



生産システムの確率 モデルと最適化

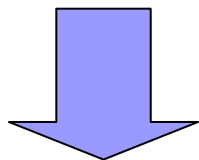
山下 英 明
(首都大学東京)

内容

- 生産システムのモデル化
 - 生産システムの種類
 - 生産指示方式
- 積形式解をもつネットワーク
 - Jackson Network
 - 準可逆な待ち行列のネットワーク
- Generalized Semi-Markov Process
 - 条件(M),(CX)を満たすシステム
 - 異なるGSMPの比較→サンプルパス最適化

生産システムの不確実性

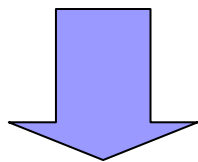
- 加工時間のばらつき
- 加工機械の故障
- 修理時間のばらつき
- 生産要求の変動



ボトルネック, 過剰在庫により加工機械が停止し, 生産性が低下する

単一工程生産システム

- 生産要求の到着:ポアソン到着
- 加工時間のばらつき:指数, 相型, 一般分布
- 加工機械の故障:相型分布
- 修理時間のばらつき:相型分布



M/M/1, M/G/1, M/PH/1, M/MAP/1など

- 性能指標の陽表現が得られる
- 性能指標を数値的に求められる(行列幾何解)

多工程生産システムの分類

■ライン生産

特定の品種の生産のための
専用ラインを設置
(**単品種大量生産**)

■セル生産

Group Technologyを応用し、
工程系列をいくつかのセル
に分類(**中品種中量生産**)

Tandem Queue

■ジョブショップ生産

機械を機能中心に配置し、異なる
工程を持つ品種が同一の機械を
共有(**多品種少量生産**)

■FMS

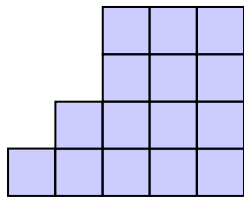
(Flexible Manufacturing System)
多機能機械で構成されるシステム
で複数の品種を自動的に加工
(**中品種中量生産**)

Queueing Network

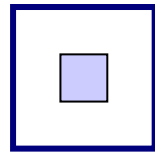
生産指示方式のモデル化

■ フル稼働生産 (Product at line-capacity)

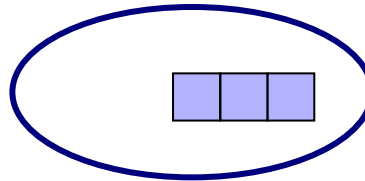
性能指標: スループット, 中間仕掛品量



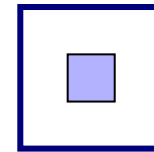
未加工品



工程1



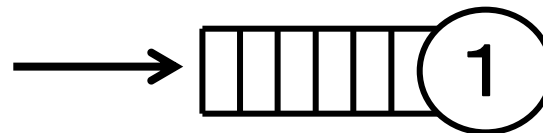
仕掛品バッファ



工程2

工程1の加工時間
= 客の到着間隔

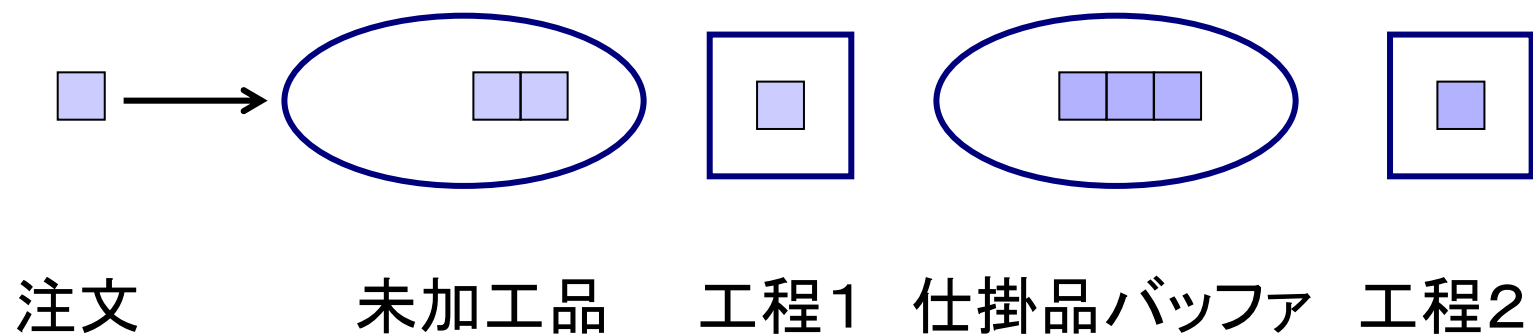
工程2の加工時間
= サービス時間①



生産指示方式のモデル化(cont.)

■ 受注生産 (Product to order)

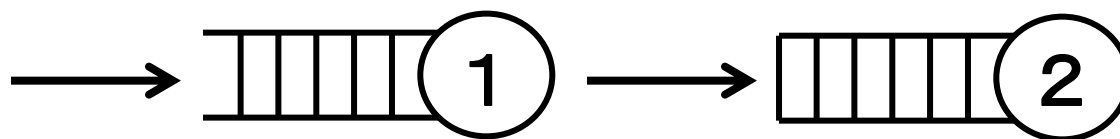
性能指標: リードタイム, 中間仕掛品量



注文の到着間隔
= 客の到着間隔

工程1の加工時間
= サービス時間①

工程2の加工時間
= サービス時間②

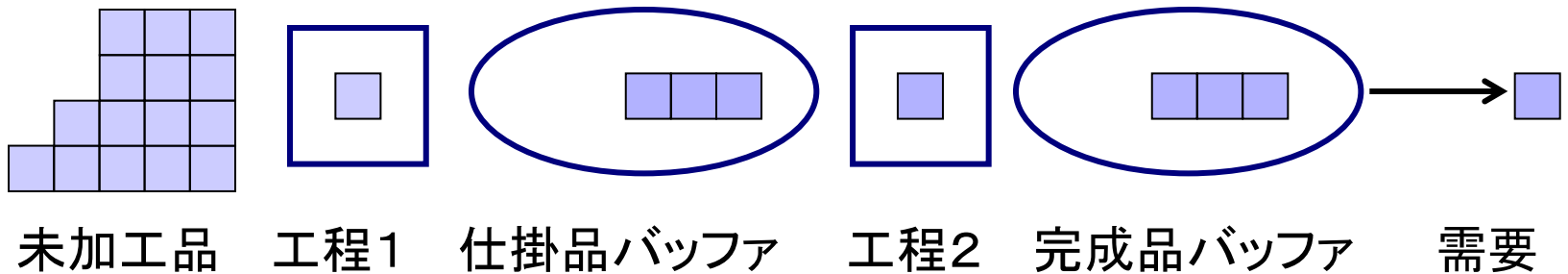


生産指示方式のモデル化(cont.)

■ 見込み生産 (Product to stock)

(1) バックオーダーなしの場合

性能指標: 中間仕掛品量, 完成品在庫量, 品切れ確率

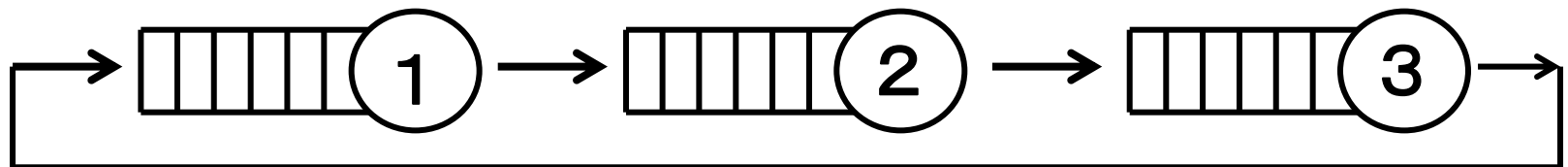


基準在庫数 =
バッファ容量

工程1の加工時間
= サービス時間①

工程2の加工時間
= サービス時間②

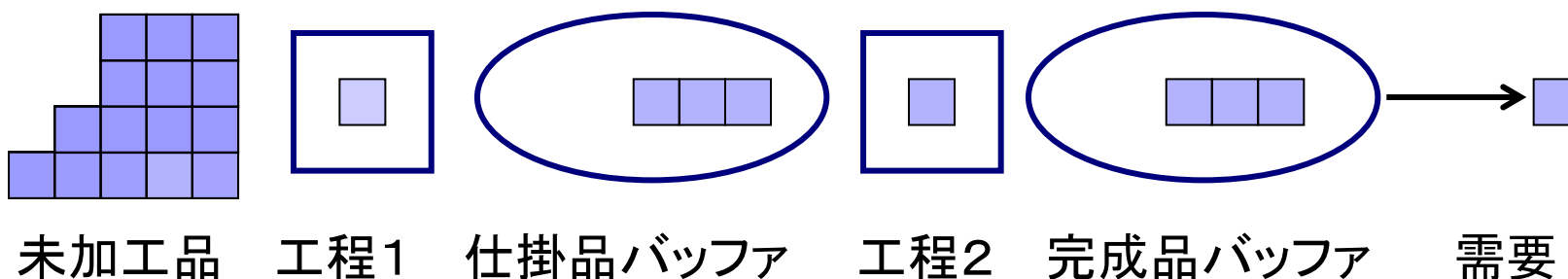
需要の発生間隔
= サービス時間③



生産指示方式のモデル化(cont.)

(2)バックオーダーがある場合

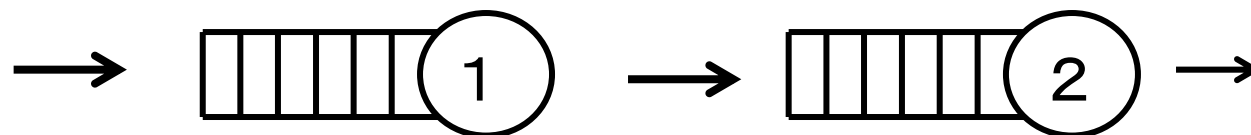
性能指標：中間仕掛品量，完成品在庫量，
バックオーダー量



工程1の加工時間
=客の到着間隔

工程2の加工時間
=サービス時間①

需要の発生間隔
=サービス時間②

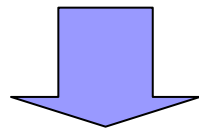


正の客数：完成品在庫量

負の客数：バックオーダー量

生産システムの待ち行列モデル

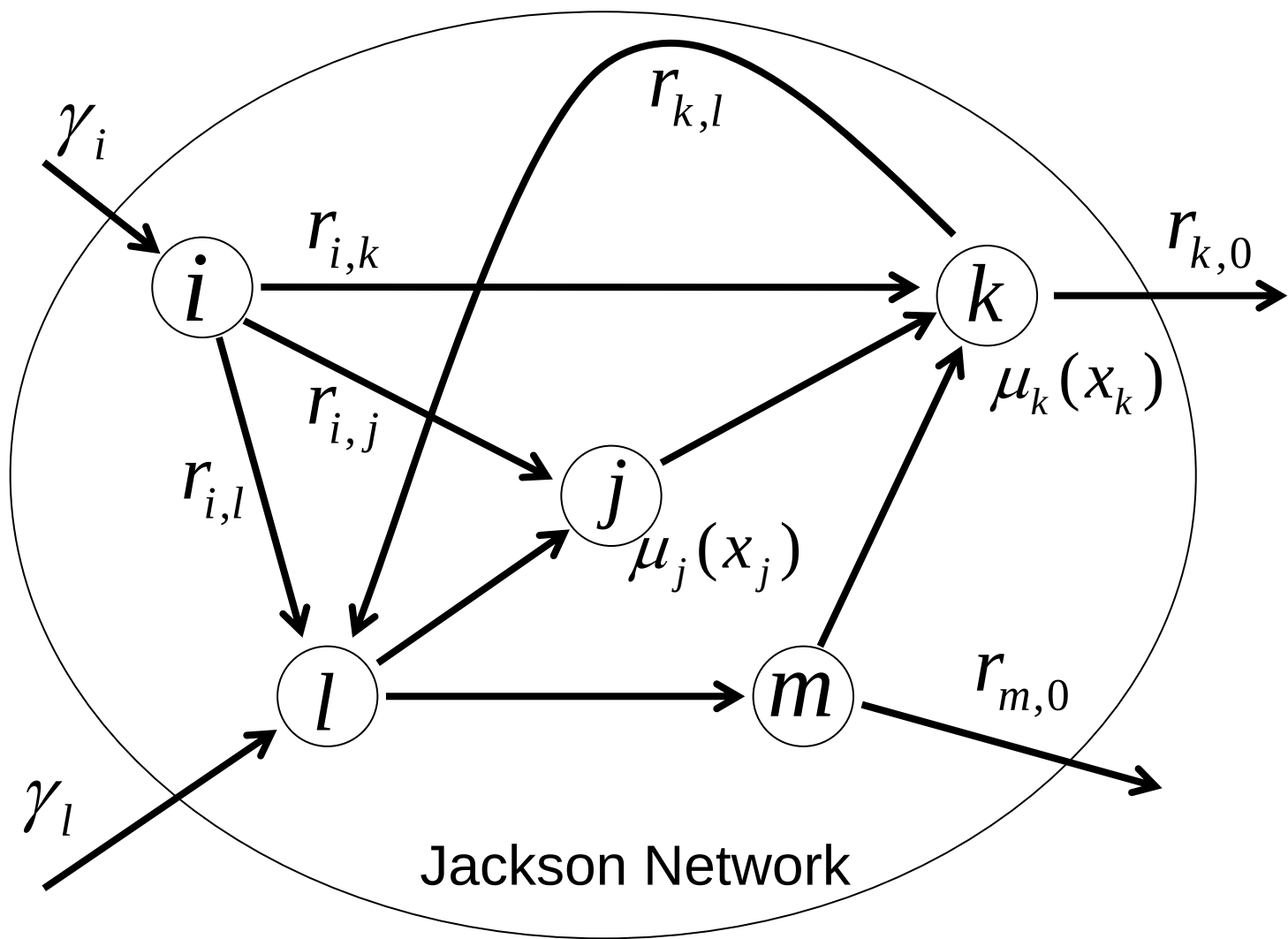
- 待ち行列ネットワーク(開 or 閉ネットワーク)
- 品種ごとに異なるサービス時間分布, ルーティング
- サービス時間は一般分布(相型分布)
- 待ち行列容量は有限(物理的制約, 生産指示方式)
- より複雑な生産指示方式にも対応
カンバン方式, (a,b,k) , 拡張型カンバン方式



マルコフ過程の状態数が膨大になる

Jackson Network による解析

- 外部から各ノードへの到着は，独立なポアソン分布
 γ_i : ノード i への到着率 ($i = 1, \dots, J$)
- 客のサービス時間は，各ノードで独立な指数分布
 $\mu_i(x_i)$: ノード i に客が x_i 人いるときのサービス率
- ノード i でサービスを終了した客がノード j へ移動する確率は $r_{i,j}$ ，ネットワークを退去する確率は $r_{i,0}$
ただし， $\sum_{j=0}^J r_{i,j} = 1$ (Markov routing)
- 待ち行列容量 = 無限



すべてのタイプの客を1つのクラスに集約

■推移確率行列

$$\begin{cases} q(x, x + e_i) = \gamma_i \\ q(x, x - e_i + e_j) = \mu_i(x_i) r_{i,j} \\ q(x, x - e_i) = \mu_i(x_i) r_{i,0} \end{cases}$$

ただし $x = (x_1, x_2, \dots, x_J)$
 $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

λ_i をトラヒック方程式

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_j \lambda_j r_{j,i} \quad (i = 1, \dots, J)$$

の解 (単位時間当たりの客のノード i への流入率)

開ネットワークの積形式解

定理 1

$$P[Y_i = n] = P[Y_i = 0] \cdot \frac{\lambda_i^n}{M_i(n)}$$

ただし $M_i(n) = \mu_i(1) \cdots \mu_i(n)$, $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[Y_i = n] = 1$$

とし, 次式が成り立つと仮定する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{M_i(n)} < \infty$$

このとき, $\mathbf{x}$ の平衡状態確率 $\pi(\mathbf{x})$ は積形式解をもつ.

$$\pi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^J P[Y_i = x_i]$$

(証明のあらすじ)

x_t を遷移率行列 Q をもつ定常マルコフ過程とし, その逆時間過程を $\tilde{x}_t$ とする. このとき, $\tilde{x}_t$ は

$$\pi(k)\tilde{q}(k, m) = \pi(m)q(m, k)$$

を満たす推移率行列 $\tilde{Q} = [\tilde{q}(k, m)]$ をもつマルコフ過程となり, $\pi(\cdot)$ は両者の平衡状態確率である.

$$\tilde{r}_{i,j} = \frac{\lambda_j r_{i,j}}{\lambda_i}, \quad \tilde{r}_{i,0} = \frac{\gamma_i}{\lambda_i}, \quad \tilde{\gamma}_i = \lambda_i r_{i,0}$$

とおき, 推移率行列 $\tilde{Q}$ を求めると, 次式が成立する.

$$\pi(x)q(x, y) = \pi(y)\tilde{q}(y, x)$$

閉ネットワークの積形式解

定理 2

λ_i をトラヒック方程式 $\lambda_i = \sum_j \lambda_j r_{j,i}$ の解とし,

$$P[Y_i = n] = P[Y_i = 0] \cdot \frac{\lambda_i^n}{M_i(n)}$$

ただし $M_i(n) = \mu_i(1) \cdots \mu_i(n)$, $n = 1, \dots, N$
 N : 系内人数

このとき, $\mathbf{x}$ の平衡状態確率 $\pi(\mathbf{x})$ は積形式解をもつ.

$$\pi(\mathbf{x}) = C^{-1} \prod_{i=1}^J P[Y_i = x_i]$$

C^{-1} は正規化定数 (たたみこみ法, 平均値解析法)

Jackson Network の構造的性質

- 閉 Jackson ネットワークにおいて、すべてのノードにおいて $\mu_i(n)$ が n の増加関数であるとき、システムのスループット（すべてのノードの流出率の和）は、系内人数 N の増加関数となる。
- 閉 Jackson ネットワークにおいて、あるノード（の部分集合）のサービス率を増加させたとき、その他のノードの $\mu_i(n)$ が n の増加関数ならば、システムのスループットは増加する。

Jackson Network の構造的性質 (cont.)

- 閉 Jackson ネットワークにおいて、すべてのノードにおいて $\mu_i(n)$ が n の増加かつ凹（凸）関数であるとき、システムのスループットは、系内人数 N の増加かつ凹（凸）関数となる.
- λ_i の総和が一定の閉 Jackson ネットワークにおいて、すべてのノードで $\mu_i(n)$ が n の増加かつ凹関数で、 $\mu_1(n) = \cdots = \mu_J(n)$ ならば、システムのスループットは、 λ_i ($i = 1, \dots, J$) を均等にすればするほど大きくなる.

積形式解をもつ待ち行列網の拡張

■準可逆な待ち行列

複数クラスの待ち行列がクラス $c \in C$ について以下のいずれかの条件を満たすとき，準可逆であるという

(1) 時刻 t までの到着過程と時刻 t の状態が独立，かつ，時刻 t 以降の退去過程と時刻 t の状態が独立

(2) $A^c(D^c)$ をクラス c の客の到着(退去)による遷移の集合とすると

$$\sum_j q(i, j) 1\{(i, j) \in A^c\} = \lambda_c$$

$$\sum_i \pi(i) q(i, j) 1\{(i, j) \in D^c\} = \mu_c \pi(j)$$

積形式解をもつ待ち行列網の拡張(cont.)

■対称型待ち行列のネットワーク

λ_c : クラス c の客の到着率 (独立なポアソン到着)

客が要求する仕事量: 任意の分布

c_i : 位置 i の客のクラス

ϕ_i : 位置 i の客の残余仕事量

$\mathbf{x} = (c_1, \phi_1; \dots; c_n, \phi_n)$: 客が n 人いるときの状態

客が n 人いるとき

$\varphi(n)$: 総サービス率

$a(n+1, l)$: 到着した客が位置 l に行く確率

$d(n, l)$: 位置 l の客に配分するサービス率の割合

$a(n, l) = d(n, l)$ なる待ち行列 $\Rightarrow$ 対称型待ち行列

積形式解をもつ待ち行列網の拡張(cont.)

■対称型待ち行列の例

$$M/G/1\text{-LCFS} \quad a(n, 1) = d(n, 1) = 1, \varphi(n) = 1$$

$$M/G/1\text{-PS} \quad a(n, l) = d(n, l) = 1/n, \varphi(n) = 1$$

$$M/G/\infty \quad a(n, l) = d(n, l) = 1/n, \varphi(n) = n$$

(注) $M/G/1\text{-FCFS}$ は含まれない

■対称型待ち行列は準可逆である

積形式解をもつ待ち行列網の拡張(cont.)

■準可逆待ち行列のネットワーク

各ノード（待ち行列）は準可逆

γ : ネットワークへの客の到着率（ポアソン到着）

$r_{i,j}^{c,d}$: ノード i のクラス c の客がノード j へクラス d の客として移動する確率

$r_{0,i}^c$: 到着客がノード i のクラス c の客になる確率

$r_{i,0}^c$: ノード i でサービスを終了したクラス c の客がネットワークから退去する確率

■準可逆待ち行列のネットワークは準可逆であり、その平衡状態確率は積形式解をもつ

Generalized Semi-Markov Process

- S : 状態の集合
 A : イベント (事象) の集合 ($|A| < \infty$ とする)
 $\mathcal{E}$: S から A の部分集合への写像 ($\mathcal{E} : S \rightarrow 2^A$)
 $\mathcal{E}(s)$: 状態 $s \in S$ における活性なイベントリスト
 ϕ : 状態推移関数
 $\phi(s, \alpha)$: 状態 $s \in S$ においてイベント $\alpha \in \mathcal{E}(s)$ が起きた時に移る状態
 $\xi_\alpha(n)$: n 回目に起きたイベント $\alpha \in A$ のクロック

GSMS(Scheme) $\mathcal{G} = (S, A, \mathcal{E}, \phi)$ に駆動するクロック

$$\xi = \{\xi_\alpha(n), \alpha \in A, n = 1, 2, \dots\}$$

を与えたものを GSMP という.

Generalized Semi-Markov Process (cont.)

- イベント列 $\beta_1, \dots, \beta_n \in A$ が以下を満たすとき, $\beta_1, \dots, \beta_n$ は s_0 から開始して実行可能であるという.

$$\beta_{i+1} \in \mathcal{E}(s_i), \quad s_i = \phi(s_{i-1}, \beta_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

- 一般に有限個のイベントの列を**文字列**といい, σ で表す.
- 文字列 σ が s から開始して実行可能であるとき, s から始まり σ が起きたときに到達する状態を $\phi(s, \sigma)$ で表す.
- $[\sigma]_\alpha$ を文字列 σ 中に現れるイベント α の個数とし, $[\sigma]$ をベクトル $[\sigma] = ([\sigma]_\alpha, \alpha \in A)$ とする.

Generalized Semi-Markov Process (cont.)

(i) 非割り込み (noninterruption):

任意の $s \in S$ と相異なる $\alpha, \beta \in A$ に対して,

$$\alpha, \beta \in \mathcal{E}(s) \Rightarrow \beta \in \mathcal{E}(\phi(s, \alpha))$$

(いったん活性になったイベントは割り込まれない)

(ii) 可換 (permutability):

任意の実行可能な文字列 σ と σ' に対して,

$$[\sigma] = [\sigma'] \Rightarrow \mathcal{E}(\phi(s, \sigma)) = \mathcal{E}(\phi(s, \sigma'))$$

(イベントの順番を変えても最終の活性なイベントリストは変わらない)

Generalized Semi-Markov Process (cont.)

(iii) 強可換 (**strong permutability**):

任意の実行可能な文字列 σ と σ' に対して,

$$[\sigma] = [\sigma'] \Rightarrow \phi(s, \sigma) = \phi(s, \sigma')$$

(イベントの順番を変えても最終状態は変わらない)

(iv) min閉包 (**min-closure**):

任意の実行可能な文字列 σ_1 と σ_2 に対して,

$$[\sigma] = [\sigma_1] \wedge [\sigma_2]$$

なる実行可能な文字列 σ が存在する.

Generalized Semi-Markov Process (cont.)

(M) (**Monotonicity condition**min):

$\mathcal{G} = (S, A, \mathcal{E}, \phi)$ が非割り込みかつ可換であるとき, $\mathcal{G}$ は条件 (**M**) を満たすという.

(CX) (**Convexity condition**):

$\mathcal{G} = (S, A, \mathcal{E}, \phi)$ が条件 (**M**) を満たし, かつ min 閉包であるとき, $\mathcal{G}$ は条件 (**CX**) を満たすという.

Generalized Semi-Markov Process (cont.)

定理 3

$T_\alpha(n)$ をイベント α の n 回目の生起時刻とし, その列を $T = \{T_\alpha(n), \alpha \in A, n = 1, 2, \dots\}$ とする. このとき $\mathcal{G}$ が条件 **(M)** (条件 **(CX)**) を満たすならば, 各 $\alpha \in A$ に対して以下を満たす整数 $J(\alpha, n) > 0$ および $\{x_\beta^j(\alpha, n), \beta \in A, j = 1, \dots, J(\alpha, n)\}$ が存在する.

(M)

$$T_\alpha(n) = \xi_\alpha(n) + \min_{1 \leq j \leq J(\alpha, n)} \max_{\beta \in A} \{T_\beta(x_\beta^j(\alpha, n))\}$$

(CX)

$$T_\alpha(n) = \xi_\alpha(n) + \max_{\beta \in A} \{T_\beta(x_\beta^j(\alpha, n))\}$$

Generalized Semi-Markov Process (cont.)

定理 4

$\{\xi_{\alpha_i}(n), n = 1, 2, \dots\}$ は互いに独立な確率変数例であり, 異なる事象間は互いに独立であるとする. このとき $\mathcal{G}$ が条件 **(M)** (条件 **(CX)**) を満たすならば,

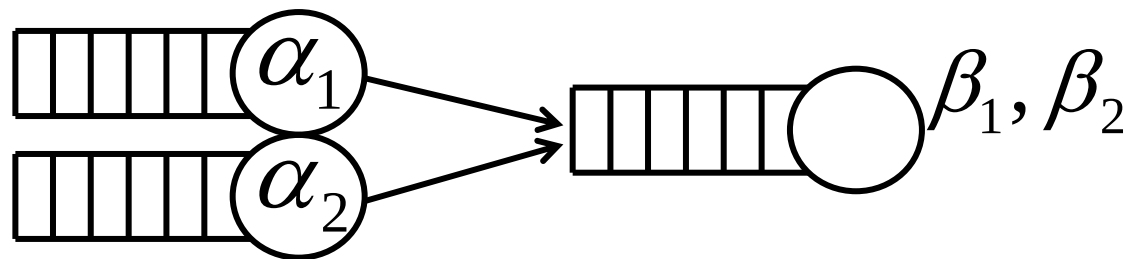
(M)

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha_i}(n) &\leq_{st} \xi'_{\alpha_i}(n) \text{ for all } i, n \\ \Rightarrow T_{\alpha_i}(n) &\leq_{st} T'_{\alpha_i}(n) \text{ for all } i, n \end{aligned}$$

(CX)

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha_i}(n) &\leq_{icx} \xi'_{\alpha_i}(n) \text{ for all } i, n \\ \Rightarrow T_{\alpha_i}(n) &\leq_{icx} T'_{\alpha_i}(n) \text{ for all } i, n \end{aligned}$$

条件が満たされない例



(i) 非割り込み

$[\sigma]_{\alpha_1} + [\sigma]_{\alpha_2} - [\sigma]_{\beta} = B - 1$ のとき, $\mathcal{E}(\sigma) = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta\}$
 ところが, $\sigma' = \sigma \alpha_1$ ならば $\mathcal{E}(\sigma') = \{\beta\}$

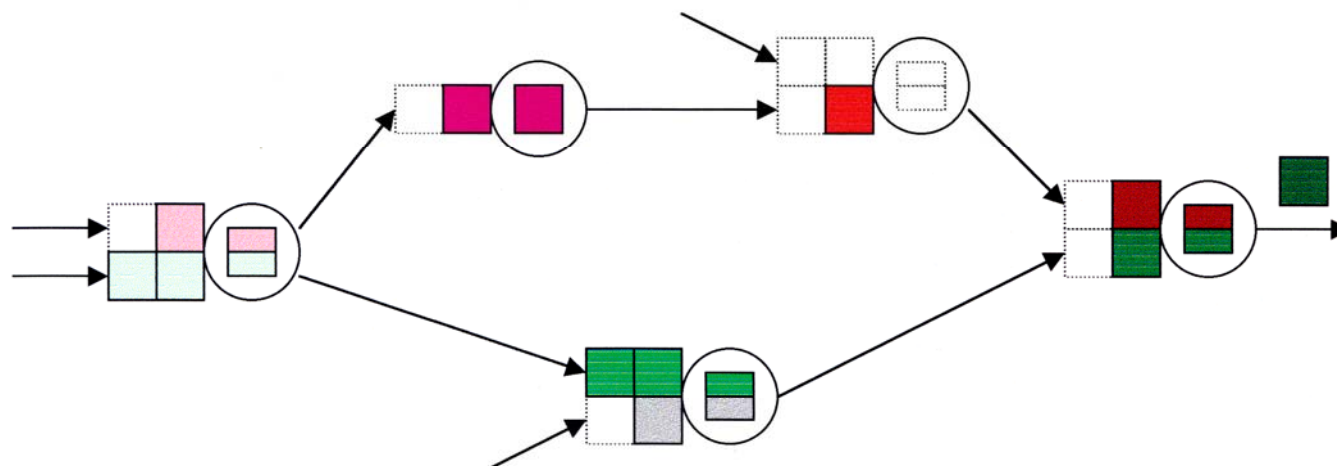
(ii) 可換 ($\beta_1 \neq \beta_2$)

$\mathcal{E}(\alpha_1 \alpha_2) = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\}$, $\mathcal{E}(\alpha_2 \alpha_1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_2\}$

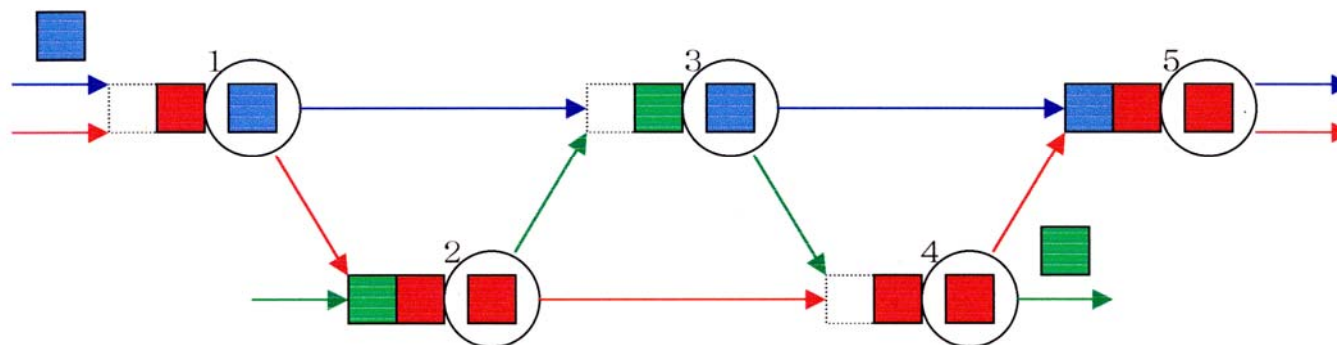
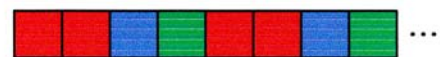
(iii) min 閉包 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$)

$([\sigma]_{\alpha_1}, [\sigma]_{\alpha_2}, [\sigma]_{\beta}) = (2, 4, 6)$, $([\sigma']_{\alpha_1}, [\sigma']_{\alpha_2}, [\sigma']_{\beta}) = (4, 2, 6)$ のとき, $[\sigma] \wedge [\sigma']$ なる文字列は実行不可能

組立て・分解型生産ライン

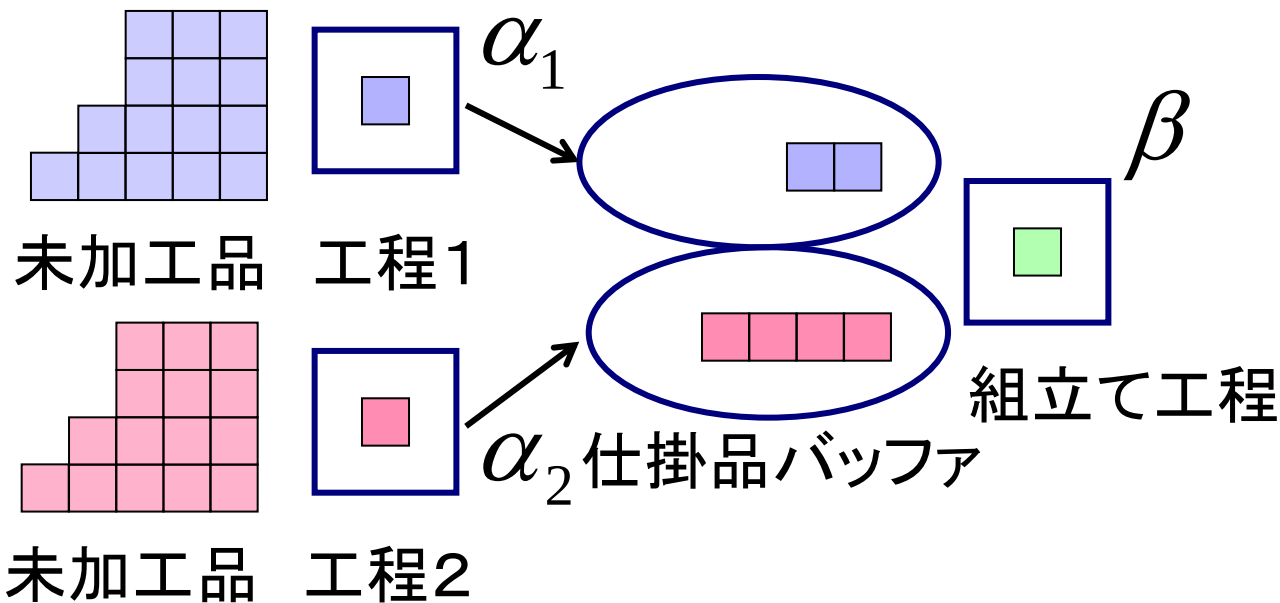


平準化されたジョブショップ型生産システム



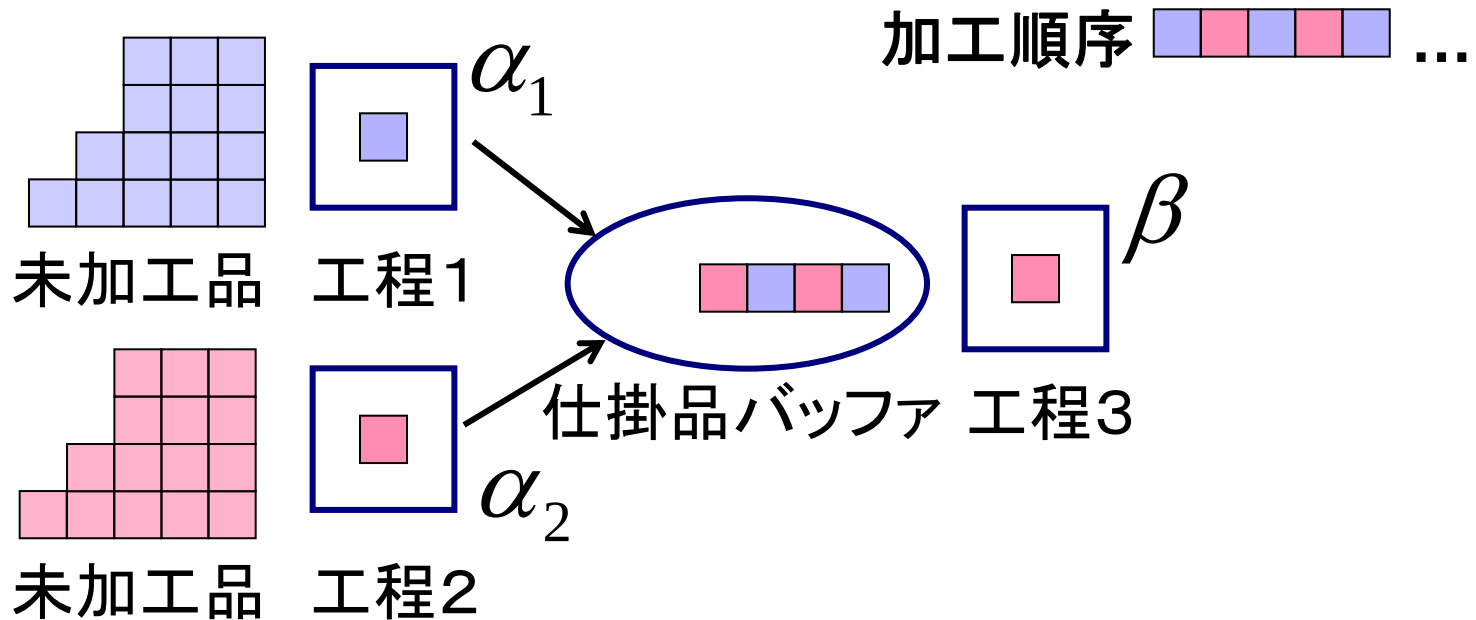
条件(CX)を満たすシステム

■組立て・分解型生産ライン



組立て工程を含む仕掛品バッファの容量が B のとき
 $[\sigma]_{\alpha_i} > [\sigma]_{\beta}$ ($i = 1, 2$) ならば, $\beta \in \mathcal{E}(\sigma)$
 $[\sigma]_{\alpha_i} - [\sigma]_{\beta} < B$ ならば, $\alpha_i \in \mathcal{E}(\sigma)$

■ 平準化されたジョブショップ型生産システム



工程3を含む仕掛品バッファの容量が B のとき

$[\sigma]_{\alpha_1} + [\sigma]_{\alpha_2} > [\sigma]_{\beta}$ ならば, $\beta \in \mathcal{E}(\sigma)$

$[\sigma]_{\alpha_1} + [\sigma]_{\alpha_2} - [\sigma]_{\beta} \leq B$ かつ

$[\sigma]_{\alpha_1} = [\sigma]_{\alpha_2}$ ならば, $\alpha_1 \in \mathcal{E}(\sigma)$

$[\sigma]_{\alpha_1} + 1 = [\sigma]_{\alpha_2}$ ならば, $\alpha_2 \in \mathcal{E}(\sigma)$

構造の異なるGSMPの比較

- 2つのGSMS $g^{(1)}$ と $g^{(2)}$ にそれぞれクロック $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ を与え, $T^{(1)}$ と $T^{(2)}$ を対応するイベントの生起時刻とする.
- ただし, $\xi^{(1)}$ と $\xi^{(2)}$ はサンプリング関数 $\phi^{(1)}$ と $\phi^{(2)}$ によって独立な一様乱数列 $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ から生成される.
- 2つのシステムを評価関数の差の期待値

$$\bar{E} = E[f(X) - g(Y)]$$

によって比較する.

- このとき, $\text{Var}[f(X) - g(Y)]$ を小さくすれば $\bar{E}$ の推定値の信頼区間の幅は小さくなる.

構造の異なるGSMPの比較(cont.)

定理5

条件 **(M)** を満たす $G^{(1)}$ と $G^{(2)}$ を考える.

$\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ がそれぞれ一様乱数列 $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ の単調増加で右半連続な関数とする.

f , g は それぞれ $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ の単調増加で右半連続な関数とし, $f(T^{(1)})$, $g(T^{(2)})$ は有限の2次モーメントを持つものとする. このとき,

$$\inf_{\mathcal{M}(U^{(1)}, U^{(2)})} \text{Var}[f(T^{(1)}) - g(T^{(2)})]$$

の最小値は $U^{(1)} = U^{(2)}$ のときに達成され, 同時にすべての α と n に対して $\text{Var}[T_{\alpha}^{(1)} - T_{\alpha}^{(2)}]$ も最小となる.

サンプルパス最適化

$f_N(\theta)$: θ をパラメータとする確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}(\cdot, \theta))$
上の確率変数 ($N = 1, 2, \dots$)

$f_N(\omega; \theta)$: あるサンプル $\omega \in \Omega$ に対する $f_N(\theta)$ の実現値

θ の制約集合 $S \subset \mathcal{R}^n$ における評価尺度 F の最適化問題

$$\begin{aligned} \max_{\theta} F(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\omega; \theta) \\ \text{s.t. } \theta &\in S \end{aligned}$$

を, 十分大きな N に対してサンプル $\bar{\omega} \in \Omega$ に固定して

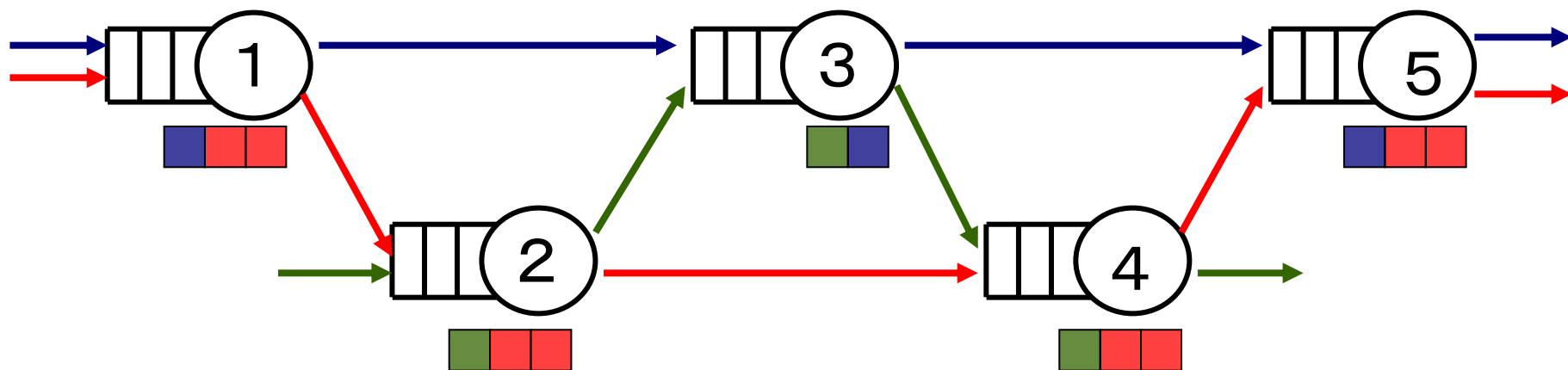
$$\begin{aligned} \max_{\theta} F_N(\theta) &= f_N(\bar{\omega}; \theta) \\ \text{s.t. } \theta &\in S \end{aligned}$$

によって近似する.

平均サービス時間配分問題

仮定1 サーバ i のサービス時間は平均 $1/\mu_i$ の指数分布

仮定2 平均サービス時間の総和は10.0で一定



バッファ容量（サーバを含む）はすべて4

サーバ1,2には，常に仕掛品があるように到着する

$N = 60000$ とし，2つのサンプルパスを生成

平均サービス時間配分問題(cont.)

■数値結果

	サンプル1			サンプル2		
i	$1/\mu_i$	$P(4)$	$P(0)$	$1/\mu_i$	$P(4)$	$P(0)$
1	2.076	1.000	0.000	2.062	1.000	0.000
2	1.827	0.485	0.000	1.828	0.476	0.000
3	2.718	0.136	0.081	2.733	0.141	0.080
4	1.514	0.079	0.139	1.510	0.075	0.135
5	1.865	0.154	0.173	1.866	0.156	0.175
TP	0.4843			0.4852		

まとめ

- 待ち行列ネットワーク(開 or 閉ネットワーク)
- 品種ごとに異なるサービス時間分布, ルーティング
- サービス時間は一般分布(相型分布)
- 待ち容量は有限(物理的制約, 生産指示)
- より複雑な生産指示方式にも対応

積形式解: 準可逆待ち行列は多品種にも対応できる
FCFSの場合は指数サービスのみ
有限待ち容量(ブロッキング)は困難

GSMP: 競合があるとM,CXは満たされない
複雑な生産指示方式にも対応

参考文献

- Glasserman and Yao, "A GSMP Framework for the Analysis of Production Lines, " (Chapter 4)
- Buzacott, et al., "Jackson Network Models of Manufacturing Systems," (Chapter 1)
in Stochastic Modeling Analysis of Manufacturing Systems, Springer-Verlag, 1994.
- 紀一誠, 「待ち行列ネットワーク」, 朝倉書店
- 宮沢政清, 「待ち行列の数理とその応用」, 牧野書店
- Glasserman and Yao, "Monotone Structure in Discrete-Event Systems," Wiley, 1994.
- Robinson, "Analysis of Sample-Path Optimization," Math. of Operations Research, 21(3), 513-528, 1996.
- 石塚陽, 山下英明, "サンプルパス最適化の離散的事象システムへの適用," オペレーションズ・リサーチ, 46(4), 195-201, 2001.