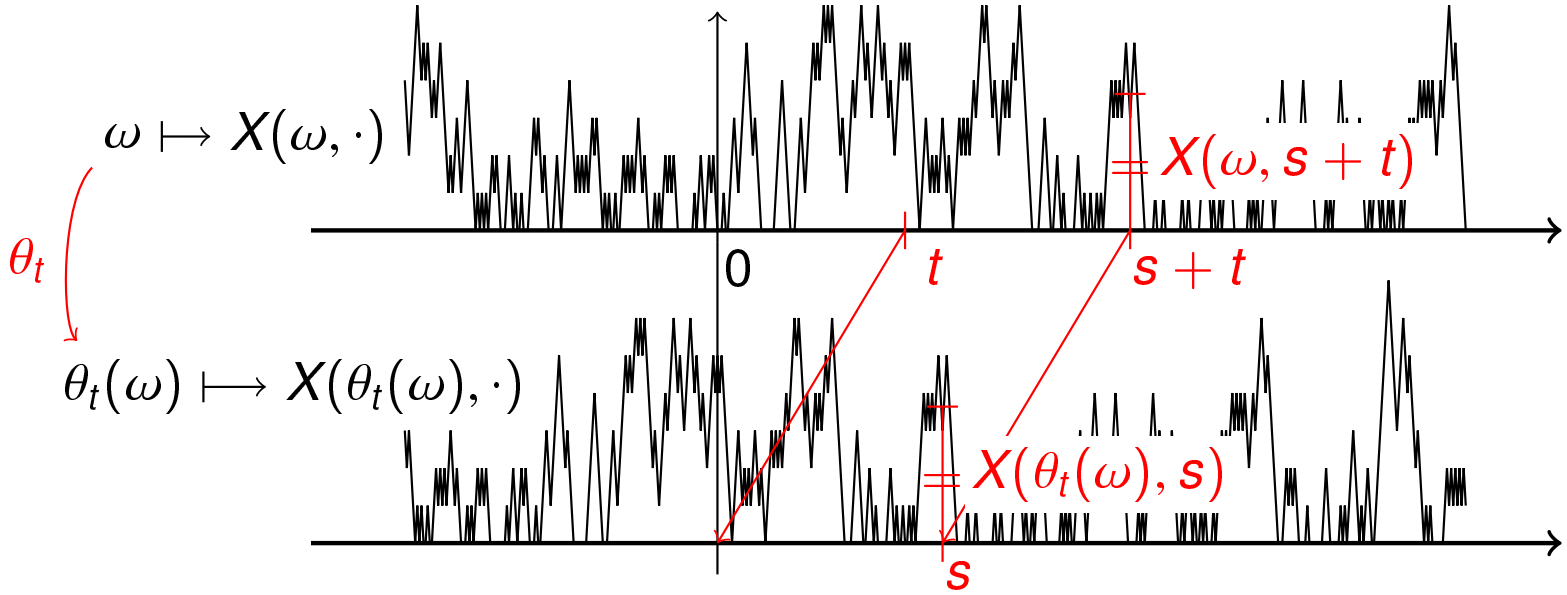


$\theta_{-t} \circ \theta_t = \theta_0 \Rightarrow \theta_t^{-1} = \theta_{-t},\ t \in \mathbb{R}$

シフト作用素に連動する確率過程

確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動 $\Leftrightarrow$

$$X(\theta_t(\omega),\ s) = X(\omega,\ s+t), \quad \omega \in \Omega, \quad s, t \in \mathbb{R}$$



原点 0 の位置: 観測者の視点の位置

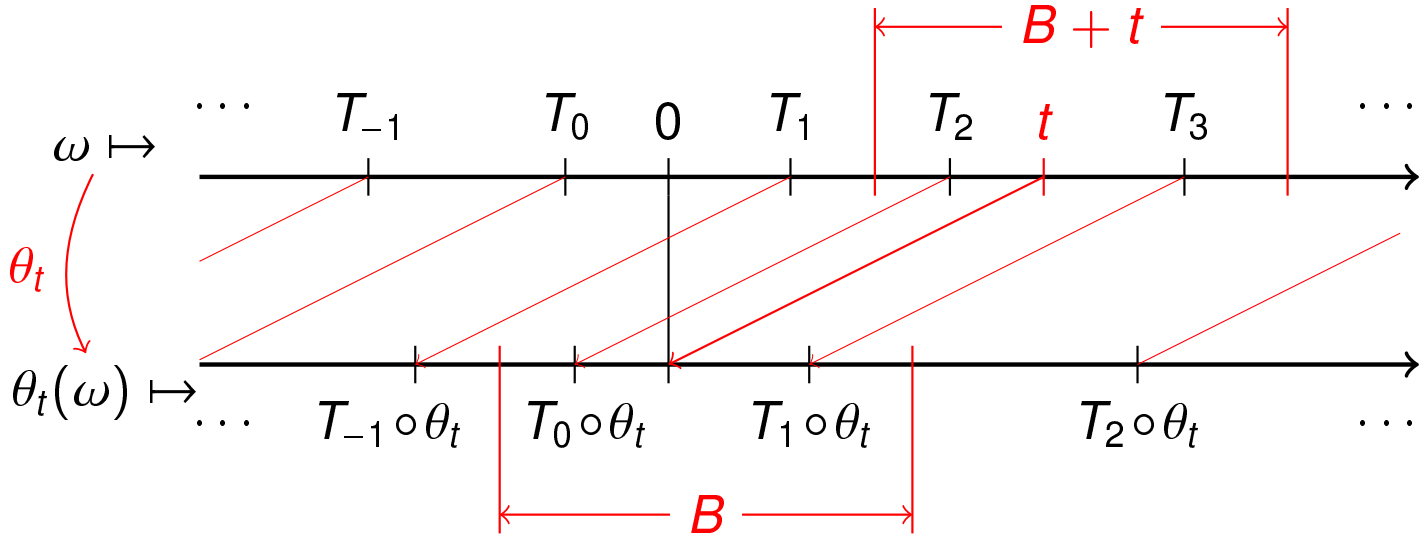
$\theta_t(\omega)$: ω によって定まる標本路を時刻 t に観測することに対応

シフト作用素に連動する点過程

点過程 $N\ (= \{(T_n)\}_{n\in\mathbb{Z}})$ が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動 $\Leftrightarrow$

$$N(\theta_t(\omega),\ B) = N(\omega,\ B+t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

B: $\mathbb{R}$ 上の任意の区間



表記上の注意 (ω の省略): $T_n(\theta_t(\omega)) = T_n \circ \theta_t(\omega)$ ➪ $T_n \circ \theta_t$

添え字が付け変わる: $T_n \circ \theta_t = \begin{cases} T_{n+N((0,t])} - t, & t > 0 \\ T_{n-N((t,0])} - t, & t < 0 \end{cases}$

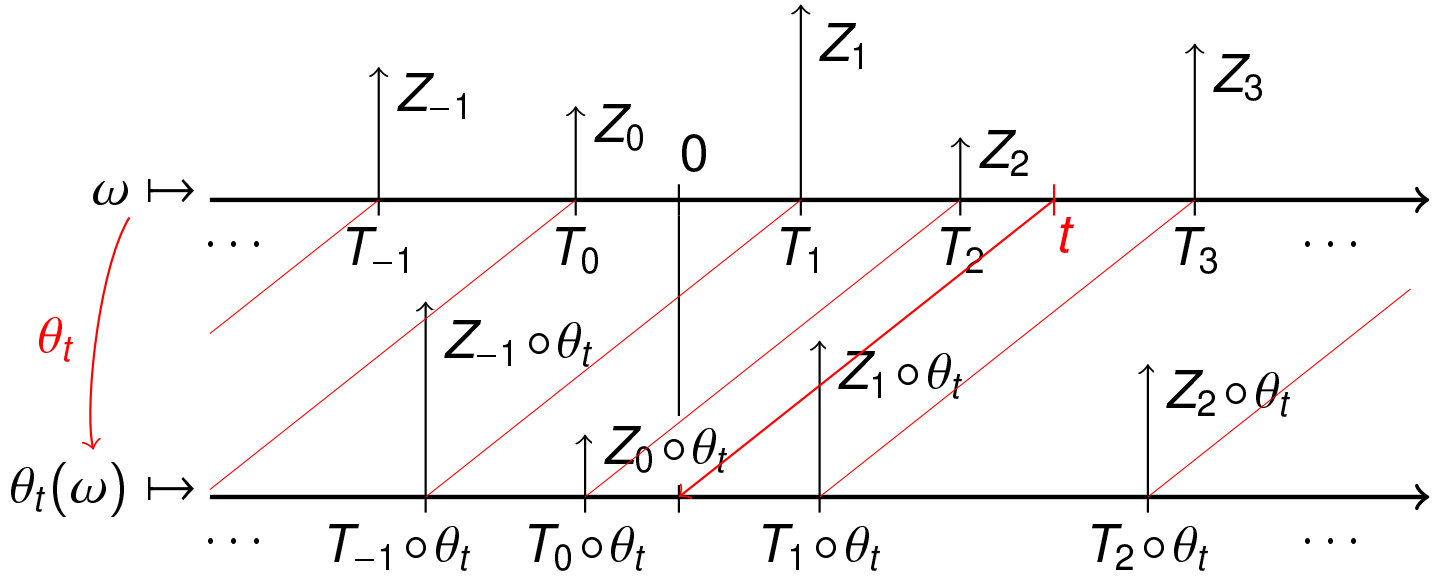
シフト作用素に連動するマーク付き点過程

マーク付き点過程 N_Z $(= \{(T_n, Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}})$ が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動 $\Leftrightarrow$

$$N_Z \circ \theta_t(B,\, C) = N_Z(B + t,\, C), \quad t \in \mathbb{R}$$

B: $\mathbb{R}$ 上の任意の区間

C: マーク空間 K 上の任意の区間



$$Z_n \circ \theta_t = \begin{cases} Z_{n+N((0,t])}, & t > 0 \\ Z_{n-N((t,0])}, & t < 0 \end{cases}$$

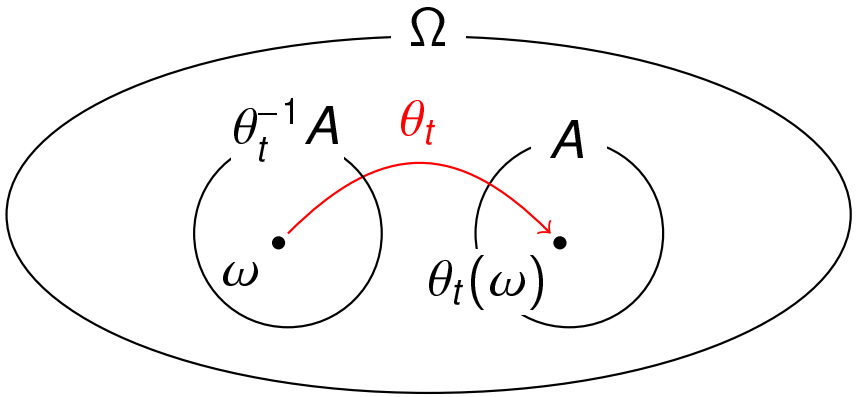
定常性とシフト作用素

確率 P が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して不変 ($\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が P に対して保測) $\Leftrightarrow$

任意の事象 A に対して

$$\mathrm{P}(\theta_t^{-1}A) = \mathrm{P}(A) \qquad (\mathrm{P}\circ\theta_t^{-1} = \mathrm{P})$$

ここで，$\theta_t^{-1}A = \{\omega\in\Omega \mid \theta_t(\omega)\in A\}$



定理: 確率 P が $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して不変 ($\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が P に対して保測)

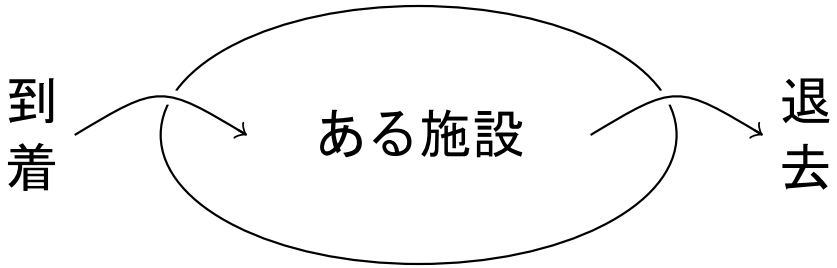
➪ $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動する確率過程は P に関して定常

定常性を示すには $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動することを示せば良い

複数の確率過程が P に対して保測な $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動 $\Leftrightarrow$ 同時に定常

例: シフト作用素を用いて定常性を示す (モデル設定)

ある施設に客が次々に到着し，しばらく滞在したあと退去する



$N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の到着時刻列

$W_n,\ n \in \mathbb{Z}$: 時刻 T_n に到着した客の滞在時間

仮定

- 確率 P は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して不変
- マーク付き点過程 $N_W\ (= \{(T_n, W_n)\}_{n\in\mathbb{Z}})$ は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動
- $W_n,\ n \in \mathbb{Z}$, は有限 (安定性の問題)

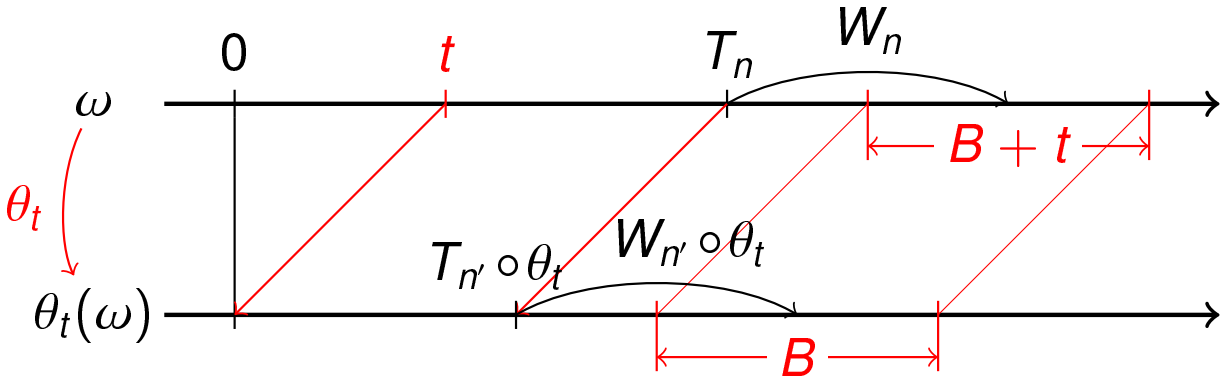
例: シフト作用素を用いて定常性を示す (退去過程)

N' $(= \{T_n + W_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の退去時刻列

$(T_n + W_n < T_m + W_m \ (n < m)$ とは限らない)

$$N'(B+t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{B+t}(T_n + W_n)$$
$$= \sum_{n'\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(T_{n'} + W_{n'}) \circ \theta_t = N' \circ \theta_t(B)$$

(N' も $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動)



⇨ 退去時刻を表す点過程も $\{(T_n, W_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と同時に定常

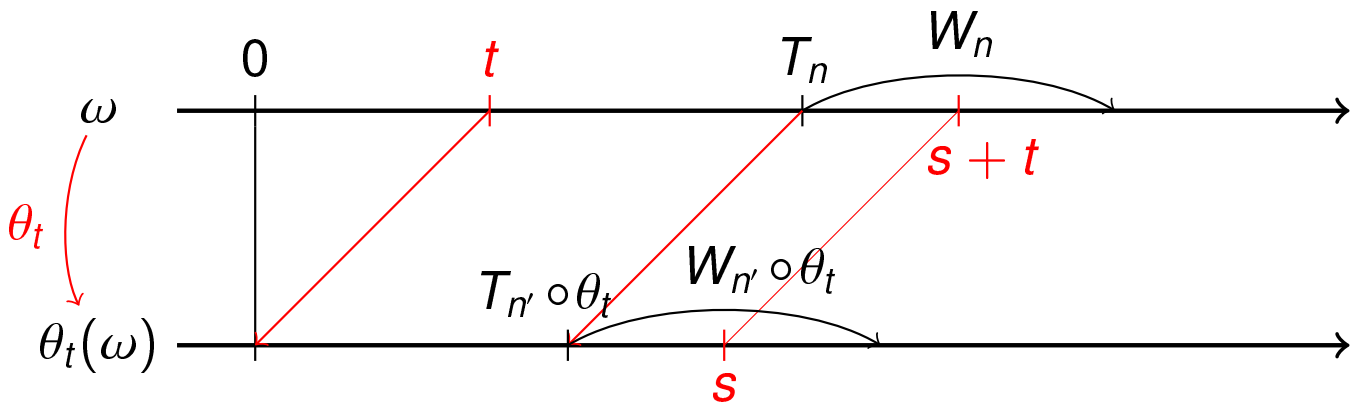
例: シフト作用素を用いて定常性を示す (系内客数)

$L(t)$, $t \in \mathbb{R}$: 時刻 t に施設内にいる客数

$\{$ T_n に到着した客が時刻 s に施設内にいる $\} = \{T_n \le s < T_n + W_n\}$

$$
\begin{aligned}
L(s+t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_n,\, T_n + W_n)}(s+t) \\
&= \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_{n'},\, T_{n'} + W_{n'}) \circ \theta_t}(s) = L(s) \circ \theta_t
\end{aligned}
$$

($\{L(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ も $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ に連動)



⇨ 施設内にいる客数を表す確率過程も $\{(T_n, W_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と同時に定常

定常点過程の強度

定常点過程の強度: 単位時間当たりの点の数の期待値，点の現れる頻度 (単位時間当たりに到着する客数の期待値)

点過程 $N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ の強度 λ

$$\lambda = \mathrm{E}(N((0,1]))$$

E: 確率 P に関する期待値

- $\lambda > 0$ ⇨ $\mathrm{P}\Big(N((-\infty,0)) = N((0,\infty)) = +\infty\Big) = 1$
- $\lambda < \infty$ ⇨ $\mathrm{P}(N(\{t\}) > 0) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ (⇨ $\mathrm{P}(T_0 = 0) = 0$)

  任意の区間 B に対して

  $\mathrm{E}(N(B)) = \lambda\,|B|$ ($|B|$: 区間 B の長さ)

以下，$\lambda \in (0,\infty)$ と仮定

例: 施設からの退去過程の強度

前の例のつづき: ある施設に客が次々に到着し，しばらく滞在したあと退去する

$N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の到着時刻列
$W_n,\ n \in \mathbb{Z}$: 時刻 T_n に到着した客の滞在時間
$N'\ (= \{T_n + W_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の退去時刻列
$L(t),\ t \in \mathbb{R}$: 時刻 t に施設内にいる客数
$\mathrm{E}(L(0)) < \infty$ と仮定

$$L(1) = L(0) + N((0,1]) - N'((0,1])$$

両辺の期待値をとると (定常性より $\mathrm{E}(L(1)) = \mathrm{E}(L(0))$)

退去過程の強度

$$\lambda' = \mathrm{E}(N'((0,1])) = \mathrm{E}(N((0,1])) = \lambda$$

はじめに: 点過程アプローチとは?

定常マーク付き点過程
- マーク付き点過程
- 定常性とシフト作用素
- 定常点過程の強度

パルム確率

パルム理論の基本公式とその応用
- キャンベルの公式
- 宮沢の率保存則
- その他の基本公式
- ランダム・サンプリングと PASTA

おわりに

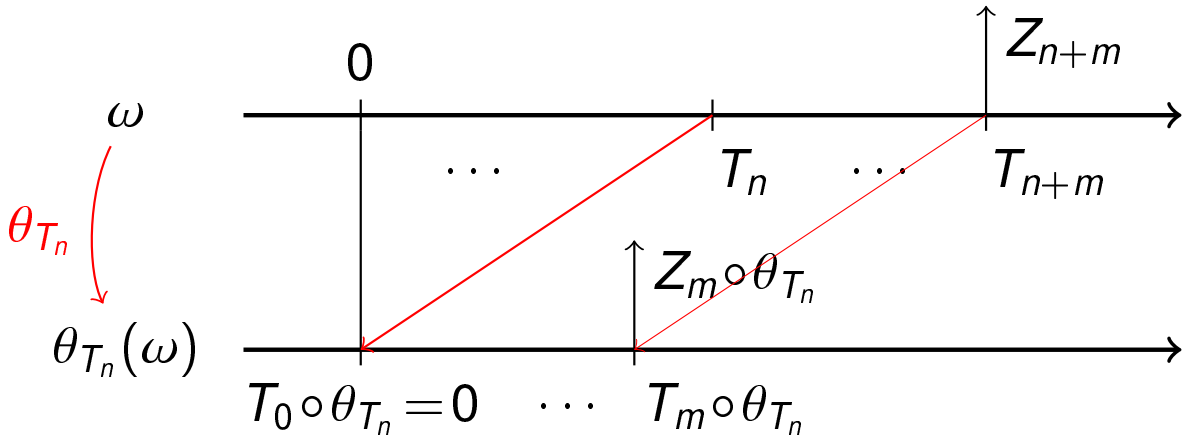
主な参考文献

マーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は P に関して定常ではない!

- 確率 P は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ (連続的な時間の変化) に対して不変
- マーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は離散的な添え字を持つ

⇨ 定常マーク付き点過程のマーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は (一般に) 確率 P に関して定常ではない!

$$\mathrm{P}(Z_{n_1} \in C_1, \ldots, Z_{n_k} \in C_k) \neq \mathrm{P}(Z_{n_1+m} \in C_1, \ldots, Z_{n_k+m} \in C_k)$$

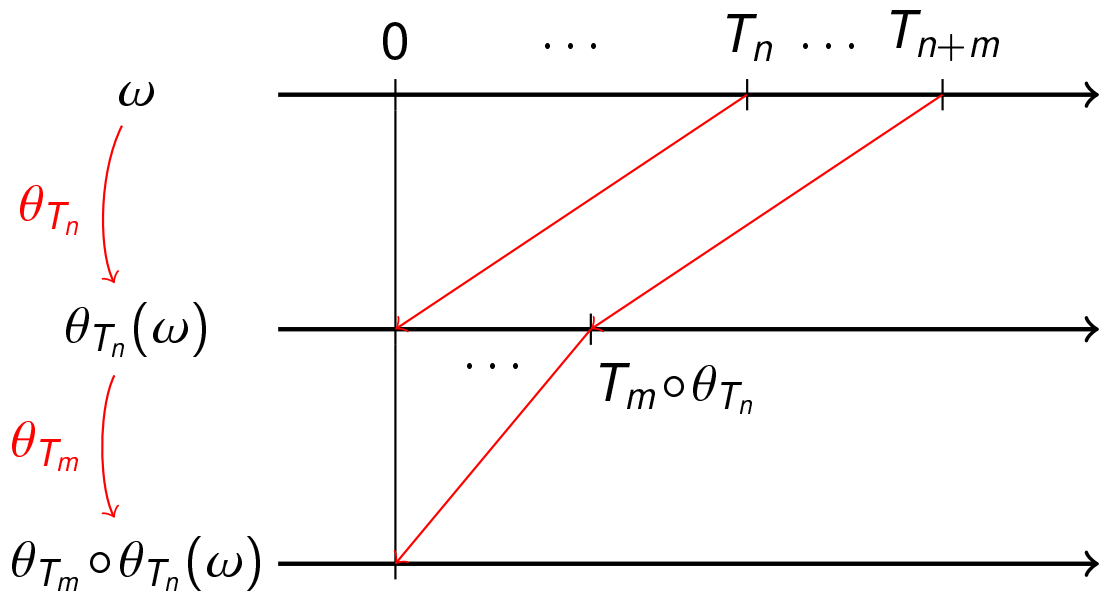


$$Z_{n+m} = Z_m \circ \theta_{T_n}, \quad n,\, m \in \mathbb{Z}$$

$\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が定常となるのは $\{\theta_{T_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対して不変な確率に関して

ランダムなシフト θ_{T_n}

θ_{T_n}, $n \in \mathbb{Z}$: どれだけシフトするかは標本に依存



$$\theta_{T_m} \circ \theta_{T_n} = \theta_{T_{n+m}}, \quad n,\ m \in \mathbb{Z} \qquad (\theta_{T_m} \circ \theta_{T_n} \neq \theta_{T_n+T_m})$$

$\Omega_0 = \{T_0 = 0\}$ 上で

- $\theta_{T_n} = (\theta_{T_1})^n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad ((\theta_{T_1})^0 = \theta_{T_0} = \theta_0$: 恒等写像)
- $\theta_{T_{-n}} \circ \theta_{T_n} = \theta_{T_0} = \theta_0 \Rightarrow \theta_{T_n}^{-1} = \theta_{T_{-n}}, \ n \in \mathbb{Z}$

パルム確率

パルム (Palm) 確率

任意の事象 A に対して

$$\mathrm{P}_N^0(A) = \frac{1}{\lambda\,(t-s)}\,\mathrm{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_A \circ \theta_{T_n}\,\mathbf{1}_{(s,t]}(T_n)\Big), \quad s,t\in\mathbb{R}\ (s<t)$$

$$\mathrm{P}_N^0(A) = \frac{\mathrm{E}\left(\begin{array}{l}\text{区間 } (s,t] \text{ にある点のうち，その点の}\\ \text{位置で見た標本が } A \text{ を満たすものの数}\end{array}\right)}{\mathrm{E}\big(\text{区間 } (s,t] \text{ にある点の数}\big)}$$

定常性より s, t $(s<t)$ の選び方には依存しない

パルム確率に関する期待値

Y: 実数値確率変数

$$\mathrm{E}_N^0(Y) = \frac{1}{\lambda\,t}\,\mathrm{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y\circ\theta_{T_n}\,\mathbf{1}_{(0,t]}(T_n)\Big), \quad t>0$$

パルム確率の性質

- $\mathrm{P}_N^0(T_0 = 0) = 1$ ⇦ 到着客の視点　　$(\leftrightarrow \mathrm{P}(T_0 = 0) = 0)$

  外部観測者の視点
- $\mathrm{E}_N^0(T_1) = \mathrm{E}_N^0(T_{n+1} - T_n) = 1/\lambda$
- $\{\theta_{T_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に関して不変

任意の事象 A に対して

$$\mathrm{P}_N^0(\theta_{T_n}^{-1} A) = \mathrm{P}_N^0(A) \qquad (\mathrm{P}_N^0 \circ \theta_{T_n}^{-1} = \mathrm{P}_N^0), \quad n \in \mathbb{Z}$$

⇨ マーク列 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は P_N^0 に関して定常

- 実数値をとるマークに対して ($Z_n = Z_0 \circ \theta_{T_n}$ より)

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} Z_n \mathbf{1}_{(0,t]}(T_n)\Big) = \lambda\, t\, \mathrm{E}_N^0(Z_0)$$

$\mathrm{E}\big((0,t]$ 内にある点のマークの和$\big)$

$= \mathrm{E}\big((0,t]$ 内の点の数$\big) \times \mathrm{E}_N^0\big(1$ つのマークの値$\big)$

確率 P で評価される量と P_N^0 で評価される量

時間不変な確率 P で評価される量 $=$ 任意時点で定義される量:
定常状態における施設内の客数
定常状態における残余仕事量 (仮待ち時間) など

パルム確率 P_N^0 で評価される量

- N が客の到着時刻列 ➪ 客ごとに定義される量:
  サービス時間，待ち時間，到着時刻における施設内の客数，
  到着時刻における残余仕事量 (滞在時間)，呼損など

- N が稼働期間の開始時刻列 ➪ 稼働期間ごとに定義される量:
  稼働期間の長さ，稼働期間中にサービスされる客数など

はじめに: 点過程アプローチとは?

定常マーク付き点過程

マーク付き点過程

定常性とシフト作用素

定常点過程の強度

パルム確率

パルム理論の基本公式とその応用

キャンベルの公式

宮沢の率保存則

その他の基本公式

ランダム・サンプリングと PASTA

おわりに

主な参考文献

キャンベルの公式

以降の仮定:

- 確率 P は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に対して不変
- マーク付き点過程 N_Z $(=\{(T_n, Z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}})$ は $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動
- N は単純で強度 λ は正で有限
- 期待値の存在

キャンベル (Campbell) の公式

f: $\mathbb{R}\times K$ から $\mathbb{R}$ への関数

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(T_n, Z_n)\Big) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}_N^0\big(f(s, Z_0)\big)\,\mathrm{d}s$$

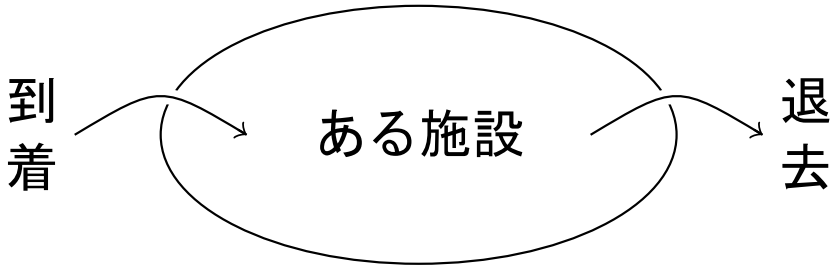
キャンベルの公式 = パルム確率の定義式の一般化

Z_n は実数値をとるものとして $f(s, Z_n) = Z_n\,\mathbf{1}_{(0,t]}(s)$ とおくと

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} Z_n\,\mathbf{1}_{(0,t]}(T_n)\Big) = \lambda\, t\, \mathrm{E}_N^0(Z_0) \quad \text{(パルム確率に関する期待値)}$$

キャンベルの公式の応用例: (定常版) リトルの公式 (1/2)

前の例のつづき: ある施設に客が次々に到着し，しばらく滞在したあと退去する



$N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の到着時刻列

$W_n,\ n \in \mathbb{Z}$: 時刻 T_n に到着した客の滞在時間

$L(t),\ t \in \mathbb{R}$: 時刻 t に施設内にいる客数

$$L(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[T_n, T_n+W_n)}(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

キャンベルの公式の応用例: (定常版) リトルの公式 (2/2)

キャンベルの公式

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(T_n, W_n)\Big) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}_N^0\big(f(t, W_0)\big)\,\mathrm{d}t$$

に $f(t, w) = \mathbf{1}_{[t,t+w)}(0)$ を代入

$$\text{左辺} = \mathrm{E}(L(0))$$

$$\text{右辺} = \lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}_N^0\big(\mathbf{1}_{[t,t+W_0)}(0)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{E}_N^0\Big(\int_{-W_0}^{0} \mathrm{d}t\Big) = \lambda\,\mathrm{E}_N^0(W_0)$$

(定常版) リトル (Little) の公式

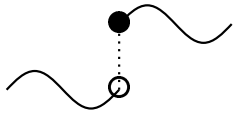
$$\mathrm{E}(L(0)) = \lambda\,\mathrm{E}_N^0(W_0)$$

(平均系内客数) = (到着率) × (平均滞在時間)

宮沢の率保存則

実数値確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$:

- $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動
- 標本路は右連続で左極限を持つ
- 標本路は $t \in \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を除いて連続で微分可能
  (時刻 t での微分係数 $X'(t)$)



宮沢 (Miyazawa) の率保存則

$$\mathrm{E}(X'(0)) + \lambda\,\mathrm{E}_N^0\Big(X(0) - X(0-)\Big) = 0$$

(第 1 項) = (連続なところでの変化率)

(第 2 項) = (不連続点の現れる頻度) × (不連続点での平均変化量)

全体として変化率は 0

宮沢の率保存則: 複数の点過程

複数の点過程 $N_1, N_2, \ldots, N_d$:

- すべて単純で $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動
- それぞれの強度 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ が正かつ有限
- 共通点を持たない

⇨ パルム確率 $\mathrm{P}^0_{N_i}$ (とその期待値 $\mathrm{E}^0_{N_i}$), $i = 1, 2, \ldots, d$

率保存則: 複数の点過程 $N_1, N_2, \ldots, N_d$

$$\mathrm{E}(X'(0)) + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \, \mathrm{E}^0_{N_i}\Big(X(0) - X(0-)\Big) = 0$$

率保存則の応用例: フィンチの公式 (1/2)

前の例のつづき: ある施設に客が次々に到着し，しばらく滞在したあと退去する

$N\ (= \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の到着時刻列，強度 λ

$W_n,\ n \in \mathbb{Z}$: 時刻 T_n に到着した客の滞在時間

$N'\ (= \{T_n + W_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$: 客の退去時刻列，強度 $\lambda' = \lambda$

(仮定: N' も単純で N と共通点を持たない)

$L(t),\ t \in \mathbb{R}$: 時刻 t に施設内にいる客数

$X_k(t) = \mathbf{1}_{\{L(t)>k\}},\ t \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ とおく

- $X_k(t)$ が連続なところで $X_k'(t) = 0$
- 客の到着時刻 T_n において $X_k(T_n) - X_k(T_n-) = \mathbf{1}_{\{L(T_n-)=k\}}$
- 客の退去時刻 T_n' において $X_k(T_n') - X_k(T_n'-) = -\mathbf{1}_{\{L(T_n')=k\}}$

率保存則の応用例: フィンチの公式 (2/2)

$X_k(t) = \mathbf{1}_{\{L(t)>k\}}$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

- P に関して確率 1 で $X_k'(0) = 0$
- P_N^0 に関して確率 1 で $X_k(0) - X_k(0-) = \mathbf{1}_{\{L(0-)=k\}}$
- $\mathrm{P}_{N'}^0$ に関して確率 1 で $X_k(0) - X_k(0-) = -\mathbf{1}_{\{L(0)=k\}}$

率保存則に代入

$$\mathrm{E}(X_k'(0)) + \lambda\, \mathrm{E}_N^0\big(X_k(0) - X_k(0-)\big) + \lambda'\, \mathrm{E}_{N'}^0\big(X_k(0) - X_k(0-)\big) = 0$$

$\Downarrow$ $(\lambda = \lambda')$

フィンチ (Finch) の公式

$$\mathrm{P}_N^0(L(0-) = k) = \mathrm{P}_{N'}^0(L(0) = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(到着直前の客数分布) = (退去直後の客数分布)

その他の基本公式 (1/2)

逆変換公式

A: 事象

$$\mathrm{P}(A) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \mathrm{P}_N^0\Big(\theta_t^{-1} A, t \in (T_n, T_{n+1}]\Big)\,\mathrm{d}t$$

Y: 実数値確率変数

$$\mathrm{E}(Y) = \lambda\, \mathrm{E}_N^0\Big(\int_{T_n}^{T_{n+1}} Y \circ \theta_t\,\mathrm{d}t\Big)$$

時間不変な確率 P をパルム確率 P_N^0 で表現

P_N^0 の $\{\theta_{T_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に対する不変性より n のとり方によらない

前の例において，$L(t) = L(0) \circ \theta_t$，$\lambda = 1/\mathrm{E}_N^0(T_1)$ より

$$\mathrm{E}(L(0)) = \frac{\mathrm{E}_N^0\Big(\int_0^{T_1} L(t)\,\mathrm{d}t\Big)}{\mathrm{E}_N^0(T_1)}$$

(サイクル公式とも呼ばれる)

その他の基本公式 (2/2)

$N = \{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $N' = \{T'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$: 同時に定常な 2 つの点過程
(共通点があっても構わない)

λ, λ' $(\in (0,\infty))$: N, N' の強度

ネヴー (Neveu) の交換公式

Y: 実数値確率変数

$$\lambda\, \mathrm{E}^0_N(Y) = \lambda'\, \mathrm{E}^0_{N'}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y\circ\theta_{T_n}\, \mathbf{1}_{(0,T'_1]}(T_n)\Big)$$

- $Y = 1$ を代入 ⇨ $\lambda = \lambda'\, \mathrm{E}^0_{N'}\big(N((0,T'_1])\big)$
- $\lambda/\lambda' = \mathrm{E}^0_{N'}\big(N((0,T'_1])\big)$, 前の例で $W_n = W_0\circ\theta_{T_n}$ より

$$\mathrm{E}^0_N(W_0) = \frac{\mathrm{E}^0_{N'}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} W_n\, \mathbf{1}_{(0,T'_1]}(T_n)\Big)}{\mathrm{E}^0_{N'}\big(N((0,T'_1])\big)}$$

(これもサイクル公式と呼ばれる)

ランダム・サンプリングと PASTA

$\mathsf{P}_N^0 = \mathsf{P}$ とみなせるのはどんなとき?

$\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$: $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に連動，右連続で左極限を持つ

定理: 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\{X(s)\}_{s<t}$ と $\{N([t,u))\}_{u\geq t}$ が互いに独立 ⇨

$$\mathsf{E}(X(0)) = \mathsf{E}_N^0(X(0-))$$

定理の条件?

- $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ と N が独立 ⇨ ランダム・サンプリング
- $\{X(s)\}_{s<t}$ が $\{N(s,t)\}_{s<t}$ に依存するとき...
  - ⇨ $\{N(s,t)\}_{s<t}$ と $\{N([t,u))\}_{u\geq t}$ は独立
  - ⇨ N はポアソン (Poisson) 過程 (独立増分を持つ)
  - ⇨ PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

前の例では，(到着直前の客数分布) = (退去直後の客数分布)
= (任意時点の客数分布)

おわりに

単純ではない点過程 (集団到着) を扱うには...

- 1 度に到着する集団のサイズをマークとみなす
- 宮沢の詳細パルム確率 (Miyazawa's detailed Palm probability) を用いる (位置の異なる点の間のシフトだけではなく，集団中の客の間のシフトについても不変な確率測度)

PASTA の一般化: ポアソン過程以外の到着過程では...

パパンジェロウ (Papangelou) の公式

$\{\lambda(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$: 確率強度 (時刻 t までの履歴が与えられたとき $t+$ に点が現れる条件付き強度)

$$\mathrm{E}(\lambda(0)\,X(0)) = \lambda\,\mathrm{E}_N^0(X(0-))$$

すべての点過程が確率強度を持つわけではない!
(マルコフ到着過程は確率強度を持つ)

今後の展開: 空間点過程，ランダム測度，...

主な参考文献

- Baccelli, F. & Brémaud, P. (2003).
  Elements of Queueing Theory: Palm-Martingale Calculus and Stochastic Recurrences, 2nd Ed., Springer
  Chapters 1 & 3 (Chap. 2 は安定性，Chap. 4 は確率順序)
- 宮沢 (1991). 待ち行列の点過程モデルと率保存則.
  オペレーションズ・リサーチ, vol. 36, pp. 164–168.
- 宮沢 (2006).
  待ち行列の数理とその応用, 牧野書店
  第 III 部 (第 11, 12 章) にパルム理論と率保存則の応用
- 川島, 町原, 高橋, 斉藤 (1995).
  通信トラヒック理論の基礎とマルチメディア通信網, 電子情報通信学会
  第 3 章にパルム理論とその応用